Mechanika - kinematika

Hlavní body

- Úvod do mechaniky, kinematika hmotného bodu
- Pohyb přímočarý
  - rovnoměrný
  - rovnoměrně zrychlený.
- Pohyb křivočarý. Pohyb po kružnici
  - rovnoměrný
  - rovnoměrně zrychlený
- Pohyb v prostoru. Vrhy.

Úvod do mechaniky

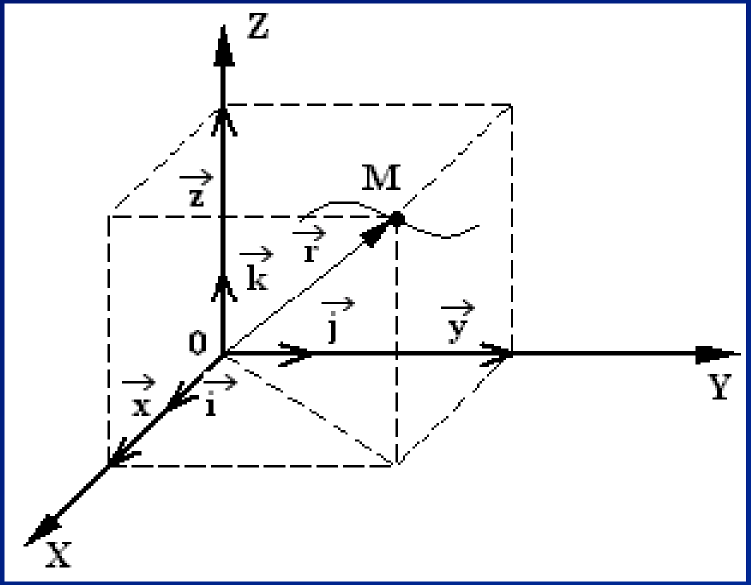
- Budeme se zabývat klasickou mechanikou.
  - Studované objekty jsou nadmolekulárních velikostí a
  - Pohybují se rychlostmi mnohem menšími než c.
- Kinematika se zabývá pouze popisem pohybu a nepátrá po jejich příčinách
- Dynamika se zabývá pohybem včetně příčin a zachováním veličin.
- Hmotný bod má nenulovou hmotnost a zanedbatelné geometrické rozměry.

Kinematika I

Poloha

- hmotného bodu M je určena polohovým vektorem $\vec{r} = (x, y, z) \quad [m]$

$\Delta r \neq \Delta s \qquad d\vec{r} = ds$

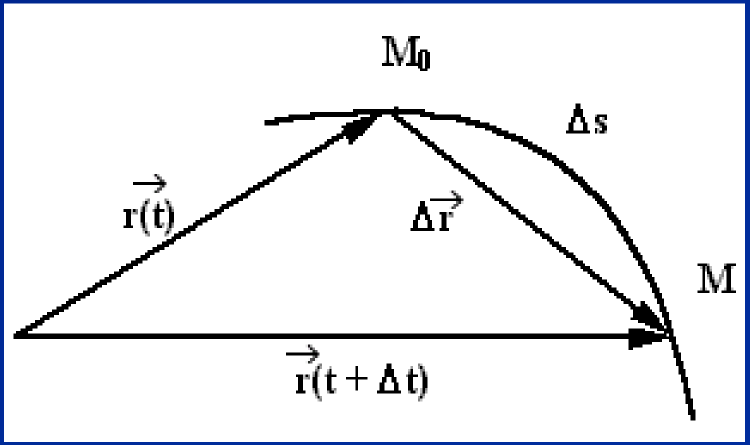


→ obecně dráha ≠ změna polohového vektoru

Rychlost

- Okamžitá rychlost $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$

např. $v_x = dx/dt$.
Má směr tečný k dráze v daném okamžiku.



