Úvod do gravitace

Hlavní body

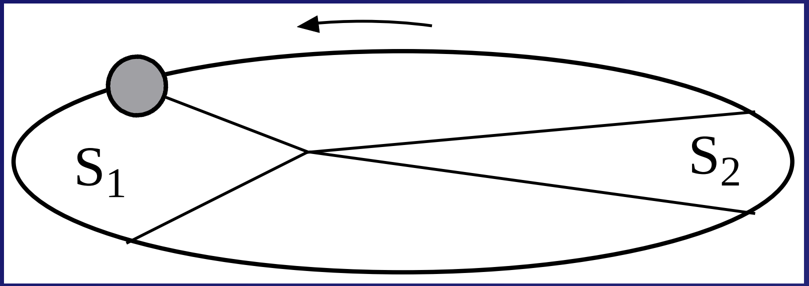
- Keplerovy zákony
- Newtonův gravitační zákon
  - Gravitační pole v blízkosti Země
  - Planetární pohyby
- Konzervativní pole
  - Potenciál a potenciální energie
  - Vztah intenzity a potenciálu

Úvod do gravitace

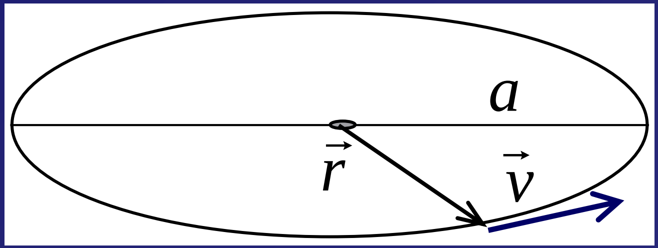
- Setkáváme se s první dalekodosahovou silou, se silou gravitační. Jejím prostřednictvím na sebe hmotné body působí, aniž by byly v přímém vzájemném kontaktu –funkce vakua.
- Na základě gravitačního působení funguje nebeská mechanika.
- Gravitační zákon je zobecněním dlouhodobých astronomických pozorování.
- měření Tycho Braheho (1546-1601) byla shrnuta Johannesem Keplerem (1571-1630) do tří zákonů.

Keplerovy zákony

1. Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách, blízkých kružnicím. Slunce je v jejich společném ohnisku.



2. Při pohybu určité planety je její plošná rychlost konstantní.



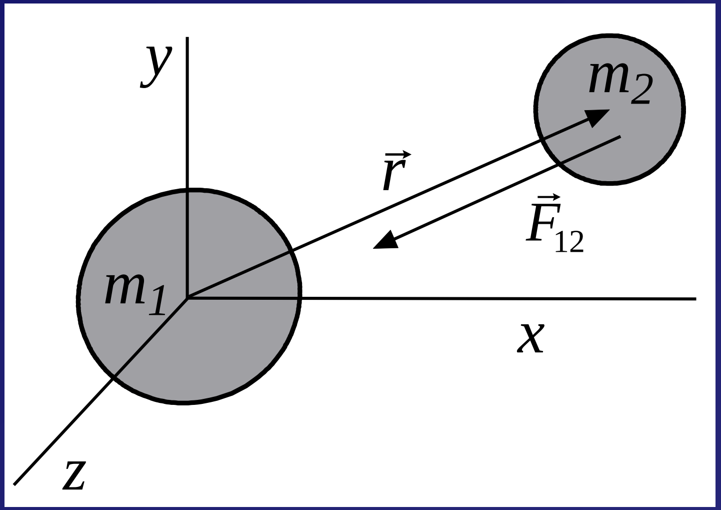
$$\vec{w} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{2}$$

3. Při srovnání drah dvou různých planet :

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Newtonův gravitační zákon

- Keplerovy zákony byly shrnuty do gravitačního zákona Issacem Newtonem : Každé dva hmotné body na sebe působí přitažlivou silou, která působí ve směru jejich spojnice, je přímo úměrná součinu jejich hmotností a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzdálenosti:



$$\vec{F}(\vec{r}) = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \overrightarrow{r_0}$$

- Pro jednoduchost umístíme m_1 do počátku a poloha m_2 bude určena polohovým vektorem r. Potom sílové působení na bod m_2 v důsledku existence bodu m_1 je F_{12}, platí i opačně – zákon akce a reakce.

Newtonův gravitační zákon - poznámky

- Gravitačně na sebe působí libovolné hmotnosti.

