Harmonické kmity

Hlavní body

Úvod do nauky o kmitech
Harmonické kmity

- Pohybová rovnice a její řešení
- Časové závislosti výchylky, rychlosti, zrychlení,
- Potenciální, kinetická a celková energie
- Princip superpozice při skládání kmitů
- Příklad kmitající soustavy – kyvadla
- Vlastní frekvence
- Nucené harmonické kmity- rezonance

Pohyb kmitavý

Podmínkou kmitavých (vibračních) pohybů je

1. Rovnovážná poloha, v níž na hmotný bod nepůsobí žádné síly a

2. Síly, které se snaží o návrat hmotného bodu do rovnovážné polohy.

- Původem kmitavých (vibračních) pohybů je nejčastěji existence elastického charakteru sil, působících mezi částicemi.
- V přírodě jsou značně rozšířeny.
- Vibrační energie je důležitým druhem energie.

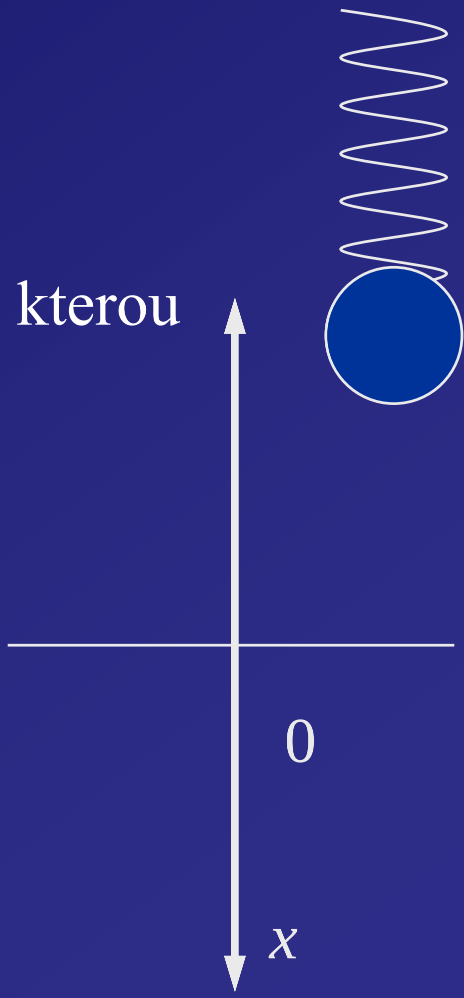
Netlumené harmonické kmity

netlumené = bez ztráty energie

- Uvažujme pro jednoduchost tuto situaci :
  - hmotný bod se může pohybovat na přímce, kterou ztotožníme například s osou *x*.
  - počátek zvolíme v rovnovážné poloze
- Charakter kmitů je dán návratovou silou :
  - návratová síla je přímo úměrná výchylce

→ harmonické kmity

$$F = -kx$$

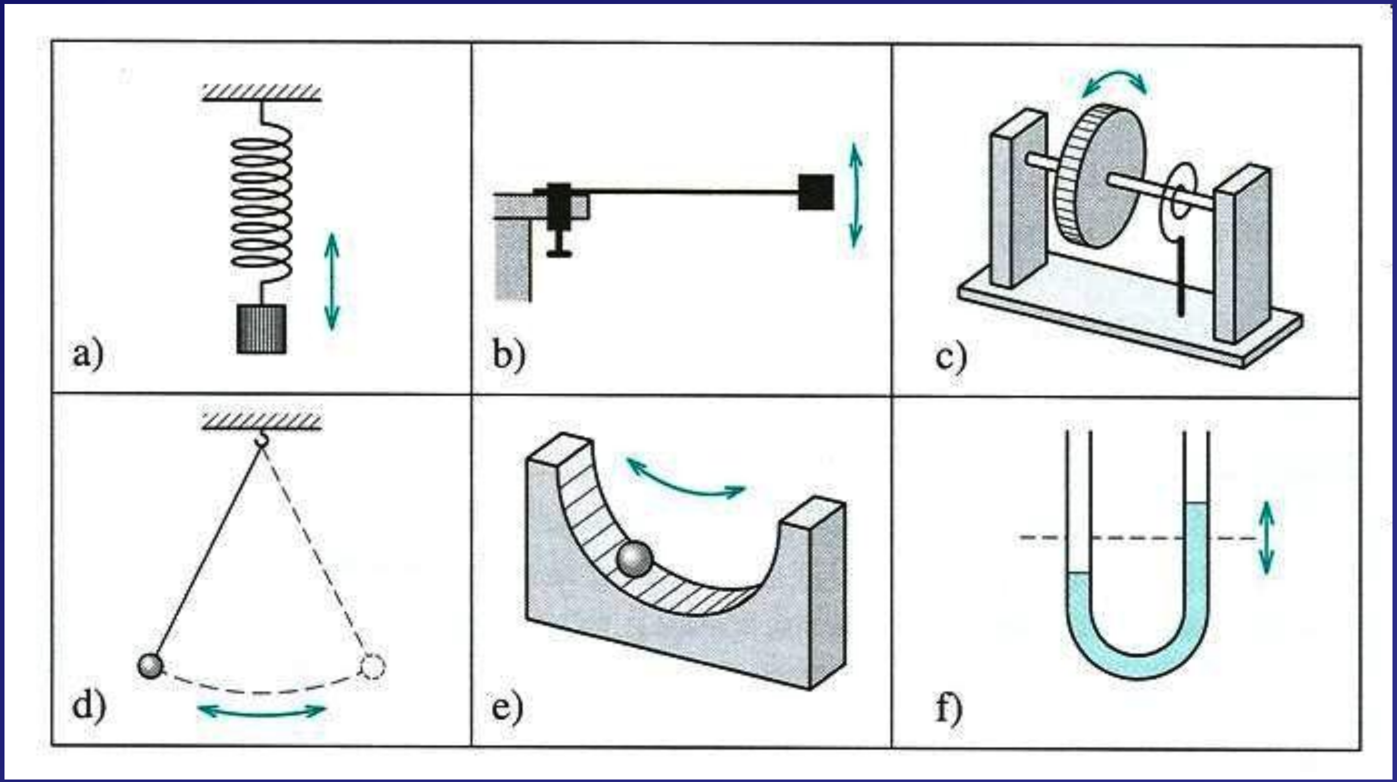


$$F = -kx$$

Lineární oscilátor

- tato síla odpovídá Hookovskému chování. Jedná-li se o sílu způsobenou odezvou materiálu nazývá se konstanta úměrnosti *k* tuhost pružiny a je úměrná příslušnému Youngovu modulu.
- podobná síla ale může existovat v libovolném poli, které má potenciál, například gravitačním nebo elektrostatickém.

