Mechanika – dynamika

Hlavní body

- Úvod do dynamiky.
- Dynamika translačních pohybů
- Dynamika rotačních pohybů

Úvod do dynamiky

- Mechanika by byla neúplná, kdyby se nezabývala, důvody proč se tělesa dávají do pohybu, zrychlují, zpomalují nebo se zakřivuje jejich dráha.
- Ukazuje se, že pohybují-li se se zrychlením, musí na ně působit nějaká síla.
- Dojít k tomuto jednoduchému závěru bylo obtížné, protože síly nemusí být patrné a mohou působit na dálku.

Dynamika translačních pohybů

Hybnost

- Pohybový stav hmotného bodu lze popsat vektorem hybnosti definovaným jako:

$$\vec{p} = m \,.\, \vec{v}$$

- Význam hybnosti spočívá ve skutečnosti, že se zachovává, když je výslednice působících sil nulová a mění, když není, což může být například důsledkem interakce s jinými hmotnými body.

Newtonovy zákony

- Isaac Newton (1642-1727) geniálně shrnul poznatky klasické dynamiky do tří zákonů.
  1. Zákonu setrvačnosti/zachování hybnosti
  2. Zákonu síly
  3. Zákonu akce a reakce
- Jejich modifikace je nutná až za hranicemi klasické mechaniky.

1. Zákon setrvačnosti

- Nepůsobí-li na hmotný bod síla, pohybuje se rovnoměrně přímočaře nebo je v klidu.
- Přesněji: je-li síla působící na hmotný bod nulová, je jeho hybnost konstantní.
  - Silou se zde a dále obecně rozumí výslednice všech působících sil.
  - V této formulaci jsou zahrnuty i speciální pohyby, kde se mění hmotnost, jako raketový.

2. Zákon síly

- Síla působící na hmotný bod je rovna časové změně jeho hybnosti.

$$\vec{F} = \frac{d\,\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

- Za předpokladu, že hmotnost zůstává konstantní platí jednodušší formulace :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$ Pohybová rovnice translace

- Jednotkou síly je *1* newton : $N = kg\ m\ s^{-2}$
- Předchozí vztahy jsou vektorové. Platí tedy i ve složkách. Například:

$$\vec{F}_x = \frac{d\,\vec{p}_x}{dt} = \frac{d(m\vec{v}_x)}{dt}$$

3. Zákon akce a reakce

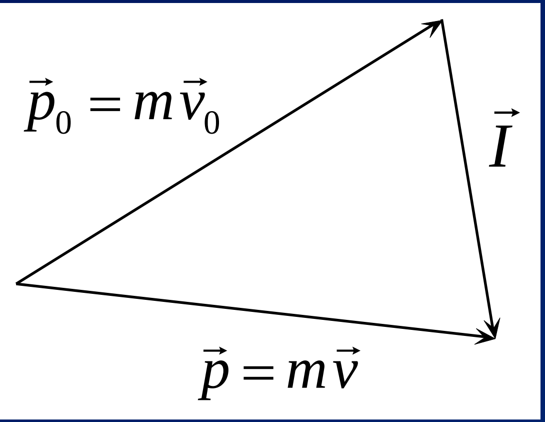
- Působí-li těleso *1* na těleso *2* silou $\vec{F}_{12}$,
- působí i těleso *2* na těleso *1* silou $\vec{F}_{21}$.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

- Obě síly jsou stejně velké, ale opačně orientované: .
- Každá působí na jiné těleso a proto se tyto síly nemohou spolu složit.

Časový účinek síly-impuls síly

- Impuls síly na volné těleso:



$$\vec{I} = \vec{F} \cdot t \qquad F = konst.$$

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F} \cdot dt \quad = \int_0^t m \cdot \vec{a} \cdot dt \quad = \int_0^t m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot dt \quad = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} m \cdot d\vec{v}$$

$$\vec{I} = m \cdot \vec{v} - m \cdot \vec{v}_0 = \vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{F}\Delta t$$

Změna hybnosti se rovná impulsu síly.