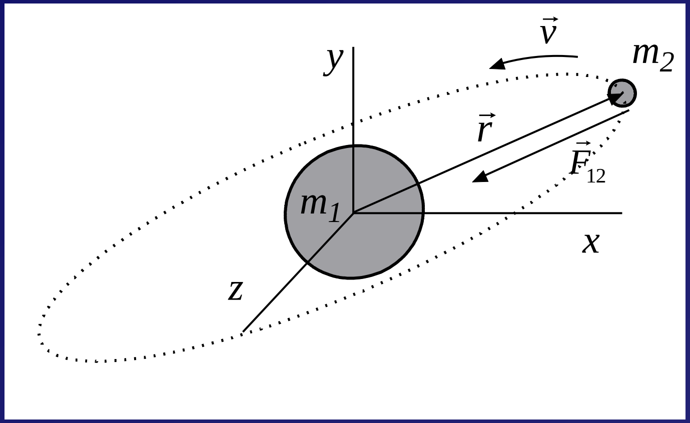
- $\kappa = 6.67\ 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$ … je univerzální gravitační konstanta

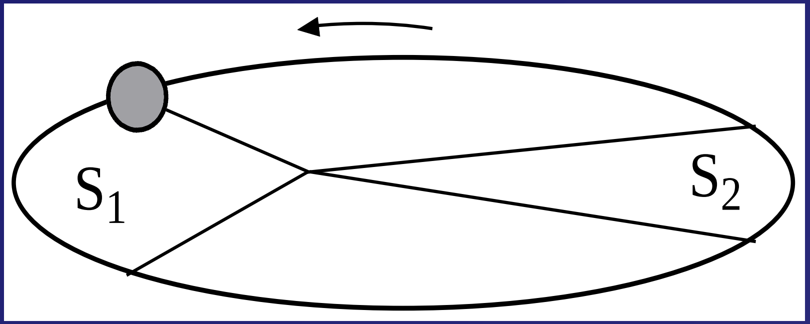
- “-” znamená, že se vždy jedná o přitažlivou sílu

- Při vzájemném působení více hmotných bodů platí princip superpozice ≡ silové působení mezi dvěma hmotnými body nezávisí na rozložení jiných hmotností v jejich okolí, dokonce ani na hmotnosti mezi nimi.

Newtonův gravitační zákon - poznámky

- Plošná rychlost je definována: $$\vec{w} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{2}$$
- je zřejmé, že moment hybnosti : $$\vec{b} = 2m\vec{w}$$





Zachování plošné rychlosti je tedy ekvivalentní zachování momentu hybnosti

Newtonův gravitační zákon - poznámky

- Gravitační pole si představujeme jako informaci, kterou o sobě šíří hmotné body do svého okolí

- nese údaje o jejich velikosti a poloze

- šíří se rychlostí světla - ve vakuu

- na tuto informaci reagují jiné zdroje stejného typu pole = hmotnosti tím, že na ně působí síla

Gravitace – polní popis

Intenzita pole E

- Gravitační pole je pole vektorové. Mohli bychom ho plně charakterizovat, v každém bodě třemi složkami síly $\vec{F}_m$, která působí na nějakou testovací hmotnost m.
- Výhodnější je tuto sílu podělit testovací hmotností, čímž získáme intenzitu $\vec{E}$, která na ní již nezávisí a je tedy jednoznačnou vlastností pole.

Intenzita gravitačního pole *E*

$$\overrightarrow{E_1}(\vec{r}) = \frac{\overrightarrow{F_{12}}}{m_2} = -\kappa \frac{m_1}{r^2}\overrightarrow{r_0}$$

- Intenzitu chápeme jako sílu, která by v daném bodě působila na jednotkovou hmotnost.
- Je to vlastnost “pole“ a není vázána na testovací těleso
- Srovnej s gravitačním zrychlením g

Intenzita gravitační pole v blízkosti Země

- Gravitační pole v těsné blízkosti Země lze charakterizovat intenzitou. Její velikost nazýváme gravitačním zrychlením.

$$\overrightarrow{E_1}(\vec{r}) = -\kappa \frac{M}{r^2}\overrightarrow{r_0} = -a_g\overrightarrow{r_0}$$

- Po korekcích gravitačního zrychlení $a_g = 9.83\ ms^{-2}$ na různé vlivy, zvláště rotaci Země, dostáváme měřitelné tíhové zrychlení. Jeho střední hodnota je $g = 9.81\ ms^{-2}$.

Pohyb satelitů I

- Obecně se tělesa otáčejí kolem společného těžiště.
- Je-li satelit podstatně lehčí než centrální těleso lze společné těžiště ztotožnit s těžištěm centrálního tělesa.
- Uvažujme pro jednoduchost kruhovou dráhu. V prvním přiblížení je dostředivá síla je realizována gravitační a platí :

$$F_{OD} = F_G$$

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{\kappa m M}{r^2}$$

Pohyb satelitů II

- Ze vztahu můžeme například vyjádřit rychlost oběhu :

$$v = \sqrt{\frac{\kappa M}{r}}$$

- Jsou-li hmotnosti těles srovnatelné, musí se uvažovat pohyb kolem jejich skutečného těžiště. Čili se pohybuje i “centrální“ těleso.
- Takto lze vysvětlit příliv a odliv nebo odhalit větší planety u vzdálených hvězd.