Zařízení, které volně (bez vnějšího působení) kmitá, je mechanický oscilátor. víceméně lineární



Dosadíme-li z 2. Newtonova zákona do vztahu pro sílu dostaneme pohybovou rovnici:

(diferenciální rovnice *2*. řádu, která neobsahuje člen *1*. řádu)

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

předpokládáme řešení například ve tvaru :

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

(Harmonická funkce)

- Vypočteme první a druhou derivaci podle času

$$\frac{dx}{dt} = x_0\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_0 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

- a dosadíme do původní rovnice :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$-m\omega^2 x(t) = -k\ x(t)$$

Odtud vyjádříme ω :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

vlastní úhlová frekvence

- Časovou závislost výchylky můžeme tedy popsat:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi) = x_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$$

  - Úhlová frekvence ω popisuje analogicky jako u kruhového pohybu periodicitu.
  - Zavádíme tedy i frekvenci f a periodu T :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

- Protože výchylka vznikla dvojí integrací, obsahuje dvě integrační konstanty :
  - amplitudu x_0, která má význam největší možné výchylky a
  - fázi φ, pomocí níž lze popsat kmity, které měly určitou počáteční výchylku v okamžiku, kdy se začal měřit čas.

Pohyb po kružnici – pohyb kmitavý

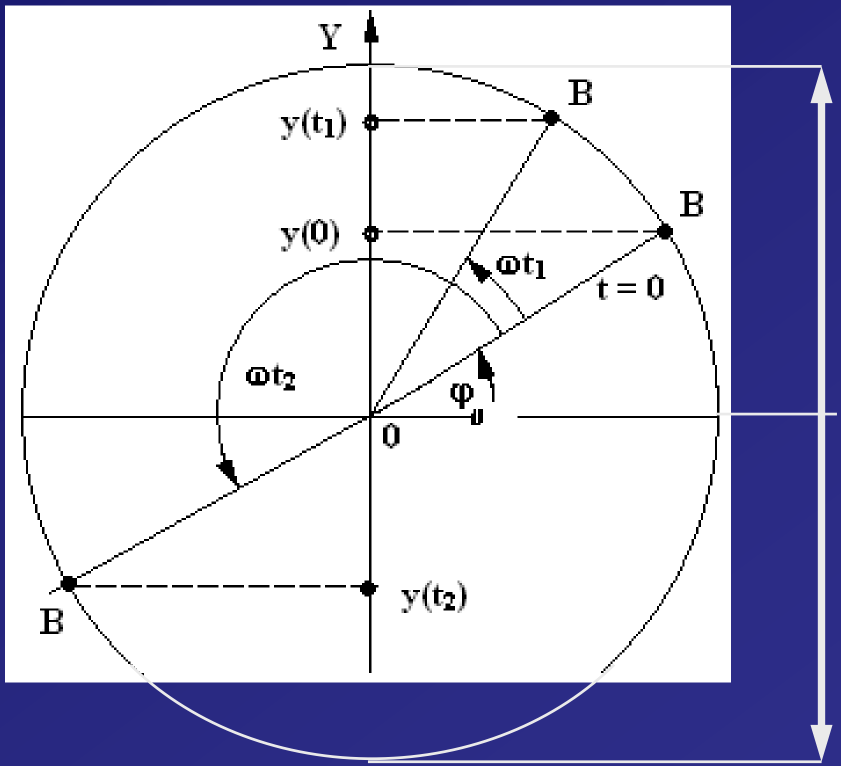
Průměty rovnoměrného kruhového pohybu do kolmých os jsou pohyby kmitavé.

Souřadnice hmotného bodu B :

$$x(t) = r.\cos\,\varphi(t) = r.\cos(\varphi_0 + \omega\, t)$$
$$y(t) = r.\sin\,\varphi(t) = r.\sin(\varphi_0 + \omega\, t)$$

φ_0 se zde nazývá počáteční fáze (v čase t = 0)

$r \approx A$ ...se nazývá amplituda



VIDEO

Ferder kreis

Průzkum vlastností rychlosti a zrychlení hm. b.

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = x_0 \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