$$F\,.\,dt = m\,.\,dv$$

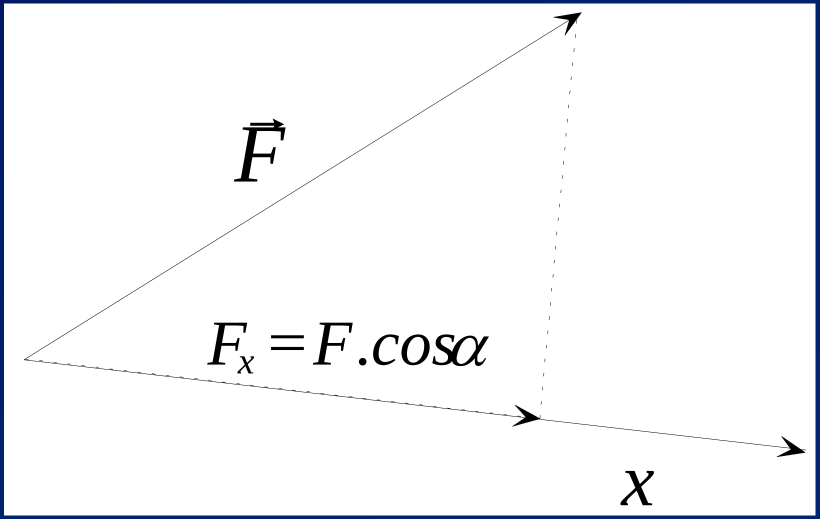
RAKETA: Využívá se zákona zachování hybnosti Δp (výtokových plynů) = Δp (rakety)
U rakety se nemění tah motoru, pokud se nemění množství a výtoková rychlost plynů (vůči raketě).

Dráhový účinek síly- práce

$$W = \vec{F}.\vec{r}$$

- Pro jednoduchost předpokládejme konstantní sílu a hmotnost a přímý pohyb v jednom rozměru – podél x.

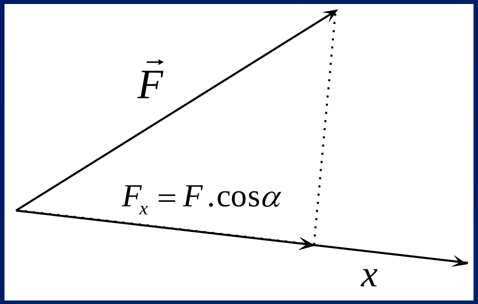
$$W = \vec{F}.x$$
$$= F.\,x\,.\,cos\alpha$$
$$= F_x\,.\,x$$