Konzervativní pole

- Gravitační pole se řadí mezi takzvaná pole konzervativní.
  - Celková práce potřebná na přenesení hmotnosti po libovolné uzavřené dráze je nulová.
  - Práce potřebná na přenesení hmotnosti m z bodu A do bodu B nezávisí na cestě, ale jenom na nějaké skalární vlastnosti v těchto bodech = potenciálu φ.

$$W(A\text{->}B) = m\varphi(B) - m\varphi(A)$$

Práce v gravitačním poli – potenciální energie

- Spočítejme práci, kterou musíme dodat pro přemístění hmotnosti m z r_A do r_B v gravitačním poli jiné hmotnosti M.
- Závisí jen na vzdálenostech od tělesa a práci musíme dodat při zvětšení r, protože působíme proti přitažlivé síle.

dr je vždy rovnoběžné s *F* !

$$W = m\int_A^B \frac{\kappa M}{r^2}dr = -\kappa m M\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = E_P$$

Vykonaná práce se rovná změně potenciální energie

Práce v gravitačním poli – potenciální energie

$$W = m\int_A^B \frac{\kappa M}{r^2}dr = -\kappa m M\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = E_P$$

- Potenciální energii / práci musíme vztáhnout na určitou pozici r_A nejčastěji k povrchu Země, popř. k nekonečnu, potom

$$E_P(r) = -\frac{\kappa m M}{r} + c$$

- Potenciální energii v blízkosti povrchu Země,

$$E_P(h) = mgh$$

Potenciál gravitačního pole φ

Potenciál = potenciální energie vztažená na hmotnost *m*

$$\varphi = \frac{E_P}{m} = \int_A^B \frac{\kappa M}{r^2} dr = -\kappa M \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

- Také potenciál musíme vztáhnout na určitou pozici r_A *(povrch Země)* ,nejčastěji ale k $r_A = \infty$, potom

$$\varphi(r) = -\frac{\kappa M}{r} = \left(\frac{W = E_P}{m} \right)_{v\ daném\ místě}$$

Absolutní potenciál v daném místě =
potenciální energie v daném místě 1 kg vztažená vůči místu v nekonečnu

Potenciální energie gravitačního pole

- Je třeba chápat rozdíl mezi potenciálem, což je vlastnost pole a potenciální energií, což je vlastnost určitého hmotného tělesa v tomto poli.

- Výhody popisu pole pomocí potenciálu :
  - Skalární
  - Princip superpozice vede na aritmetické sčítání

Vztah potenciálu a intenzity

- Pohodlnější je popisovat gravitační pole pomocí potenciálu, ale na jeho základě je nutné umět vypočítat intenzitu, popř. sílu :

$$\varphi(\vec{r}\,) = \frac{W}{m} = \frac{1}{m}\int_{r_A}^{r_B} -\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} -\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$d\varphi(\vec{r}\,)) = -\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = -\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$grad\,\varphi\cdot d\vec{r} = -\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$\vec{E} = -grad\,\varphi$$

$$\vec{E}(r\,) = -\frac{d\varphi(\vec{r}\,)}{d\vec{r}}$$

Intenzita gravitačního pole je rovna gradientu potenciálu (záporně).

Tento vztah spojuje skalární pole φ s vektorovým polem E

Gradient

- Gradient skalární funkce je vektor, který má
  1. směr největšího růstu funkce v daném bodě
  2. velikost danou přírůstkem funkce v jednotkové vzdálenosti od daného bodu v tomto směru :

$$grad(\varphi(\vec{r})) \equiv \left(\frac{d\varphi}{dx};\frac{d\varphi}{dy};\frac{d\varphi}{dz}\right)_{\vec{r}}$$

- Gradient je trojrozměrnou obdobou diferenciálu :

$$\varphi(\vec{r}+d\vec{l}) = \varphi(\vec{r}) + d\vec{l}.grad(\varphi(\vec{r}))$$

- Význam gradientu vyplývá z faktu, že skalární součin bude maximální, když jsou jeho činitelé $d\vec{l}$ a $grad(\varphi(\vec{r}))$ paralelní.

Proč shořela Columbie? Zákon zachování energie

$$\Delta W = \Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p$$

Je-li práce dodaná do systému nulová zachovává se součet kinetické a potenciální energie.

Celková energie satelitu :

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\kappa mM}{r} = konst.$$

Když satelit vstupuje do atmosféry a je bržděn atmosférou nebo svými motory, klesá jeho výška , ale roste rychlost. Musí tedy, v určité fázi letu, například než může letět jako letadlo nebo být bržděno padáky, vydržet obrovské teploty.