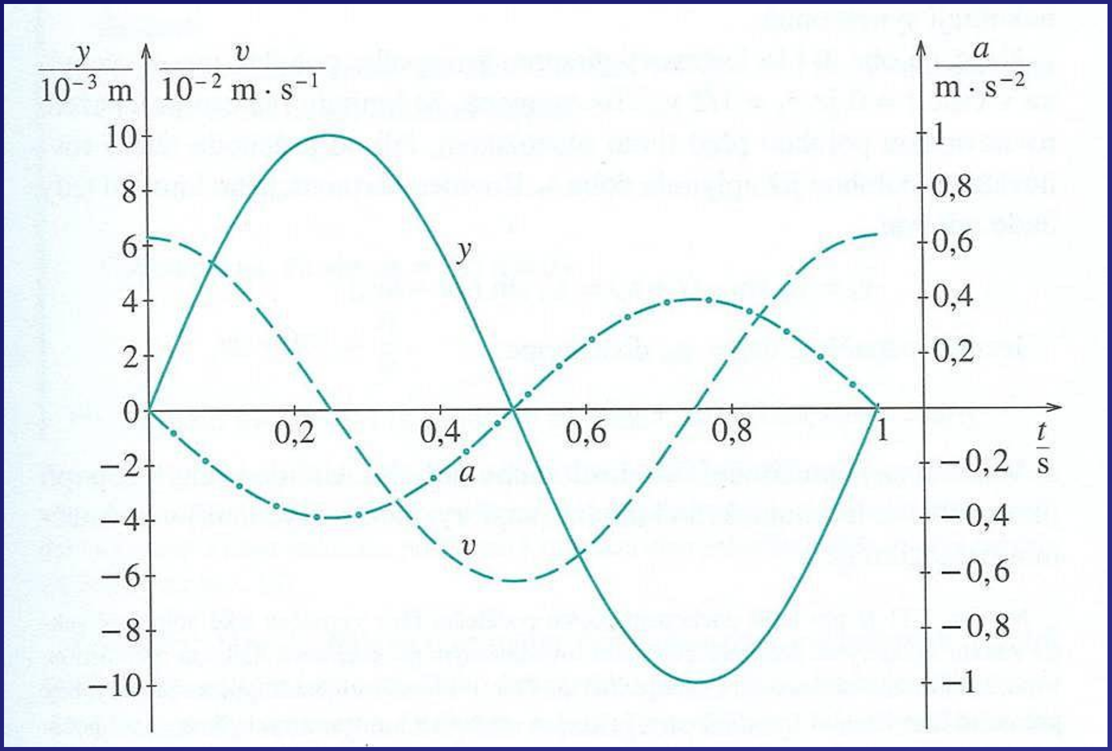
$$a(t) = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x_0 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

- Rychlost se předchází před výchylkou o čtvrtinu periody a její amplituda je ω-krát větší
- Zrychlení je úměrné výchylce, ale je s ní v protifázi = má opačný směr = předchází se (nebo opožďuje) o polovinu periody. To odpovídá charakteru návratové síly. Jeho amplituda je ω^2-krát větší

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = x_0 \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x_0 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$



Energie kmitavého pohybu
energie kmitajícího hm. b.

- Energie musí mít dvě složky :
  - kinetickou, protože se hmotný bod pohybuje určitou časově proměnnou rychlostí a
  - potenciální, protože k posunutí hmotného bodu do místa s určitou výchylkou je třeba vykonat práci. Tu lze získat zpět, protože vzhledem k předpokladům netlumeného kmitu jsou ztráty kinetické energie zanedbatelné.

Potenciální energie E_P kmitavého pohybu

Hledáme práci potřebnou na vychýlení hm.b. do polohy x

- protože síla není konstantní, ale závisí na výchylce, musíme integrovat.
- abychom docílili určité výchylky musíme konat práci

$$E_p(x) = W(x) = \int_0^x kx\,dx = \frac{kx^2}{2}$$

$$E_p(x) = \frac{k}{2} x_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} m\omega^2 x_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Kinetická energie E_K kmitavého pohybu

Počítáme kinetickou energii z rychlosti

$$E_k(x) = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}kx_0^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$E_k(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

Celková energie E kmitavého pohybu

Pro celkovou energii tedy platí :

$$E(t) = E_k(t) + E_p(t) =$$

$$\frac{k}{2} x_0^2 [\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)]$$

Zákon zachování energie

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

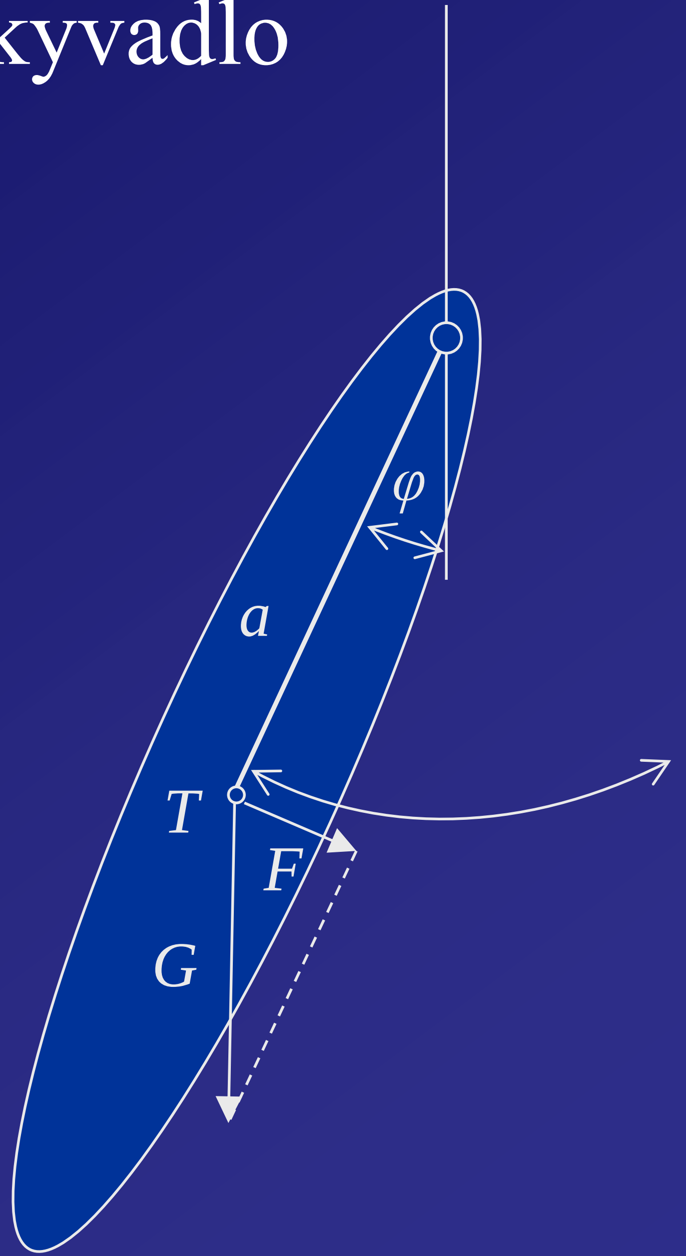
$$E(t) = \frac{k}{2} x_0^2 = \frac{m \omega^2 x_o^2}{2} = konst.$$

Důležité vlastnosti harmonického pohybu

1. Kinetická energie je ve fázi s absolutní hodnotou rychlosti. Tedy nezávisí na jejím směru.
2. Potenciální energie je ve fázi s absolutní hodnotou výchylky. Tedy opět nezávisí na její orientaci.
3. Celková energie nezávisí na čase, ale jen na hmotnosti a čtverci úhlové frekvence a čtverci amplitudy.
4. Na začátku například vychýlíme hmotný bod do určité polohy, což bude maximální výchylka. Tím vykonáme práci a dodáme systému počáteční celkovou energii.
5. Ta se potom v závislosti na čase rozkládá určitým způsobem na potenciální a kinetickou, ale součet zůstává roven energii, kterou jsme dodali na počátku.

