

**UNIVERZITA PARDUBICE**

**FAKULTA CHEMICKO-TECHNOLOGICKÁ**

Ústav aplikované fyziky a matematiky

# **F Y Z I K A I I**

pro technické obory

Dopravní fakulty Jana Pernera

**(PF2PP, PF2PK)**

**RNDr. Jan Z a j í c , CSc.**

Pardubice 2013

# O b s a h :

<b>8. MECHANIKA TEKUTIN</b> .....	5
<b>8.1 Hydrostatika a aerostatika</b> .....	5
8.1.1 Vlastnosti kapalin a plynů .....	5
8.1.2 Tlak v kapalinách vyvolaný vnější silou, Pascalův zákon .....	6
8.1.3 Tlak v kapalinách vyvolaný vnitřní tíhovou silou, hydrostatický tlak .....	7
8.1.4 Vztlková statická síla v tekutinách, Archimédův zákon .....	9
8.1.5 Důsledky vyplývající z Archimédova zákona .....	11
<b>8.2 Hydrodynamika a aerodynamika</b> .....	15
8.2.1 Základní typy proudění tekutin.....	15
8.2.2 Rovnice kontinuity (neboli spojitosti) toku .....	16
8.2.3 Bernoulliho rovnice .....	16
8.2.4 Odpor prostředí proti pohybu tělesa .....	21
<b>9. KMITAVÝ POHYB HMOTNÉHO BODU</b> .....	24
<b>9.1 Netlumený kmitavý pohyb hmotného bodu</b> .....	24
9.1.1 Kmitavý pohyb hmotného bodu a jeho vznik .....	24
9.1.2 Harmonický kmitavý pohyb hmotného bodu .....	24
9.1.3 Rychlost a zrychlení harmonického kmitavého pohybu .....	26
9.1.4 Dynamika netlumeného harmonického pohybu hmotného bodu .....	27
9.1.5 Energie harmonického pohybu .....	29
9.1.6 Skládání kmitavých pohybů .....	30
<b>9.2 Tlumený kmitavý pohyb hmotného bodu</b> .....	35
9.2.1 Dynamika tlumeného kmitavého pohybu .....	35
<b>10. STACIONÁRNÍ MAGNETICKÉ POLE</b> .....	39
<b>10.1 Magnetické pole ve vakuu</b> .....	39
10.1.1 Magnetická síla, indukce magnetického pole .....	39
10.1.2 Magnetický indukční tok .....	41
10.1.3 Pohyb nabité částice v magnetickém poli .....	43
10.1.4 Vodič s proudem v magnetickém poli .....	46
10.1.5 Magnetická pole vytvářená v okolí vodičů, jimiž protékají elektrické proudy; Biotův – Savartův – Laplaceův zákon .....	47
10.1.6 Příklady magnetických polí vodičů protékaných proudem.....	48
10.1.7 Vzájemné silové působení mezi dvěma vodiči s proudy, definice fyzikální jednotky ampér .....	53