To, že ujedeme stejnou dráhu za stejný čas není zárukou stejné okamžité rychlosti v průběhu tohoto pohybu

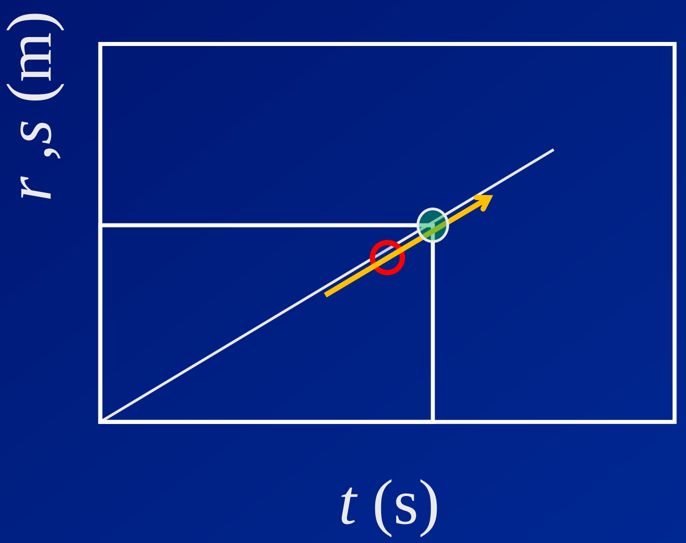
- Průměrná rychlost

$$\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{\text{celková dráha}}{\text{celkový čas}}$$

Okamžitá rychlost

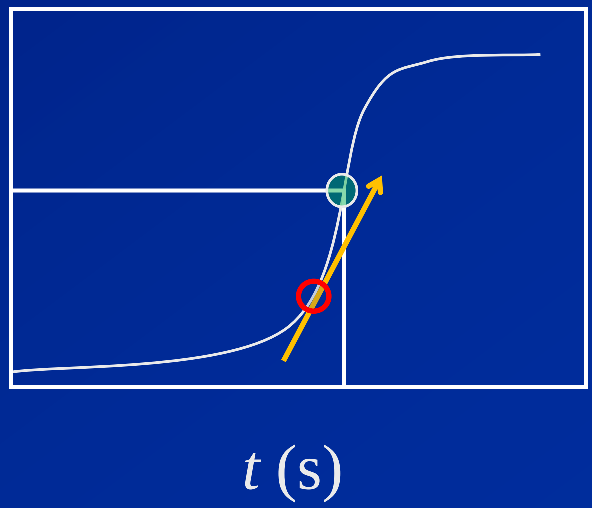
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \left[m\,s^{-1}\right]$$

- Obecně se v průběhu pohybu mění velikost (i směr).



$$v = \bar{v}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$



$$v \neq \bar{v}$$

$$\frac{dr}{dt} \neq \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Zrychlení

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad \left[m s^{-2}\right] \qquad (a_x = d^2x/dt^2)$$

- Je to “růst rychlosti s časem”.

- Ačkoli jde o běžný vektor, je účelné (pro plošné pohyby a především pro pohyb kruhový) rozložit zrychlení vzhledem ke směru rychlosti obecného pohybu na tečné a normálové (orientace vůči pohybu, nikoliv vůči souřadnému systému)

velikost . směr

Budiž $\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}_0$, potom

$$\vec{a} = \frac{d\left(v \cdot \vec{\tau}_0\right)}{dt} = \vec{\tau}_0 \cdot \frac{dv}{dt} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}_0}{dt} = \vec{\tau}_0 \cdot \frac{dv}{dt} + \vec{n}_0 \cdot \frac{v^2}{r} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Zrychlení normálové (dostředivé)