Příklad – fyzické kyvadlo

- Kyvadla jsou systémy kmitající zpravidla v gravitačním poli (výjimka např. torzní k.).
- Fyzickým kyvadlem může být jakékoli tuhé těleso, které se může otáčet kolem pevné osy neprocházející těžištěm. Budeme předpokládat vzdálenost osy od těžiště *a*.



$$M(\varphi) = r \times F = -G\,a \sin\varphi$$

- Po vychýlení kyvadla z rovnováhy o malý úhel φ. se v důsledku gravitace objevuje moment síly, který se snaží vrátit těleso do rovnovážné polohy.
- Napišme pohybovou rovnici :

$$M(\varphi) = -Ga\sin\varphi = I\varepsilon = I\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

pro malé úhly: $sin(\varphi) \simeq \varphi$

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Ga\varphi$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t + \psi) = \varphi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{Ga}{I}}t + \psi\right)$$

Úhlová frekvence ω tedy je :

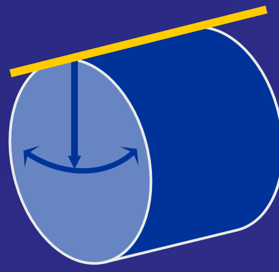
$$\omega = \sqrt{\frac{Ga}{I}} \qquad \text{srovnej} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

V čitateli opět vystupuje návratová síla (moment), která dává systém do pohybu a ve jmenovateli setrvačné vlastnosti systému

měření času:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Ga}}$$

Příklad: Válec, r = 0,1 m
T = ?



Příklady – matematické kyvadlo

Speciálním případem fyzického kyvadla je kyvadlo matematické, jehož veškerá hmotnost *m* je soustředěna ve vzdálenosti *l* od osy otáčení. Buď na nehmotném vláknĕ nebo tyčce.

Můžeme použít vztahy pro fyzické kyvadlo, do nichž dosadíme :

$a = l, \qquad G = mg, \qquad I = m\,l^2.$

Pro úhlovou frekvenci ω tedy dostáváme :

VIDEO

Fadenpendel

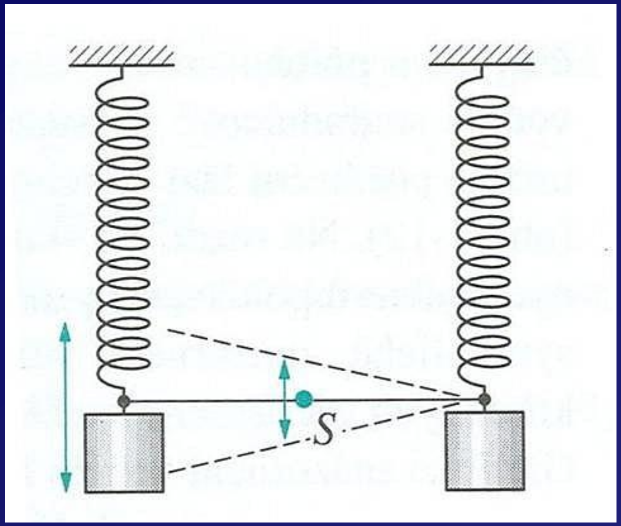
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{Ga}{I}} = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

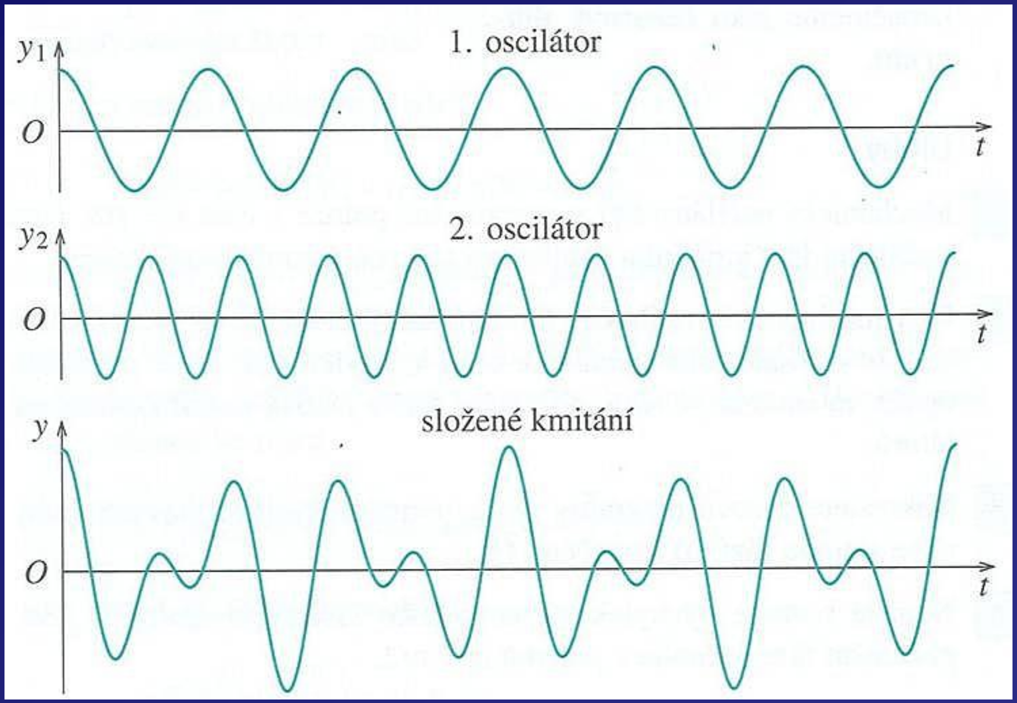
a pro periodu:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