10.2	Magnetické pole v látkách .....	55
10.2.1	Základní jevy a jejich podstata .....	55
10.2.2	Diamagnetické látky .....	56
10.2.3	Paramagnetické látky.....	57
10.2.4	Feromagnetizmus .....	58
10.2.5	Intenzita magnetického pole .....	62
<b>11.</b>	<b>NESTACIONÁRNÍ ELEKTROMAGNETICKÉ JEVY .....</b>	<b>63</b>
11.1	Elektromagnetická indukce .....	63
11.1.1	Napětí indukované ve vodiči pohybujícím se v magnetickém poli.....	63
11.1.2	Faradayův zákon elektromagnetické indukce .....	65
11.1.3	Jevy vlastní a vzájemná indukce .....	69
11.1.4	Energie magnetického pole .....	75
11.2	Střídavý elektrický proud .....	77
11.2.1	Charakteristika střídavého proudu a jeho vznik .....	77
11.2.2	Zavedení fyzikálních veličin střední a efektivní hodnota střídavého proudu a napětí .....	79
11.2.3	Elektrické obvody střídavého proudu .....	82
11.2.4	Jednoduchý obvod střídavého proudu s odporem .....	83
11.2.5	Jednoduchý obvod střídavého proudu s indukčností .....	84
11.2.6	Jednoduchý obvod střídavého proudu s kapacitou .....	86
11.2.7	Vektorová symbolika při popisu skalárních veličin střídavého proudu .....	88
11.2.8	Složené obvody střídavého proudu .....	89
11.2.9	Výkon střídavého proudu .....	94
<b>12.</b>	<b>ZÁKLADY TERMODYNAMIKY .....</b>	<b>97</b>
12.1	Termika .....	97
12.1.1	Teplota, teplotní roztažnost látek .....	97
12.1.2	Tepelné děje v ideálním plynu .....	102
12.1.3	Stavová rovnice ideálního plynu .....	105
12.1.4	Tepelná výměna, teplo.....	108
12.1.5	Kalorimetrie .....	109
12.1.6	Změny skupenství látek .....	111
12.1.7	Příklady dalších tepelných dějů .....	114
12.2	Základní poznatky z termodynamiky .....	115
12.2.1	První termodynamický zákon .....	116
12.2.2	Práce plynu .....	117
12.2.3	Děje v ideálním plynu z pohledu prvního termodynamického zákona .....	118
12.2.4	Kruhový děj .....	123
12.2.5	Carnotův cyklus.....	125
12.2.6	Termodynamická teplotní stupnice .....	127

<b>13. ÚVOD DO OPTIKY</b> .....	128
13.1 Geometrická optika .....	128
13.1.1 Zobrazování zrcadlem .....	128
13.1.2 Zobrazování tenkou čočkou .....	132
13.2 Základní pojmy vlnové optiky .....	134
13.2.1 Huygensův princip .....	134
13.2.2 Odraz a lom světla, index lomu .....	135
13.2.3 Disperze světla, rozklad světla v optickém hranolu .....	136
13.2.4 Interference světla.....	138
13.2.5 Optická mřížka .....	138
13.3 Kvantové vlastnosti optického záření .....	141
13.3.1 Fotoelektrický jev .....	141

© RNDr. Jan Z a j í c , CSc., 2013



# 8. MECHANIKA TEKUTIN

Pod pojmem tekutina chápeme látku ve skupenství kapalném nebo plynném. Obsahem této kapitoly bude tedy studium mechaniky kapalin a plynů. Zkoumání podmínek rovnováhy látek v těchto dvou skupenstvích je předmětem studia **hydrostatiky** a **aerostatiky**, zákonitostmi pohybu kapalin a plynů se pak zabývá **hydrodynamika** a **aerodynamika**.

## 8.1 HYDROSTATIKA A AEROSTATIKA

### 8.1.1 Vlastnosti kapalin a plynů

Na rozdíl od látek, jež se nacházejí ve skupenství pevném, neexistují v tekutinách žádné pevné vazby mezi jejich jednotlivými molekulami. Právě tato základní skutečnost je příčinou naprosto odlišného chování tekutin v porovnání s chováním látek pevných. Molekuly tekutin se mohou snadno pohybovat a právě tato vlastnost – **tekutost** – jim dala i název. Absenci pevných vazeb mezi molekulami tekutin lze například vysvětlit mimo jiné i vznik různých tlaků v kapalinách a plynech i další jevy typické právě pro tato dvě skupenství.

Na druhé straně najdeme mezi oběma skupenstvími (kapalným a plynným) i značné rozdíly. Asi tím nejvýraznějším je naprosto odlišná objemová stálost. Ta je typickým rysem kapalin, jež jsou jen velmi málo stlačitelné, zatímco plyny nemají ani stálý tvar ani stálý objem a nevytvářejí ani volný povrch (hladinu) a na rozdíl od kapalin jsou naopak velice snadno stlačitelné i rozpínavé.