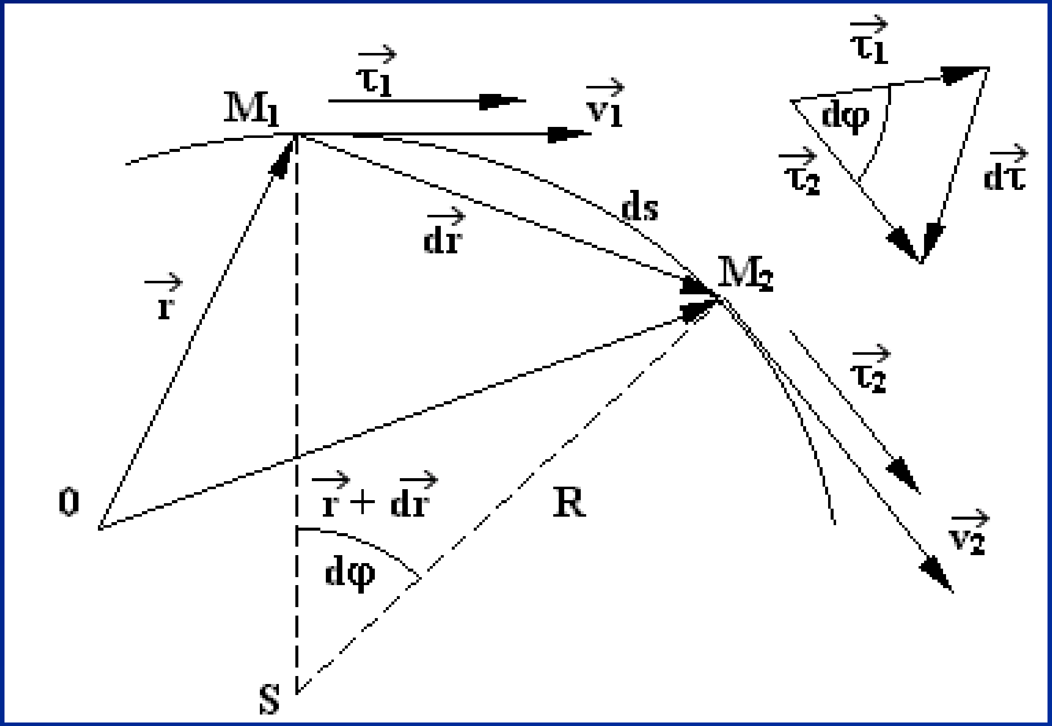
$$\vec{a}_n = v \cdot \frac{d\vec{\tau}_0}{dt} = v \cdot \frac{d\vec{\tau}_0}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v^2 \cdot \frac{d\tau_0}{ds} = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n}_0 \qquad = \vec{a}_d$$

Směr dává normála,
velikost dává úhel

$$d\vec{\tau}_0 = \vec{n}_0 \cdot d\varphi$$

$$ds = R \cdot d\varphi$$

Definice radiánu !



Pohyb přímočarý - rovnoměrný

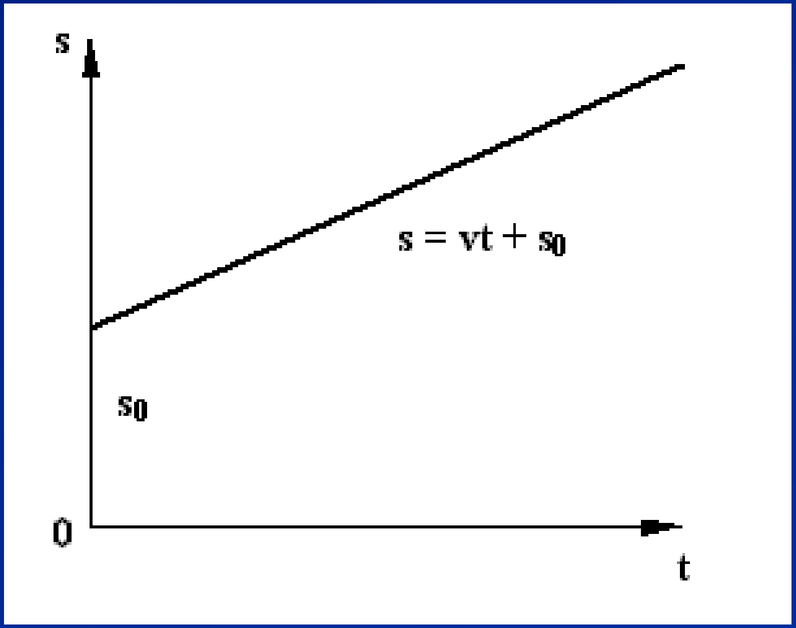
- Zavedeme-li souřadnou soustavu tak, aby se jedna osa (např. x = s) ztotožňovala se směrem pohybu, potom vystačíme se "skalární" rychlostí $v = v_x$ a se "skalárním" zrychlením a.

Zůstává však orientace (+/-).

Pohyb rovnoměrný přímočarý $\boldsymbol{v(t) = v_0} \Leftrightarrow \boldsymbol{a = 0}$.

$v = dx/dt \Rightarrow x(t) = x_0 + v\,t$

kde $x_0 = x(t=0)$ je integrační konstanta - počáteční podmínky.