kyvadlové hodiny

Složené kmitání





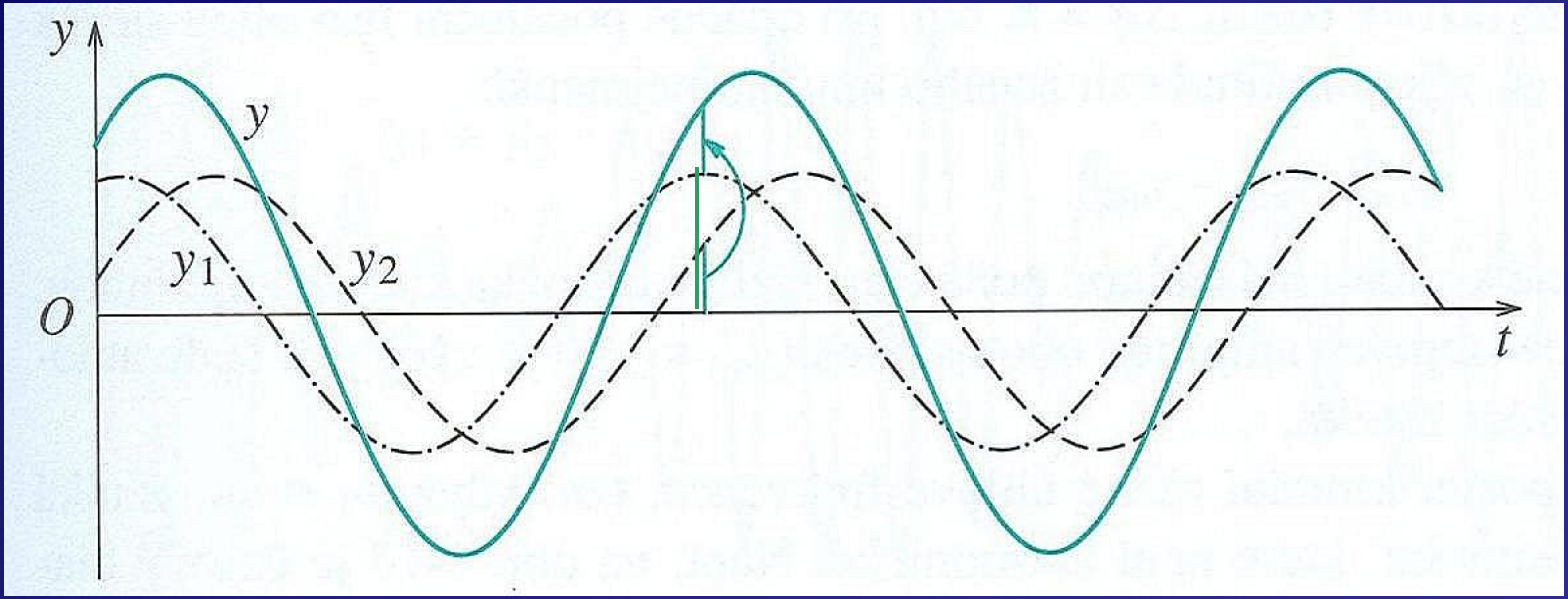
Princip superpozice:

Jestliže hmotný bod koná současně několik harmonických kmitavých pohybů, téhož směru s okamžitými výchylkami $y_1, y_2, \ldots, y_k$, je okamžitá výchylka y výsledného kmitání

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \ldots + y_k(t).$$

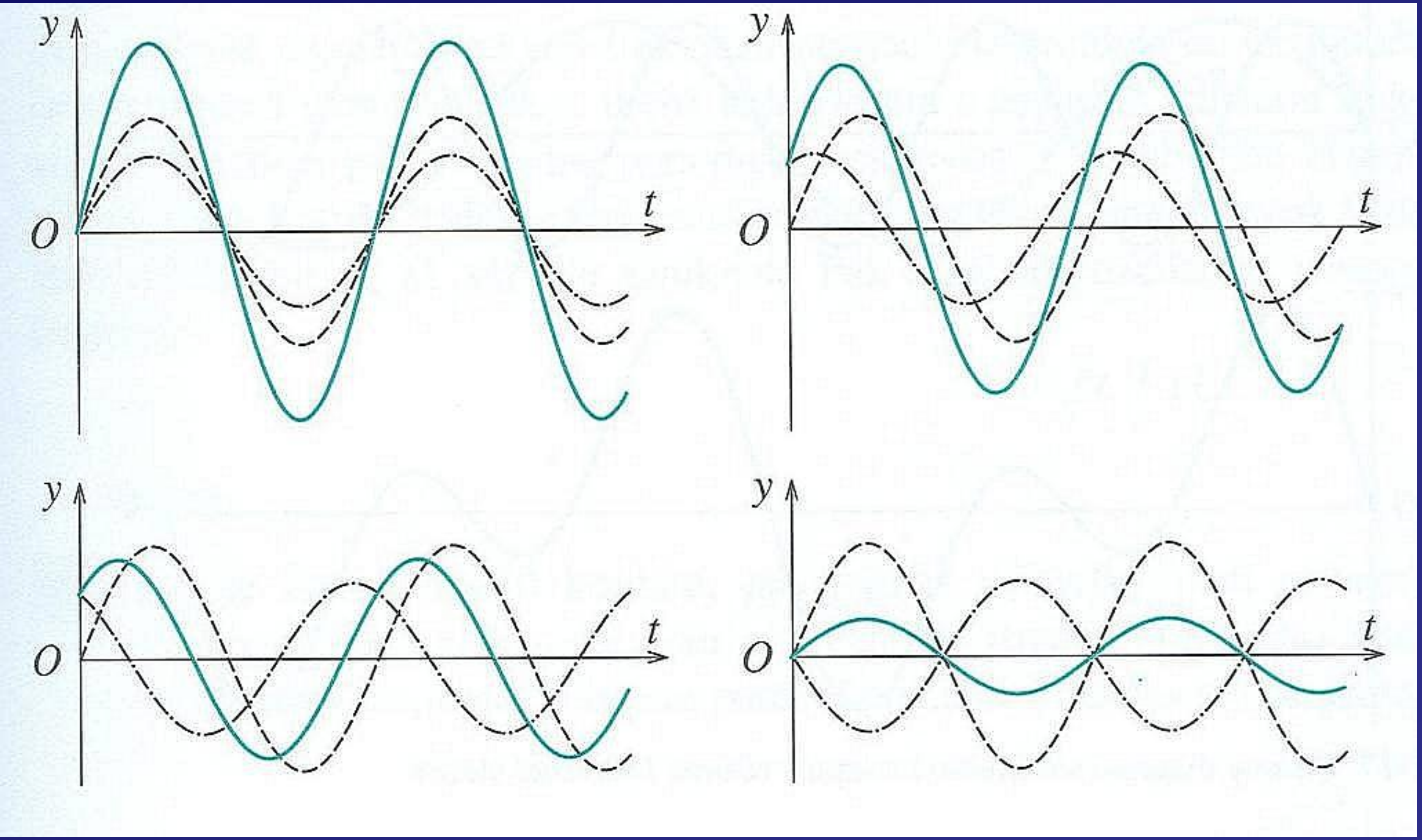
Okamžité výchylky mohou mít kladnou i zápornou hodnotu. Proto se při superpozici sčítají a odčítají.