- Hledáme průmět do směru pohybu! = skalární součin

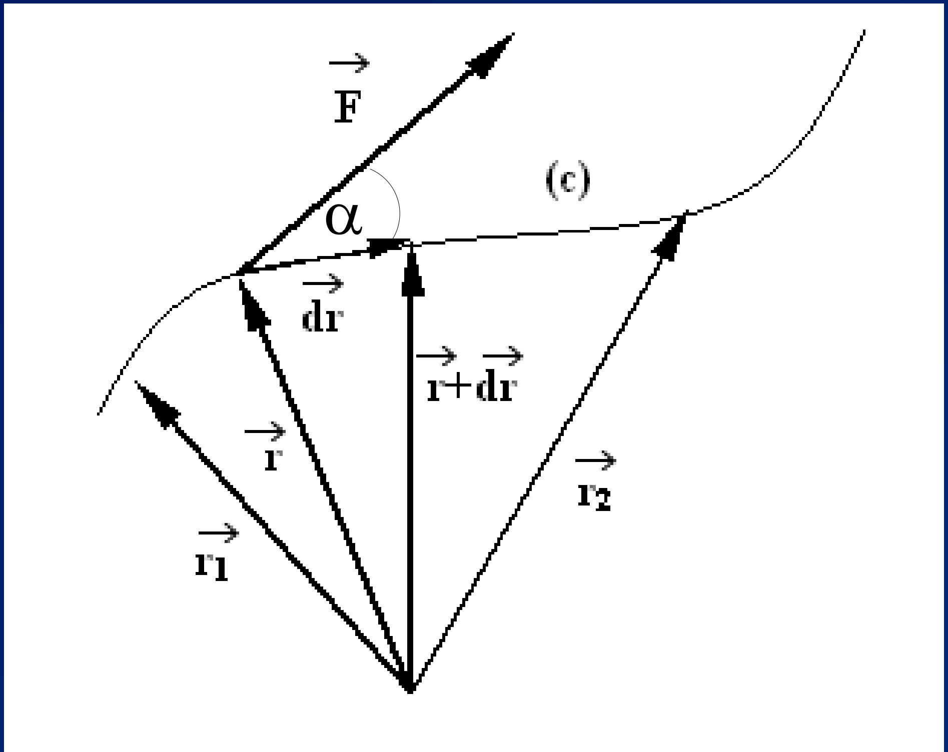
Dráhový účinek síly- práce

Pro obecný pohyb popř. proměnnou sílu :



$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$[J]$$



Výkon

- Výkon = práce za čas: $P = \dfrac{dW}{dt} \quad [W]$
- Nyní dosadíme :

$$W = \int_{t_0}^{t} P.dt$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \boxed{\vec{F} \cdot \vec{v}} = F.v.\cos\alpha$$

Výkon = síla krát rychlost pohybu ve směru, ve kterém síla působí

Práce – kinetická energie

Něco koná práci

$$dW = \vec{F}\cdot d\,\vec{r} = m.\vec{a}.d\,\vec{r} = m\cdot\frac{d\,\vec{v}}{dt}\cdot d\,\vec{r}$$

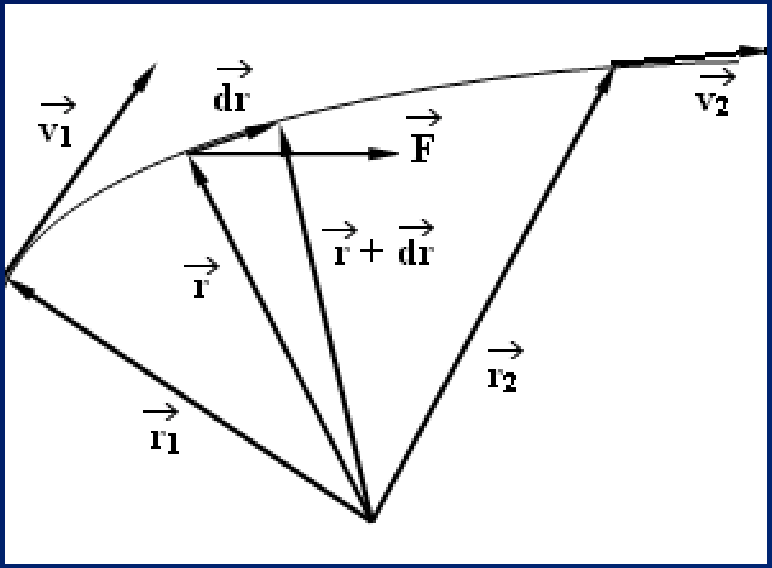
$\vec{v}.d\,\vec{v} = |\vec{v}|.|d\,\vec{v}|.\cos\alpha = v.dv$

$|d\,\vec{v}|.\cos\alpha$ = Průmět dv do *v* = *změna velikosti v*

$$m\cdot\frac{d\,\vec{r}}{dt}\cdot d\,\vec{v} = m.\vec{v}.d\,\vec{v}$$

$$W = \int_{v_1}^{v_2} m.v.d\,v =$$

$$\frac{1}{2}m.\left(v_2^2 - v_1^2\right) = \Delta E_k$$



Těleso vlastní kinetickou energii

Vykonaná práce = přírůstku kinetické energie

Základní zákony zachování

- Z předchozího je zřejmé, že nepůsobí-li síla, zachovává hmotný bod nebo jejich soustava svoji:

hybnost

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Vždy, i při dokonale nepružné srážce

kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2} m . v^2$$

jen při dokonale pružné srážce

Dokonale nepružná srážka

2 tělesa
před srážkou

$$\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1 \qquad \vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$$

2 tělesa
po srážce

$$\vec{p}_v = (m_1 + m_2)\vec{v}_v = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

Po srážce se pohybují obě tělesa spolu a stejnou rychlostí v_v !!!

$$E_{pred} = \frac{1}{2}m_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2{}^2 \quad \neq \quad E_{po} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_v{}^2$$

Kinetická energie před se nerovná kinetické energii po srážce !!!