Pohyb přímočarý – rovnoměrně zrychlený

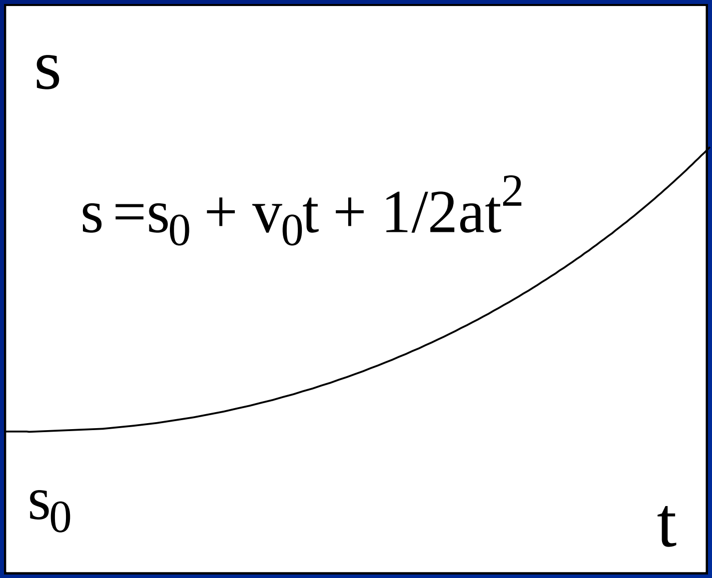
$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t = konst.$

$a = dv/dt \Rightarrow v(t) = v_0 + a\,t$,

kde $v_0 = v(t=0)$ je opět integrační konstanta

$x(t) = x_0 + v_0 t + a\,t^2/2$.

Po druhé integraci přibyla další integrační konstanta. Počáteční podmínky jsou určeny dvěma parametry x_0 a v_0.



-Rychlost roste s časem lineárně

-Dráha roste s časem kvadraticky

- Kdy se jedná o rovnoměrný pohyb zrychlený a kdy o pohyb zpomalený?
- Závisí na zrychlení a i na počáteční rychlosti v_0!
- Je-li $v > 0$ znamená

  $a > 0$ pohyb zrychlený

  $a < 0$ pohyb zpomalený
- Ale je-li $v_0 < 0$ je tomu naopak - *zvolená orientace*

  $a > 0$ pohyb zpomalený

  $a < 0$ pohyb zrychlený

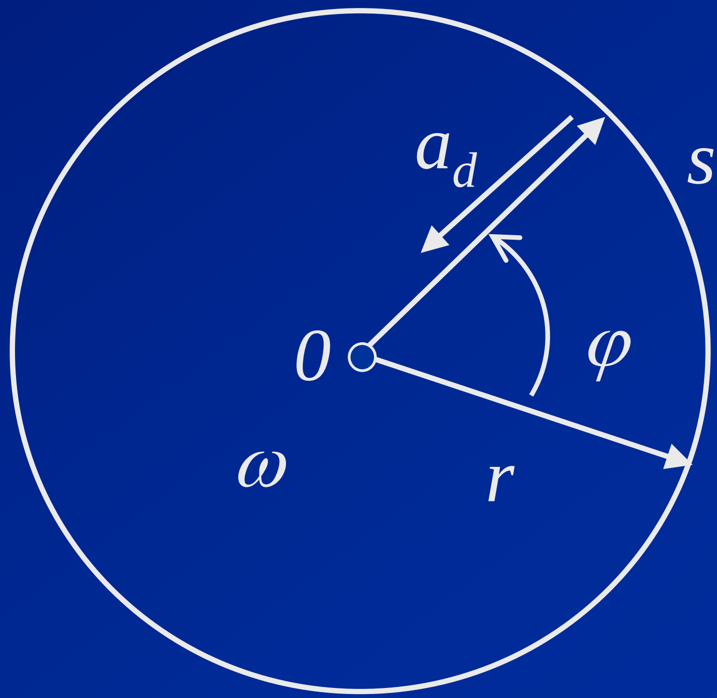
Pohyb křivočarý

- Normálová složka zrychlení a_n musí být obecně alespoň někde/někdy nenulová a poloměr křivosti r se může měnit.
- Speciální případ je pohyb po kružnici. Odehrává se v jedné rovině a poloměr křivosti r je konstantní. $\Rightarrow$