Superpozice dvou harmonických kmitání o stejné frekvenci a nestejné fázi



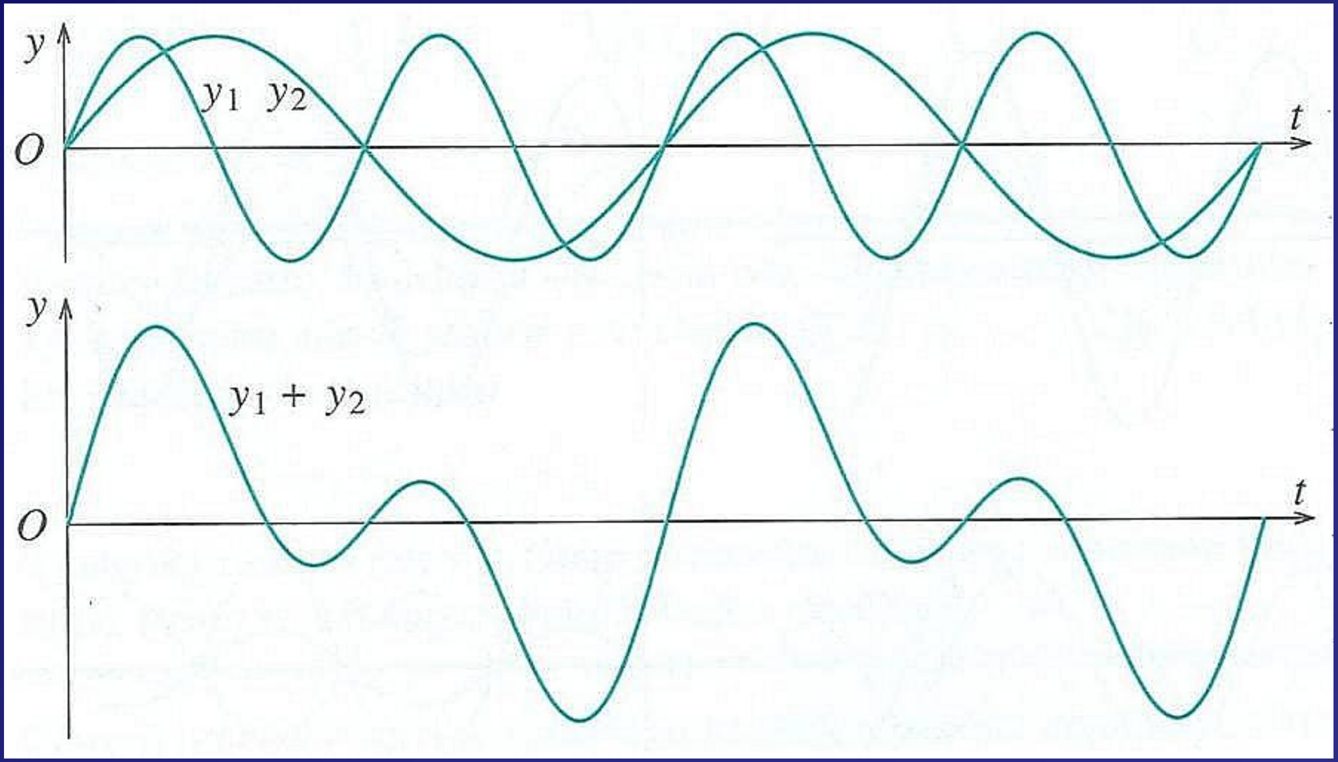
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \ldots + y_k(t).$$