Příklad

Dokonale pružná srážka

2 tělesa
před srážkou

$$\vec{p}_{1pr} = m_1\vec{v}_{1pr} \qquad \vec{p}_{2pr} = m_2\vec{v}_{2pr}$$

2 tělesa
po srážce

$$\vec{p}_{1po} = m_1\vec{v}_{1po} \qquad \vec{p}_{2po} = m_2\vec{v}_{2po}$$

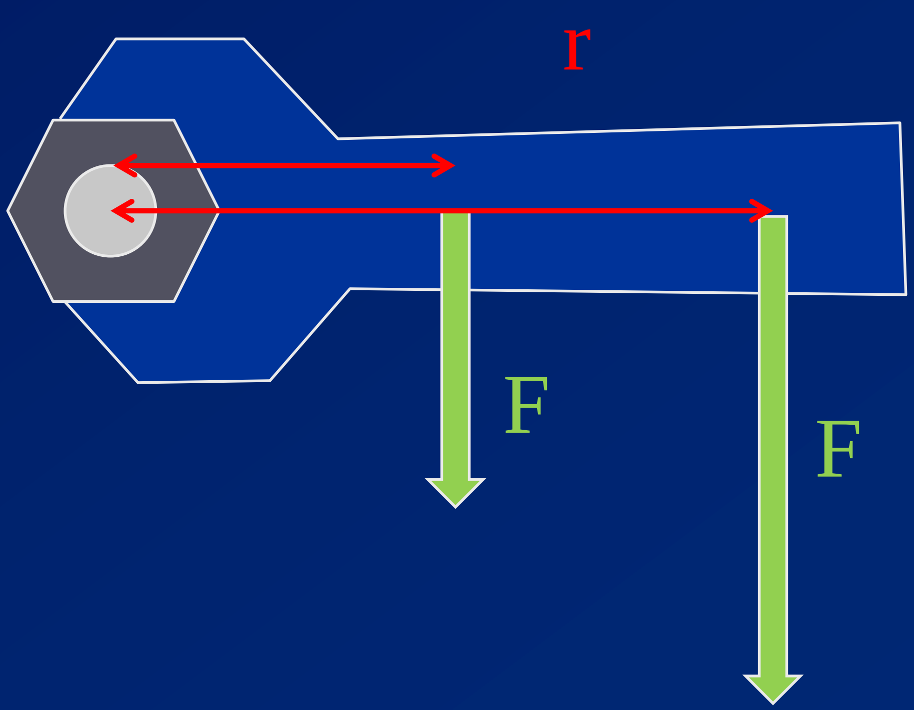
Kinetická energie před se rovná kinetické energii po srážce !!!

$$E_{pred} = \frac{1}{2}m_1 v_{1pr}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2pr}^2 \quad = \quad E_{po} = \frac{1}{2}m_1 v_{1po}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2po}^2$$

Dynamika rotačních pohybů

- Síla je základadem uvádění těles i do rotačních pohybů, ale v tomto případě je důležité i jakým způsobem působí.

Pokud utahujeme klíčem matici, nezáleží její utažení pouze na použité síle F, ale také na vzdálenosti *r*, ve které uchopíme klíč vzhledem k ose otáčení