Pro jednoduchost studia tekutých látek proto zavádíme pojem tzv. **ideálních tekutin** majících následující definici stanovené (od reality více či méně vzdálené) „vlastnosti“:

- **ideální kapalina** ..... je látkou jednak dokonale tekutou (a tedy v ní neexistuje při proudění žádné vnitřní tření mezi jejími jednotlivými molekulami); Navíc je látkou absolutně nestlačitelnou (to znamená, že má stálou hustotu a při daném množství i stále stejný objem);
- **ideální plyn** ..... je stejně jako ideální kapalina rovněž dokonale tekutý, ale na rozdíl od kapalin přitom dokonale stlačitelný (teoreticky až do nulového objemu) i dokonale rozpínavý.

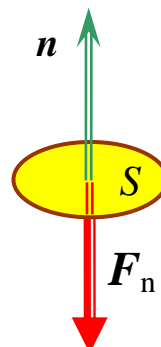
## 8.1.2 Tlak v kapalinách vyvolaný vnější silou, Pascalův zákon

Obecně je **tlak**  $p$  v kapalině skalární fyzikální veličina charakterizující působení určité síly o velikosti  $F_n$  **kolmo** na jistou plochu v kapalině o velikosti  $S$ . Je-li silové působení stejné (konstantní) v celé ploše  $S$ , je tlak  $p$  dán jednoduchým podílem

$$p = \frac{F_n}{S} \quad (8.1)$$

Jednotkou tlaku v soustavě SI je **pascal** (Pa). Z uvedené definice této fyzikální veličiny pak vyplývá, že

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} .$$



Obr. 8.1 – k definici tlaku v kapalinách

Při studiu tlaku v tekutinách pak rozlišujeme dva kvalitativně **naprosto rozdílné** případy vzniku tlaku v těchto látkách:

**A) Tlak vyvolaný vnější silou**, tedy nějakým jiným (cizím) tělesem, jež nemá s tekutinou nic společného (jen to, že na ni působí). Takovým je např. tlak v brzdové kapalině vyvolaný sešlápnutím brzdového pedálu, tlak v hydraulickém lisu nebo zvedáku vyvolaný působením síly na jeden z pístů, tlak vznikající při explozi pod hladinou nebo při zemětřesení, atd. Tento typ tlaku naprosto **nezávisí** na hustotě příslušné tekutiny a jak si připomeneme níže, platí pro něj **Pascalův zákon**.

**B) Tlak vyvolaný vnitřními silami tekutiny**, tedy jí samotnou, a to silovým působením jednotlivých molekul tekutiny navzájem mezi sebou. Příkladem takového tlaku je tlak hydrostatický způsobený tíhovými silami, ale i tlak vznikající v rotující odstředivce nebo tlak vyvolaný setrvačnými silami v brzdící cisterně apod. Tento druh tlaku logicky na příslušné kapalině (a tedy i na její hustotě) **musí záviset**.

Podívejme se nejprve na tlak, jenž je v tekutině vyvolán vnějšími silami (jinými tělesy). Působíme-li např. na povrch kapaliny určitou **vnější** tlakovou silou  $F$ , bude se její působení díky absenci vazeb mezi molekulami „přenášet“ dovnitř kapaliny, přičemž na každou (libovolnou) plochu v kapalině bude kolmo působit síla úměrná její velikosti  $S$  a **tlak**  $p$  **naměřený v různých místech kapaliny bude stejný a rovný vnějšímu tlaku**. Tento závěr je známý jako **Pascalův zákon** a platí jak pro kapaliny, tak i pro plyny.

Přítom tlak, jenž naměříme v kapalině, závisí pouze na velikosti síly a na obsahu plochy povrchu, na něž daná síla působí. Velikost tlaku naprosto nezávisí na druhu a množství kapaliny (tedy ani na její hustotě  $\rho$ , ani na jejím celkovém objemu  $V$ ).



Bezprostřední aplikací Pascalova zákona v technické praxi jsou pak různá **hydraulická zařízení** (viz vedlejší obr. 8.2).