Příklady složených kmitání o stejné frekvenci s různým fázovým rozdílem složek



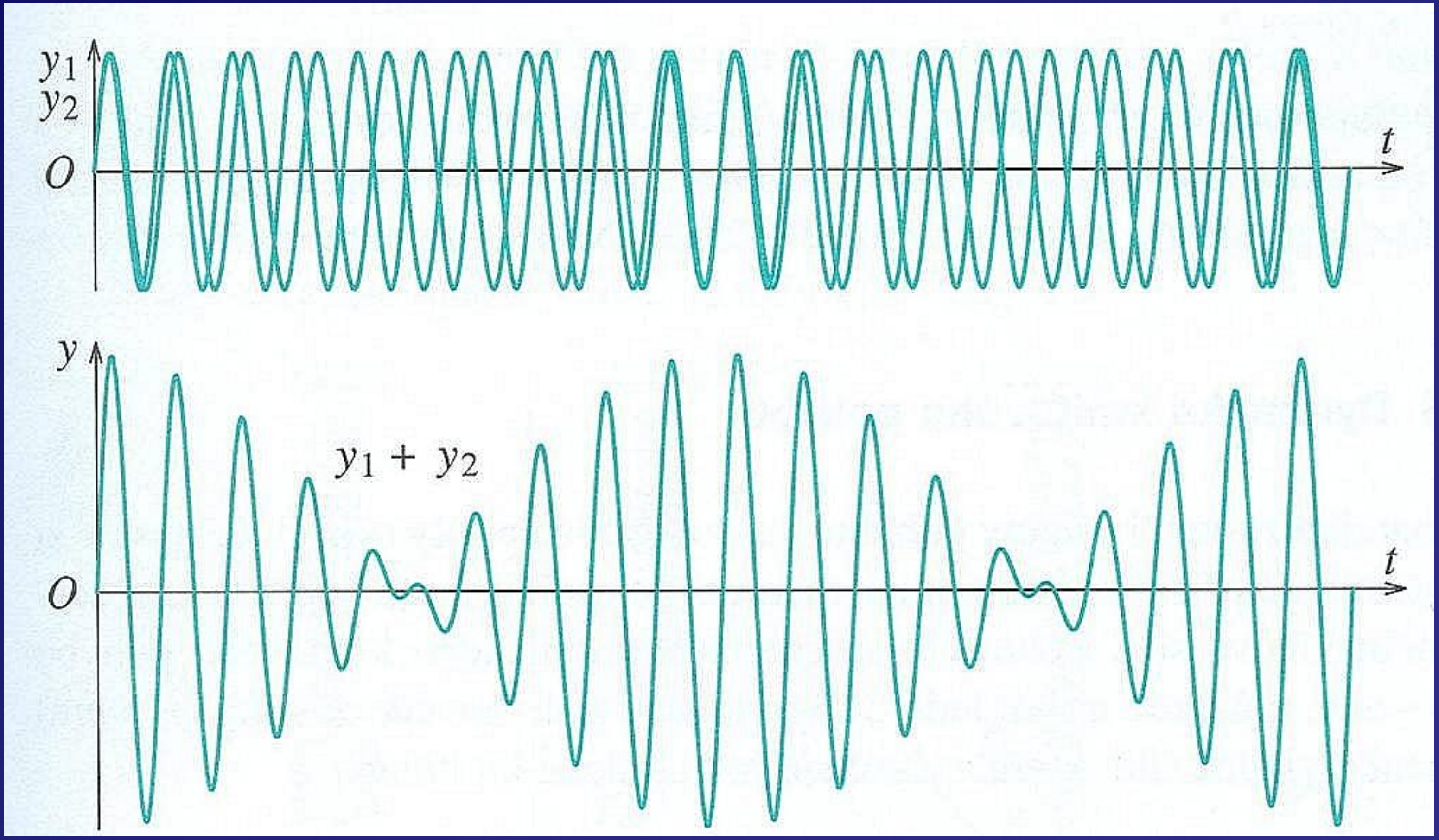
Skládají-li se harmonické pohyby se stejnou frekvencí, vznikne harmonický pohyb se toutéž frekvencí.

Časový diagram složeného kmitání s různou frekvencí složek



Skládají-li se harmonické pohyby s různou frekvencí, vznikne obecně neharmonický pohyb