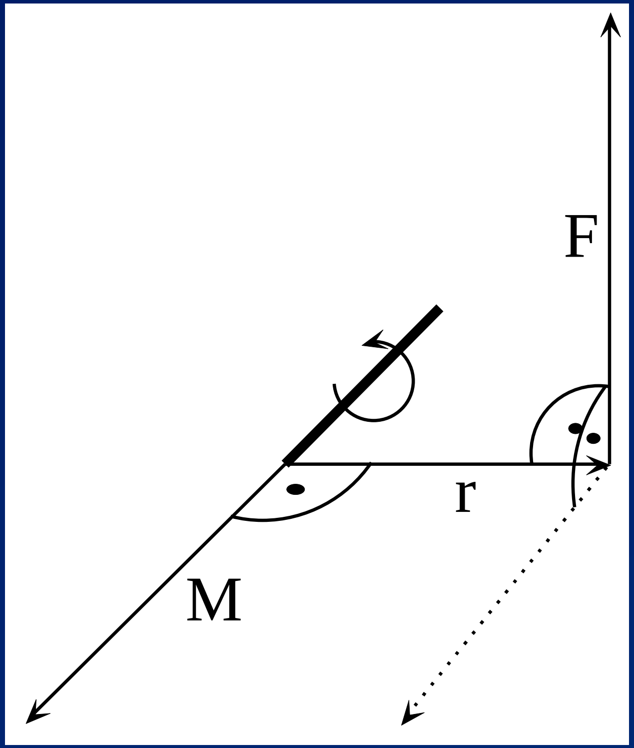
Moment síly *M*

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad [Nm]$$

- Je patrné, že pro otáčivý účinek síly je kromě její velikosti rozhodující i její vzdálenost od osy otáčení a její směr vzhledem ke směru působiště – osa.

- Tyto vlastnosti popisuje moment síly

  počátek je v průsečíku osy a roviny otáčení.



Moment síly *M* - moment hybnosti *b*

- Předpokládejme konstantní moment síly. Potom s použitím druhého Newtonova zákona můžeme psát :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p}_{HB})}{dt} = \frac{d\vec{b}_{HB}}{dt}$$

- Moment síly je tedy roven časové změně momentu hybnosti b_{HB} Hmotného Bodu.
- Toto je nejobecnější formulace druhého Newtonova zákona pro rotaci.

$$\vec{M} = \frac{d\,\vec{b}}{dt} \qquad \text{Srovnej s} \qquad \vec{F} = \frac{d\,\vec{p}}{dt}$$

b je konstantní když $\Sigma M = 0$

Zákon zachování momentu hybnosti !!!

Moment hybnosti *b* - moment setrvačnosti *I*

Zavádíme novou veličinu *I* = moment setrvačnosti

$$d\vec{b}_i = \vec{r}_i \times d\vec{p}_i$$

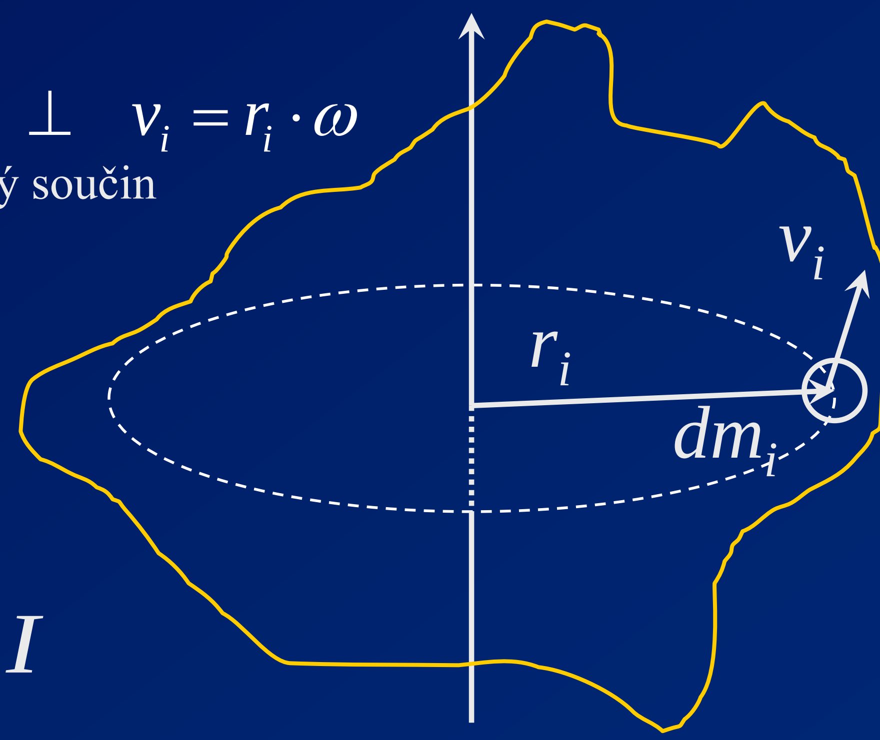
Podmínka $\perp$ $v_i = r_i \cdot \omega$