Umožňuje analytické vyjádření časových závislostí sledovaných veličin

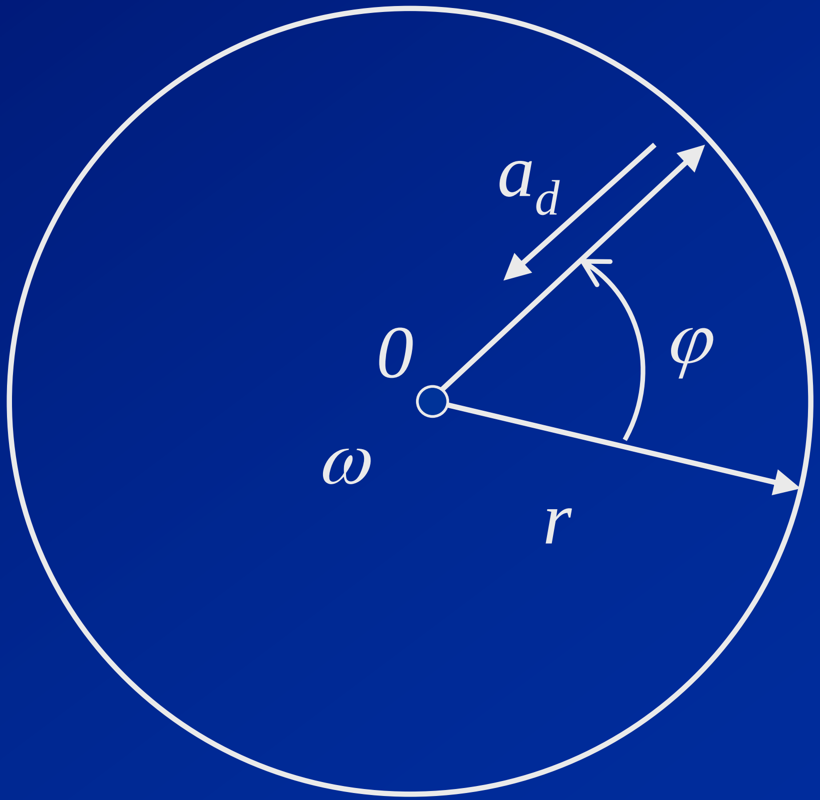
Pohyb po kružnici I - rovnoměrný

- Vzhledem k periodičnosti pohybu používáme úhlové veličiny:
  - ds = $r\, d\varphi$
  - $v = ds/dt = r\, d\varphi/dt = r\, \omega$
  - $\omega = d\varphi/dt = 2\pi / T$ ($\varphi = 2\pi$ *za dobu jednoho oběhu* $T = 2\pi f$)
- Takto se zavádí úhlová rychlost ω $[s^{-1}]$, která je zde konstantní = rovnoměrný pohyb
- Normálové / dostředivé zrychlení
- $a_d = v^2/r = \omega^2 r = v\omega$
- a_d = *konst.* $a_t = 0$



$$\omega = d\varphi/dt = konst., \qquad a_t = 0, \qquad a_d = \omega^2 r = v^2/r$$

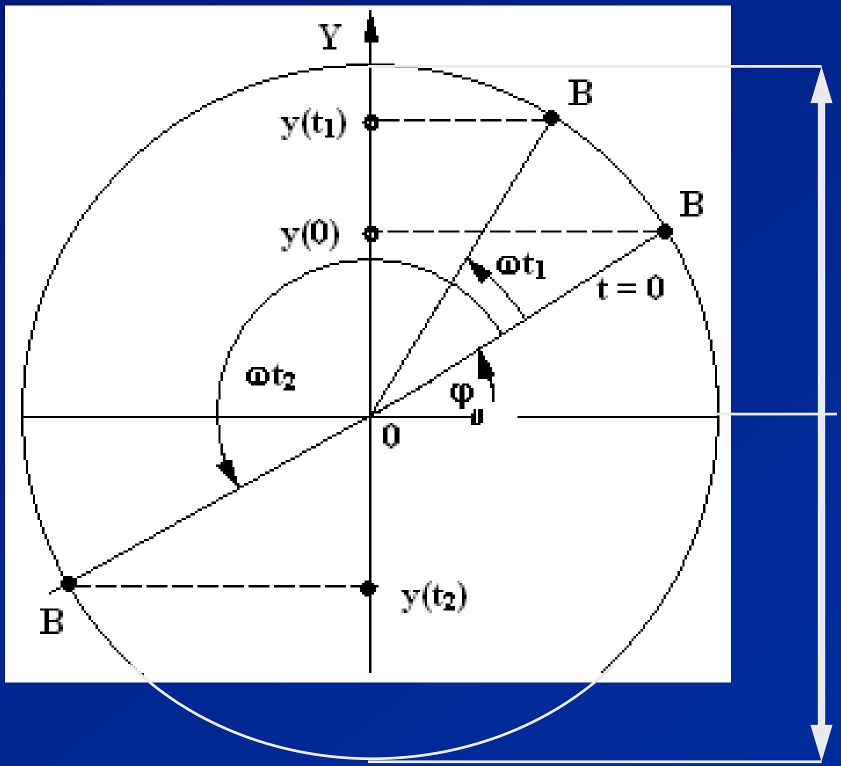
- Po integraci:
  - $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$
  - $s(t) = s_0 + r\omega t$
  - φ_0 nebo s_0 jsou integrační konstanty opět dané počátečními podmínkami.