Budeme-li působit na menší píst o obsahu průřezu  $S_1$  tlakovou silou  $F_1$ , vyvolá se tím v kapalině tlak

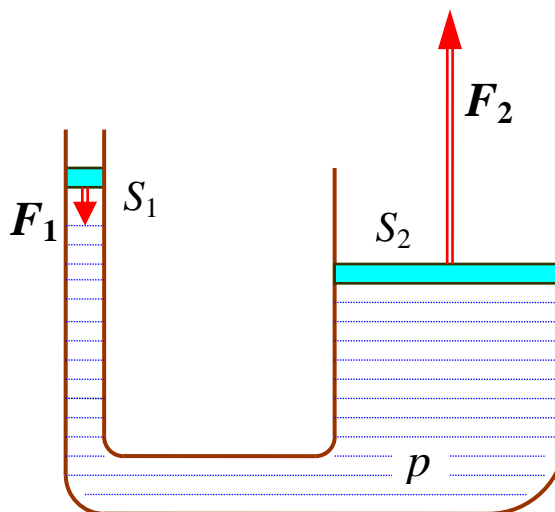
$$p = F_1 : S_1 ,$$

jenž je ve všech místech kapaliny stejný. Tím pádem bude na větší píst  $S_2$  potom působit kolmá síla o velikosti

$$F_2 = p \cdot S_2 .$$

Porovnáním obou výše uvedených výrazů pak pro velikosti sil  $F_1$  a  $F_2$  dostáváme následující úměru

$$\boxed{\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1}} . \quad (8.2)$$



Obr. 8.2 – hydraulické zařízení

Na naprosto stejném principu pak pracují i **pneumatická zařízení**, v nichž se tlak „přenášá“ pomocí stlačeného vzduchu (např. v brzdovém potrubí u vlaků, apod.).

### 8.1.3 Tlak v kapalinách vyvolaný vnitřní tíhovou silou, hydrostatický tlak

V tíhovém poli Země působí na všechny molekuly kapaliny tíhová síla. Protože tyto síly nejsou kompenzovány pevností chybějících vazeb (tak, jak je tomu u pevných látek), postupně se s rostoucím sloupcem kapaliny (neboli se zvětšující se hloubkou pod její hladinou) zvětšuje i silové působení, jež vyjadřuje tzv. **hydrostatická tlaková síla**  $F_h$ , a v kapalině stoupá tlak vyvolaný touto silou – **tlak hydrostatický**.

**Hydrostatický tlak**  $p_h$  je tedy bezprostředním důsledkem působením tíhového pole Země v kapalinách. Jeho velikost je v hloubce  $h$  pod volnou hladinou kapaliny o hustotě  $\rho$  dána výrazem

$$\boxed{p_h = h \cdot \rho \cdot g} . \quad (8.3)$$

Je třeba si uvědomit, že na povrch kapaliny (na její hladinu) působí ještě nějaké vnější síly „přidávající“ kapalině podle Pascalova zákona určitý vnější tlak  $p_o$  navíc. Bez tohoto silového působení by ostatně žádná kapalina nemohla hladinu vytvořit.

Nejčastějším příkladem je působení tíhové síly okolního vzduchu, ale může nastat i řada jiných případů takového vnějšího silového působení. Proto je třeba k vlastnímu tzv. „čistému“ hydrostatickému tlaku (8.3) kapaliny připočítat ještě hodnotu tohoto vnějšího tlaku  $p_0$  a celkový (výsledný) tlak  $p$  v hloubce  $h$  pod hladinou bude potom vyjádřen vztahem

$$p = h \cdot \rho \cdot g + p_0 \quad . \quad (8.4)$$

**Pozn.:** Podobně jako u kapalin lze i u plynů zavést pojem tlaku vyvolaného vlastní tíhovou silou plynu. V případě Země a její atmosféry je to tzv. **atmosférický tlak  $p_a$** . I když se fakticky jedná o obdobu hydrostatického tlaku  $p_h$  v kapalině, nelze pochopitelně jeho velikost počítat podle vztahu (8.3), protože hustota vzduchu  $\rho$  není stálá veličina, ale v důsledku jeho stlačitelnosti se s rostoucí výškou  $h$  nad povrchem Země mění (postupně se snižuje). A navíc vzduch netvoří žádnou hladinu, takže v tomto případě nemá smyslu uvádět nějakou hloubku.