nebo dvojný součin vektorů

$$d\vec{b}_i = \vec{r}_i \times dm_i \cdot \vec{v}_i$$

$$d\vec{b}_i = r_i^{\,2} \cdot \vec{\omega} \cdot dm_i$$

$$\vec{b} = \vec{\omega} \cdot \int_m r_i^{\,2} dm_i \quad = \vec{\omega} \cdot I$$



$$d\vec{b}_i = r_i \times v_i \cdot dm_i$$

Hybnost i-tého elementu tělesa

$$\vec{b} = I \cdot \vec{\omega}$$

Srovnej s

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Pohybová rovnice rotace

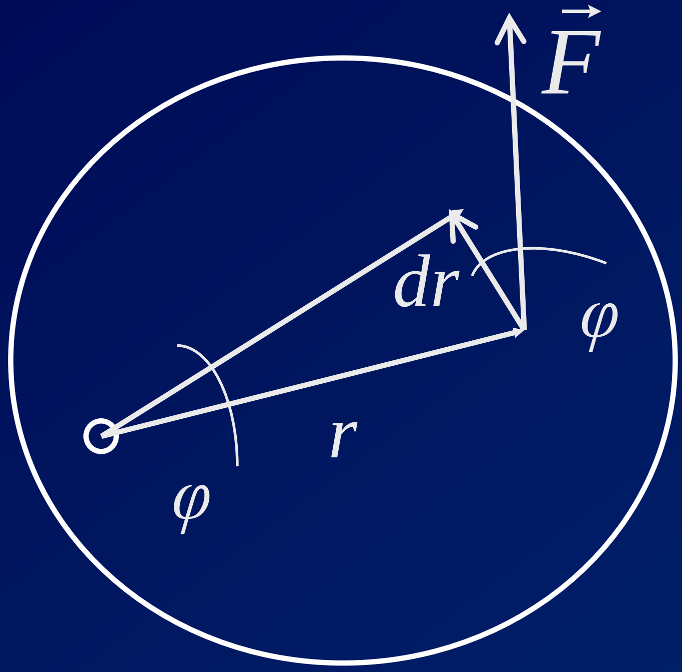
$$\vec{b} = \vec{\omega} \cdot I \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d\left(\vec{\omega} \cdot I\right)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = I \frac{d\left(\vec{\omega}\right)}{dt}$$

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon} \quad \Leftarrow \quad \vec{M} = I \frac{d\left(\vec{\omega}\right)}{dt} = I \cdot \vec{\varepsilon}$$

Srovnej s $\vec{F} = m\vec{a}$

Práce při otáčivém pohybu



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$dW = \vec{F} . \left(d\vec{\varphi} \times \vec{r} \right) = d\vec{\varphi} . \left(\vec{r} \times \vec{F} \right)$$

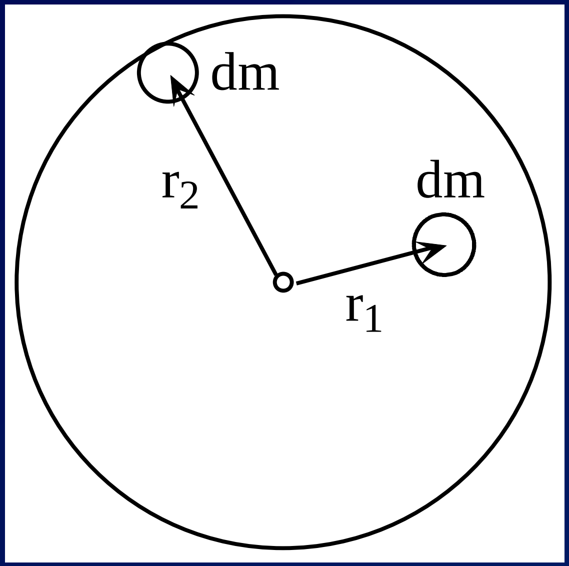
$$dW = \vec{M} . d\vec{\varphi}$$

Práce: $$W = \int \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Výkon: $$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{M} \cdot d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{\omega} \qquad P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Kinetická energie rotačního pohybu - moment setrvačnosti