Pohyb po kružnici – pohyb kmitavý

Průměty rovnoměrného kruhového pohybu do kolmých os jsou pohyby kmitavé.

Souřadnice hmotného bodu B :



$x(t) = r.\cos\,\varphi(t) = r.\cos(\varphi_0 + \omega\,t)$

$y(t) = r.\sin\,\varphi(t) = r.\sin(\varphi_0 + \omega\,t)$

φ_0 se zde nazývá počáteční fáze (v čase t = 0)

$r \approx A$ ...se nazývá amplituda

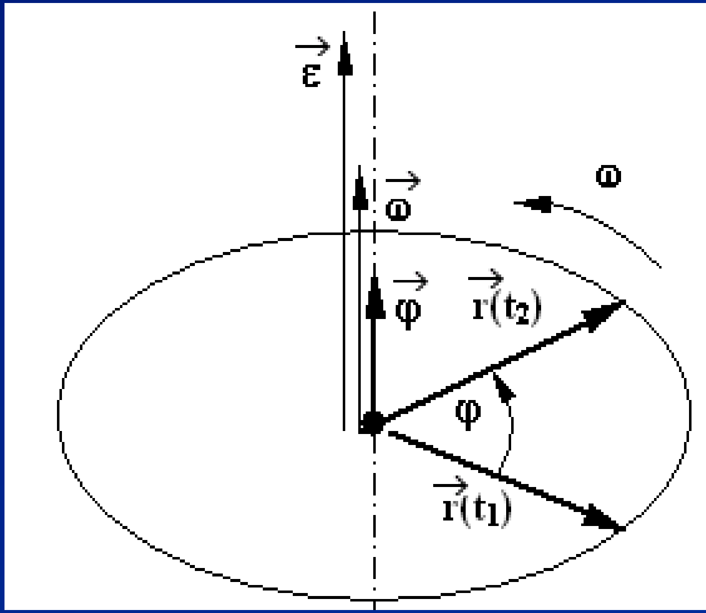
Úhlová rychlost x úhlová frekvence

Pohyb po kružnici II - zrychlený

- Pohyb rovnoměrně zrychlený po kružnici.
- Hmotný bod se pohybuje s konstantním Úhlovým a tečným zrychlením :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt = d^2\varphi/dt^2 = konst.\ [s^{-2}]$$

$$\boldsymbol{a}_t = d\mathbf{v}/dt = \boldsymbol{\varepsilon}\,.\,\mathbf{r} = konst.$$



- Po integraci:
  - $\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon\, t$
  - $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2/2$

Srovnej s

$$x(t) = x_0 + v_0 t + a\, t^2/2 = r\,.\,\varphi(t) = r.\,(\varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2/2)$$

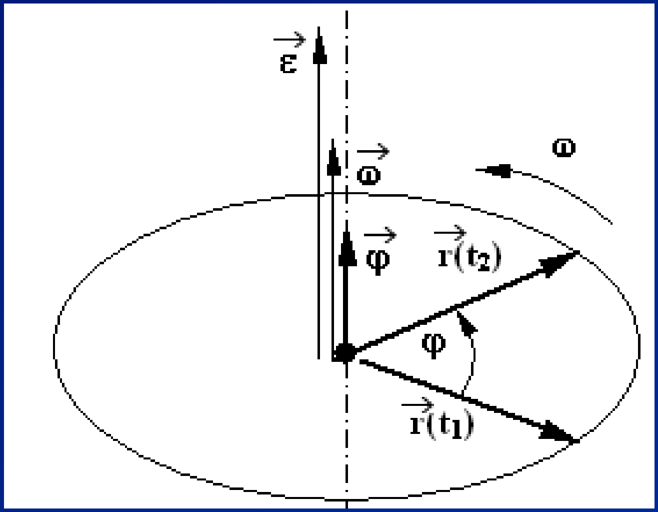
Pohyb rovnoměrně zrychlený po kružnici.