Časový diagram složeného kmitání s blízkou frekvencí složek - rázy

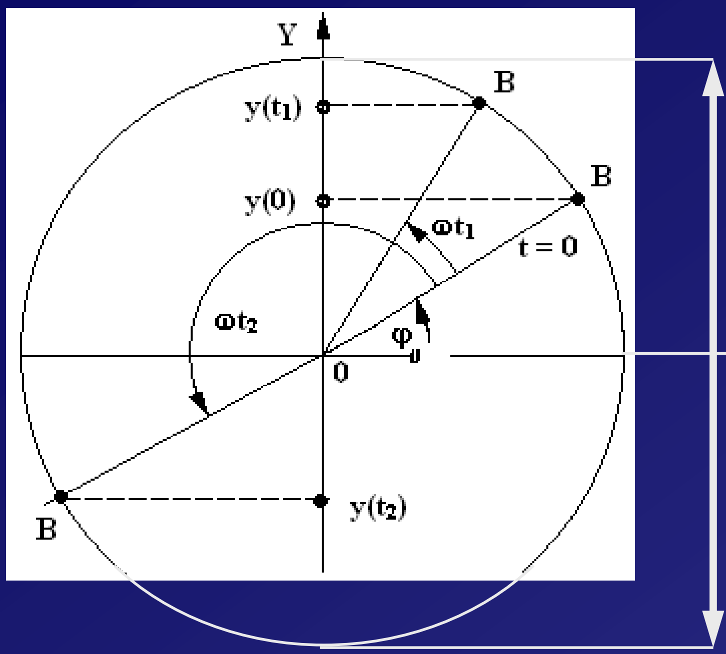


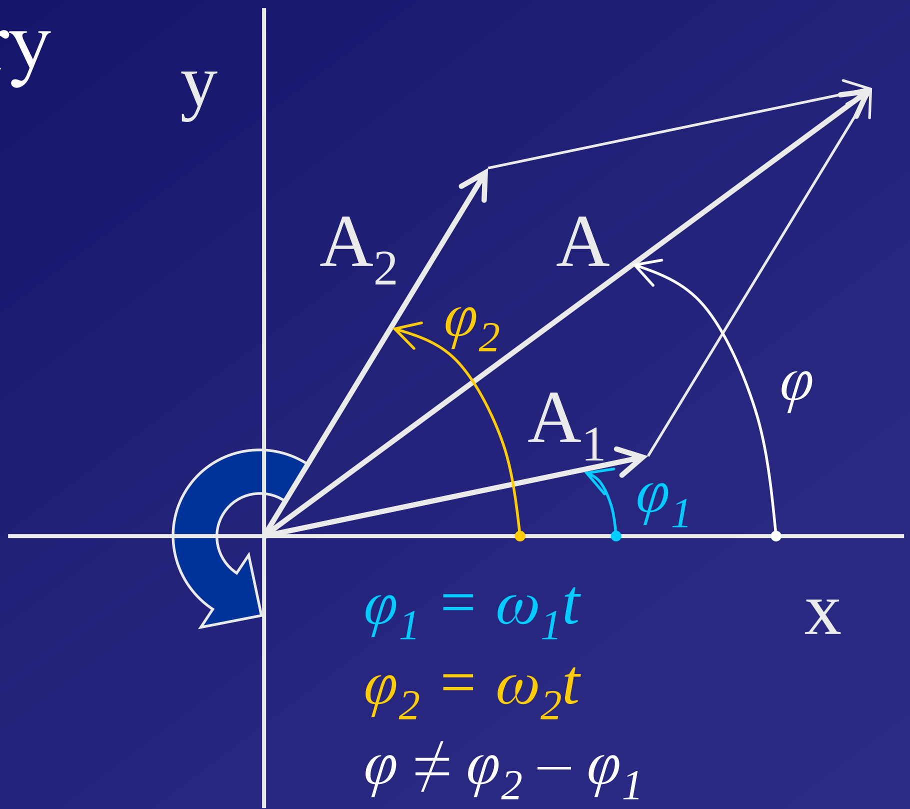
Ladění kytary

VIDEO

Schwebumgen

Skládání kmitů - fázory





$\varphi_1 = \omega_1 t$

$\varphi_2 = \omega_2 t$

$\varphi \neq \varphi_2 - \varphi_1$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)t}$$

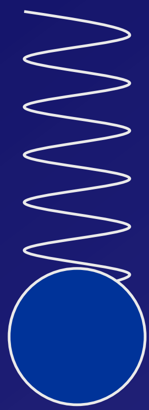
Fázory = vektory rotující v dvou rozměrech kolem počátku,
platí pro ně pravidla vektorové algebry

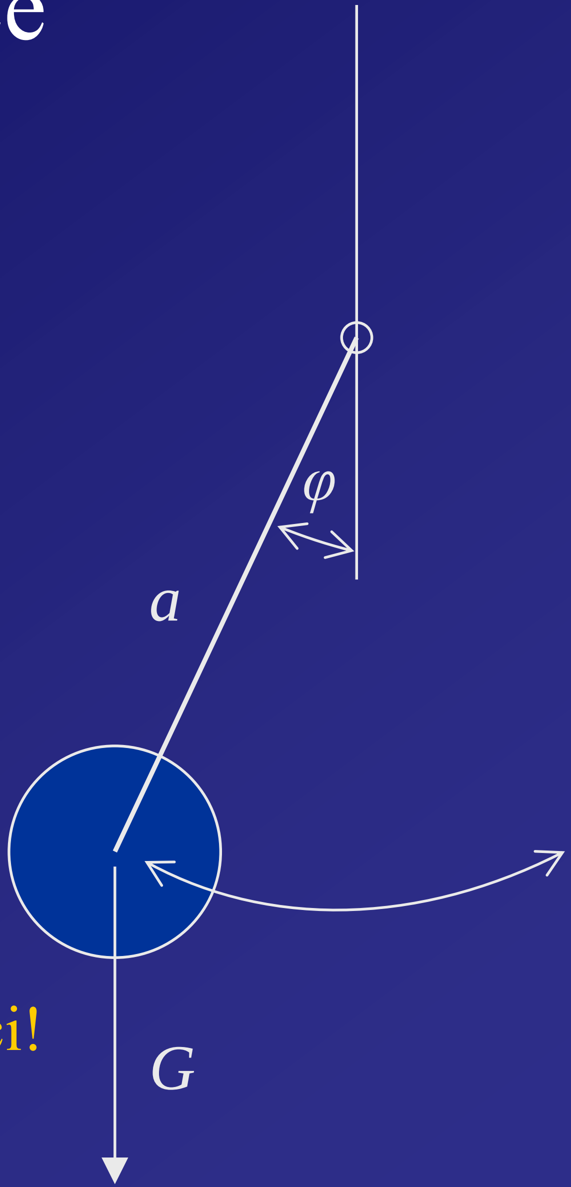
Vlastní frekvence

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{Ga}{I}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$





Každý kmitavý systém má vlastní frekvenci!

To umožňuje jev zvaný rezonance.

Nucené harmonické kmity-rezonance

(neustále působíme vnější silou F)

Pohybová rovnice

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F(t)$$

VIDEO

Federpendel resonanz

Pro sílu $F(t) = F_0 \sin \Omega t$

ω je vlastní frekvence

Ω je frekvence síly

partikulární řešení

(pro dlouhé časy, bez přechodových stavů)

$$x(t) = X_0 \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$X_0 = \frac{F}{m(\omega^2 - \Omega^2)}$$

1. Pro $\Omega \to \omega$ je $X_0 \to \infty$!!! **REZONANCE**
2. Oscilátor kmitá frekvencí Ω, ne ω!

Mosty, rádio, mikrovlnka *versus* *konstrukce bez chvění*

Nucené tlumené harmonické kmity - realita

(neustále působíme vnější silou+brzdnou silou úměrnou *v*)

Pohybová rovnice

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - R\frac{dx}{dt} + F(t)$$

Pro $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ *(ω je vlastní frekvence, Ω je frekvence síly)*

Partikulární řešení (bez přechodových stavů)

$$x(t) = \hat{X}_0 \sin(\Omega t + \varphi) \qquad \hat{X}_0 = \frac{F}{m(\omega^2 - \Omega^2 + iR\Omega)}$$

$$x(t) = X_0 \sin(\Omega t + \varphi + \Delta)$$

VIDEO

Federpendel resonanz

1. $X_0 \not\to \infty$ ani pro $\Omega \to \omega$!!!
2. Oscilátor nekmitá ve fázi s působící silou

Minimum

- Harmonický oscilátor
- Časové závislosti výchylky, rychlosti, zrychlení
- Potenciální, kinetická a celková energie
- Princip superpozice při skládání kmitů, fázory
- Vlastní frekvence
- Nucené harmonické kmity- rezonance