Pokles hustoty vzduchu s rostoucí výškou  $h$  je možno vyjádřit exponenciální funkcí, což se nakonec přenáší i do závislosti atmosférického tlaku na této veličině

$$p_a = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 h g}{p_0}} \quad . \quad (8.5)$$

V uvedeném vztahu přitom veličiny  $p_0$  a  $\rho_0$  představují hodnoty tlaku vzduchu a jeho hustoty v nulové nadmořské výšce.

### Normální atmosférický tlak

Jeho definice vychází z měření tlaku vzduchu rtuťovým barometrem (známý Torricelliho pokus). Normální atmosférický tlak tak odpovídá hydrostatickému tlaku rtuťového sloupce o výšce přesně 760 mm při teplotě  $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ .

### Příklady:

1. Vypočítejte hodnotu normálního tlaku vzduchu podle právě výše uvedené definice. Hustota rtuti odpovídající nulové Celsiově teplotě je  $13\,595,1 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  a přesná hodnota tíhového zrychlení Země  $g = 9,806\,65 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

---

Hodnotu normálního atmosférického tlaku dostaneme po dosazení do vztahu (8.3)

$$p_n = h \cdot \rho_{\text{Hg}} \cdot g = 0,76 \text{ m} \cdot 13\,595,1 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} \cdot 9,806\,65 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} = 1,013\,25 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

- Pro měření tlaku vzduchu se dříve používala jednotka jeden **torr** (nazvaná právě podle zkratky Torricelliho příjmení), jež odpovídala hydrostatickému tlaku rtuťového sloupce o výšce  $h = 1 \text{ mm}$ . Jednoduchým porovnáním si na základě právě spočítaného příkladu můžete snadno odvodit, že platí převodní vztah

$$1 \text{ torr} = 133,322 \text{ Pa} \quad .$$



**2.** Jak vysoký sloupec vody ( $\rho = 999,842 \text{ 6 kg}\cdot\text{m}^{-3}$  při  $t_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ ) dokáže udržet v rovnováze vzduch při normálním atmosférickém tlaku?

Vyjdeme z rovnosti normálního tlaku vzduchu a hydrostatického tlaku vody

$$p_n = p_h = h_{\text{vody}} \cdot \rho \cdot g \quad \Rightarrow \quad h_{\text{vody}} = \frac{p_n}{\rho \cdot g} = \frac{10 \text{ 1325 Pa}}{999,842 \text{ 6 kg}\cdot\text{m}^{-3} \cdot 9,806 \text{ 65 m}\cdot\text{s}^{-2}} = 12,334 \text{ m}$$

Na udržení zmíněné rovnováhy bychom potřebovali sloupec vody o výšce 12,334 m.

**Pozn. na závěr:** Hydrostatický tlak v kapalinách je sice nejtypičtějším případem tlaku vyvolaného vnitřními silami (tj. samotnou kapalinou), ale není to případ jediný. S tlaky tohoto typu se můžeme setkat např. i v situacích, kdy se nádoba, v níž se nachází kapalina, pohybuje s jistým zrychlením. Jedná se v takovém případě o neinerciální soustavu, v níž působí na molekuly kapaliny neinerciální **setrvačné síly**, jež pak mohou vyvolat v kapalině i značné tlaky.