- $\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt = konst.$
- $\boldsymbol{a}_t = d\boldsymbol{v}/dt = \boldsymbol{\varepsilon}\,\boldsymbol{r} = konst.$

- Dostředivé zrychlení je funkcí ω nebo v a tedy času
- $a_d = v(t)^2/r$ $\qquad v(t) = \omega(t) \cdot r$
- $a_d = \omega(t)^2 \cdot r$ $\qquad \omega(t) = \omega_0 + \varepsilon\,\mathrm{t}$

- Je-li $\omega_0 > 0$ a $\varepsilon > 0$ jde o pohyb zrychlený. Při $\varepsilon < 0$ jde o pohyb zpomalený.
- Je-li $\omega_0 < 0$ je tomu samozřejmě naopak.

Pohyb po kružnici - obecně



- Protože rovina kruhové dráhy může mít různou polohu v prostoru, je nutné pro obecný případ pohybu použít vektorů

- Orientovaný úhlel $d\varphi$ má směr normály ke kružnici, orientované tak, že je úhel vidět jako pravotočivý.

  (proti směru hodinových ručiček)

$$\vec{v}_t = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$$

- Obdobně je definován i směr a orientace úhlové rychlosti ω a úhlového zrychlení ε.

Příklady

1. Centrifuga
2. $\varphi = -0.25t^2+10t +10$

$$\left|\vec{a}\right| = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad \left(t = 10\,s\right) = ?$$ pro R = 2m

3. Vlak snížil rovnoměrně rychlost z v = 30 na 20m.s^{-1} na obloukové dráze s = 500 m, r = 500m.

$$\left|\vec{a}\right| = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad \left(t = 10\,s\right) = ?$$

Pohyb v prostoru

- Při obecném pohybu v prostoru je nutné pracovat s kompletními vektory a operace se provádějí v souřadnicích.
- Pro zjednodušení se snažíme využít případné symetrie a snížit počet složek, ve kterých dochází ke změně.
- Příkladem je pohyb v blízkosti povrchu Země - vrhy, odehrávající se ve svislé rovině x,z.

Vrhy

- U všech vrhů předpokládáme:
  - Zrychlení, které působí svisle dolů a má velikost tíhového zrychlení $\underline{\boldsymbol{a}} = (0, 0, -g)$
  - pohyb začíná z bodu $\underline{\boldsymbol{r}}^{0} = (x_0, y_0, z_0)$
  - počáteční rychlostí $\underline{\boldsymbol{v}}^{0} = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$
- Vrhy se dělí podle počátečních podmínek na speciální případy.

- Všechny vektory se dají volbou souřadného systému převést na dvourozměrné – jde o pohyb v rovině

Vrh svislý

- Počáteční podmínky:
  - $\underline{\boldsymbol{a}} = (0, 0, -g)$ $\underline{\boldsymbol{r}}^{0} = (0, 0, z_0)$, $\underline{\boldsymbol{v}}^{0} = (0, 0, v_{z0})$
- Smysl má soustředit se jen na svislou osu z:
  - $v_z(t) = v_{z0} - g\,t$
  - $z(t) = z_0 + v_{z0}\,t - g\,t^2/2$

  - Podmnožinou jsou a) volný pád : $v_{z0} = 0$.

    b) vrh vzhůru : $v_{z0} > 0,\ z_0 = 0$.