$$dE_K = \frac{1}{2} dm\, v^2 \qquad v = r \cdot \omega$$

$$dE_K = \frac{1}{2} r^2 \omega^2 dm$$

$$E_K = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad I = \int_m r^2 \cdot dm_i$$

$$\mathrm{I} = \mathrm{dm} \cdot \mathrm{r}_1^2 + \mathrm{dm} \cdot \mathrm{r}_2^2 \ldots$$

$$I = \int_m r^2 \cdot dm_i$$

Moment setrvačnosti I nahrazuje hmotnost m v rotačním pohybu

Příklad

Analogie dynamiky rotace a translace

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$$

Srovnej s

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$E_{KR} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

$$E_{KT} = \frac{1}{2} m \,.v^2$$

$$\vec{b} = I \cdot \vec{\omega}$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$W = \int \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Podobně jako je a vazbou dynamiky na kinematiku translačního pohybu, je ε vazbou dynamiky na kinematiku pohybu rotačního

Hmotný střed – těžiště
Rozklad translačního a rotačního pohybu

- Soustavu těles lze reprezentovat těžištěm, přesněji hmotným středem , $\vec{r}_t$ ve kterém je z hlediska dynamiky translace soustředěna celá hmotnost soustavy
- Získáme ho sumací popř. integrací rovnice:

$$\vec{r}_t = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\int_m dm_i \vec{r}_i}{\int_m dm_i} \qquad \sum_i m_i = \int_m dm = m$$

Příklad

Souřadnice těžiště se samozřejmě počítají ve složkách:

$$x_t = \frac{1}{m}\sum_i m_i x_i \qquad y_t = \frac{1}{m}\sum_i m_i y_i \qquad z_t = \frac{1}{m}\sum_i m_i z_i$$

Steinerova věta – moment setrvačnosti

- U tuhých těles lze výhodně popsat rozložení hmotnosti pomocí momentu setrvačnosti :

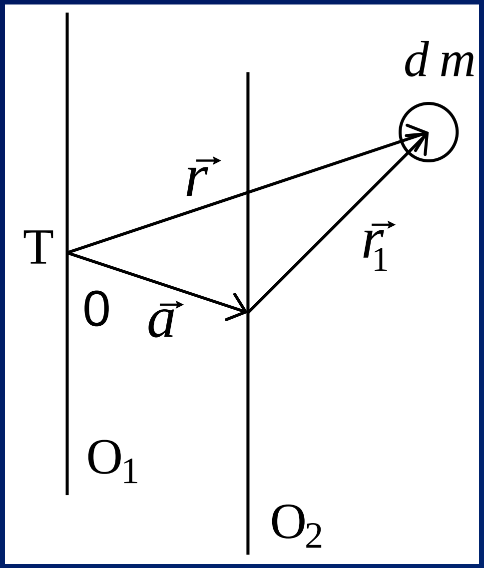
  $I = \Sigma m_i r^2_i$

- Z vlastnosti těžiště plyne Steinerova věta :

$$I_a = I_t + ma^2$$

- kde I_a je moment setrvačnosti vůči ose, vzdálené a od těžiště a I_t je m.s. vůči ose procházející těžištěm, která je s ní paralelní

Steinerova věta - důkaz



- U tuhých těles popisujeme rozložení hmotnosti pomocí momentu setrvačnosti :

$$I(O_1) = \int_m r^2 dm$$ Vůči ose procházející těžištěm

$$I(O_2) = \int_m r_1^2 dm = \int_m (\vec{r} - \vec{a}).(\vec{r} - \vec{a}) dm =$$

$$\int_m r^2 dm - 2\vec{a}\int_m \vec{r}.dm + \int_m a^2 dm \quad = \int_m r^2 dm + a^2 m \quad = I(O_1) + a^2 m$$

Vůči nové paralelní ose

Steinerova věta plyne z vlastnosti těžiště

Pro těžiště platí: $$\int_m r_t \, dm = 0 \; !$$

Příklad