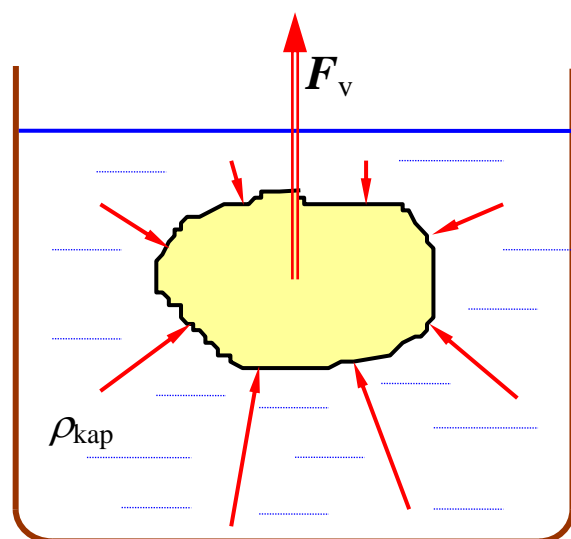
Příkladem může být kapalina v odstředivce, kde je tlak vyvoláván setrvačnou odstředivou silou působící na molekuly kapaliny a kapalina se přemisťuje ke stěnám nádoby. Nebo při prudkém brzdění cisterny jsou molekuly kapaliny „tlačeny“ k její přední stěně opět setrvačnou silou, což může vyvolat značný tlak a někdy i způsobit destrukci.

## 8.1.4 Vztlaková statická síla v tekutinách, Archimédův zákon

Přímým důsledkem existence hydrostatického tlaku v kapalinách a aerostatického tlaku v plynech je působení **hydrostatické (aerostatické) vztlakové síly**  $F_v$  na tělesa, jež jsou do tekutin ponořena.

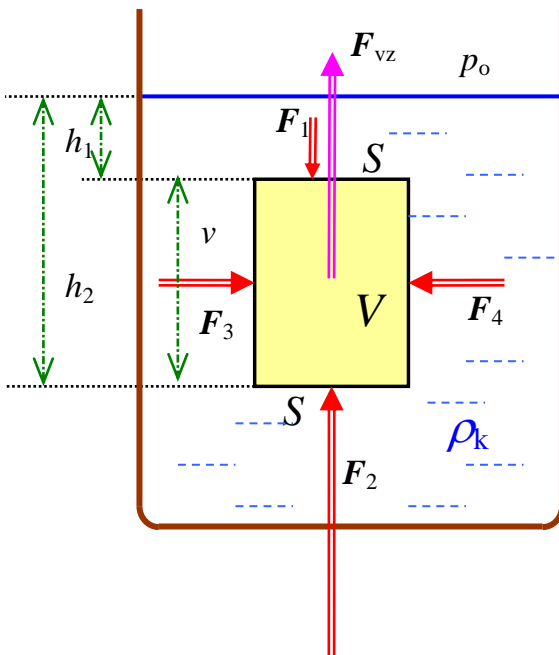
Podíváme-li se na těleso na vedlejším obr. 8.3, vidíme, že na „dolní“ části tělesa ponořeného do tekutiny působí vzhledem k vyššímu tlaku ve větší hloubce větší tlakové síly než na „horní“ partii tělesa. Je pochopitelné, že působení těchto tlakových sil vždy vztahujeme na stejně velké plošky  $\Delta S$  povrchu tělesa.

Tlakové síly se tak nemohou vyrušit. Dávají nenulovou výslednici a právě ona je **statickou vztlakovou silou**  $F_v$  v tekutině. Její směr je vždy opačný, než je směr tíhové síly  $F_G$ , kterou na ponořené těleso působí tíhové pole Země.



Obr. 8.3 – vztlaková síla v tekutině

**Pozn.:** Výpočet velikosti  $F_v$  statické vztlakové síly lze provést na jednoduchém modelovém případě, kdy tělesem, jež ponoříme do ideální kapaliny hustoty  $\rho_k$ , bude kvádr. Jeho podstavy mající plochu  $S$  jsou rovnoběžné s hladinou kapaliny, výška kvádru je  $v$  (viz vedlejší obr. 8.4). Tlakové síly  $F_3$  a  $F_4$ , jež působí na boční stěny kvádru, se vzhledem k symetrii ponořeného tělesa navzájem ruší, a tak bude výslednice všech sil (což je právě vztlaková síla  $F_v$ ) v kapalině dána pouze tlakovými silami  $F_1$  a  $F_2$  působícími na horní a dolní podstavu.