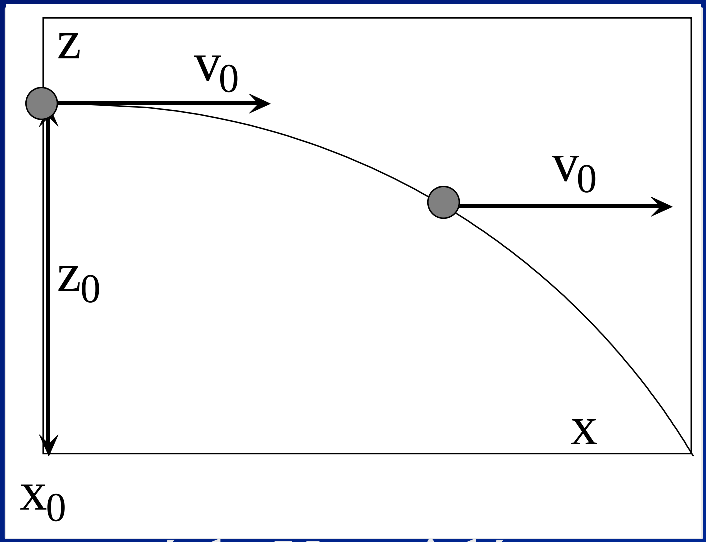
Rychlost se zmenšuje , až dosáhne nuly v čase $t_m = v_{z0}/g$ horní úvrati kde dráha (max. výška) $z(t_m) = v^2_{z0}/2g$

Potom těleso padá a rychlost je záporná. Na zem (souřadnice z_0) dopadne v čase t_n, který je řešením kvadr. rovnice

$z(t_n) = t_n v_{z0} - g t^2_n/2 = 0 \Rightarrow$ $t_n = 0$

$t_n = 2v_{z0}/g = 2t_m$..

Vrh vodorovný

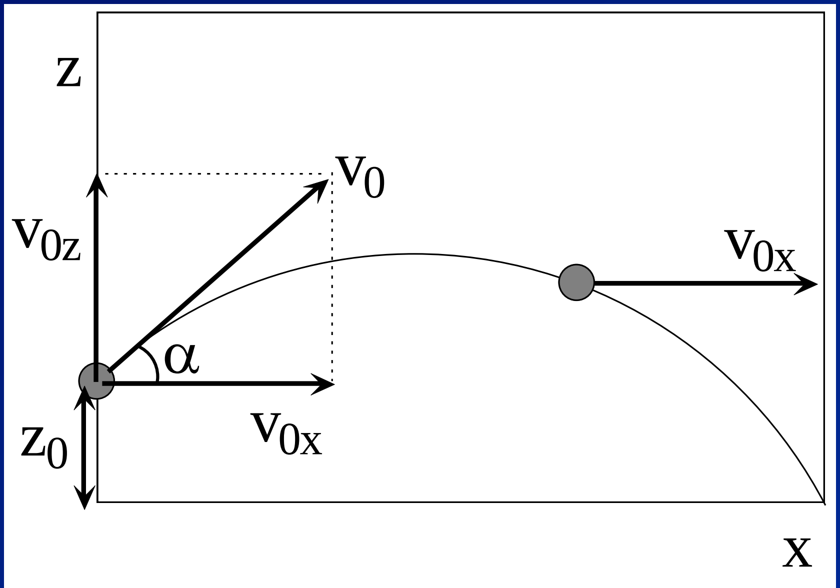


- Počáteční podmínky:
  - $\underline{a} = (0, 0, -g)$
  - $\underline{r}^0 = (x_0, y_0, z_0), (x_0 = y_0 = 0)$
  - $\underline{v}^0 = (v_{x0}, 0, 0)$
- Pohyb je nyní nutno popsat ve dvou osách. Ve svislé *z* se jedná o volný pád - pohyb rovnoměrně zrychlený: ve vodorovné *x* o pohyb rovnoměrný přímočarý :
  - $v_z(t) = -g\,t$ $v_x(t) = v_{x0}$
  - $z(t) = z_0 - gt^2/2$ $x(t) = x_0 + v_{x0}t$

Vrh je ukončen dopadem tělesa $\Rightarrow$
t (maximální) = doba vrhu *t* společná pro obě složky pohybu

Vrh šikmý I

- Počáteční podmínky:
  - $\underline{\boldsymbol{a}} = (0, 0, -g)$
  - $\underline{\boldsymbol{r}}^0 = (x_0, y_0, z_0), (x_0 = y_0 = 0)$
  - $\underline{\boldsymbol{v}}^0 = (v_{x0}, 0, v_{z0})$



- Počáteční rychlosti jsou spolu vázány:
  - $v_{x0} = v_0 \cos(\alpha)$
  - $v_{z0} = v_0 \sin(\alpha)$
- Těleso je tedy vrženo počáteční rychlostí v_0 pod elevačním úhlem s vodorovnou rovinou α.

- Uvést příklady