Obr. 8.4 – určení velikosti statické vztlakové síly

Její velikost  $F_v$  je přitom rovna

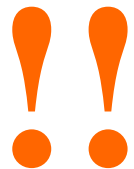
$$\begin{aligned}
 F_v &= F_2 - F_1 \\
 &= (h_2 \rho_k g + p_0) \cdot S - (h_1 \rho_k g + p_0) \cdot S = \\
 &= (h_2 - h_1) \cdot \rho_k g S = v \rho_k g S = V \rho_k g = \\
 &= F_{G \text{ kap}} .
 \end{aligned}$$

Dostáváme tak matematický výraz pro velikost  $F_v$  vztlakové síly v kapalinách a plynech působící na tělesa do nich ponořená

$$\boxed{F_{vz} = V \cdot \rho_k \cdot g} \quad . \quad (8.6)$$

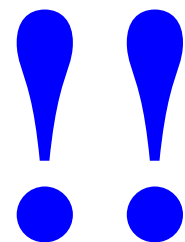
I když jsme tento výraz odvodili pro zvláštní případ ponořeného kvádru, platí vztah (8.6) naprosto obecně pro těleso jakéhokoli tvaru, jehož ponořený objem je  $V$  a pro jakoukoli tekutinu hustoty  $\rho_k$ .

Jak je patrné, vztlaková síla v kapalině závisí pouze na uvedených veličinách, nezávisí vůbec na tom, jakou má ponořené těleso hmotnost, či jakou má hustotu. Různé látky, ale přitom o stejném objemu, jsou po ponoření do téže tekutiny nadlehčovány naprosto stejnou vztlakovou silou !!!



Vztah (8.6) je vlastně matematickým vyjádřením Archimédova zákona. Součin  $V \cdot \rho_k$  udává hmotnost tekutiny tělesem z objemu  $V$  vytlačené, výraz  $V \rho_k g$  pak velikost tíhové síly na tuto hmotnost v tíhovém poli Země působící. Lze tedy zmíněný zákon vyslovit např. v tomto znění:

**Archimédův zákon** → na těleso ponořené do tekutiny působí svisle vzhůru **statická vztlaková síla**. Její velikost  $F_{vz}$  se přitom rovná velikosti tíhové síly působící na tekutinu stejně velkého objemu, jako je objem ponořeného tělesa (a současně i objem tekutiny tělesem vytlačené).



## 8.1.5 Důsledky vyplývající z Archimédova zákona

Jedním z důsledků platnosti tohoto zákona je i **různé chování těles v kapalině** (resp. **v plynu**). Na každé těleso totiž v takovém případě působí vždy dvě síly. První z nich je právě vysvětlená vztlková síla  $F_{vz}$  kapaliny (plynu) o velikosti

$$F_{vz} = V_t \cdot \rho_k \cdot g$$

mající směr svisle vzhůru. Ale těleso samé se přece nachází také v tíhovém poli Země, a ta na něj působí v opačném směru – svisle dolů – tíhovou silou  $F_G = m \cdot g$ . Velikost tíhové síly se při hustotě tělesa  $\rho_t$  a objemu  $V$  dá vyjádřit jako

$$F_G = V \cdot \rho_t \cdot g$$

Konečné chování tělesa, které je zcela ponořené v kapalině (nebo plynu), pak určuje výslednice  $F$  těchto dvou sil, jež má velikost  $F = |F_G - F_{vz}|$  a směr větší z těchto dvou proti sobě působících sil. Je naprosto zřejmé, že mohou nastat pouze tři různé případy:

→ **1)  $F_G > F_{vz}$**

Tato situace nastává tehdy, když pro hustotu tělesa a hustotu kapaliny platí, že  $\rho_t > \rho_k$ ; těleso v takovém případě v kapalině **klesá ke dnu**, a kdyby neexistoval odpor prostředí proti pohybu tělesa, byl by jeho pohyb rovnoměrně zrychlený se zrychlením menším než je zrychlení tíhové  $g$ .

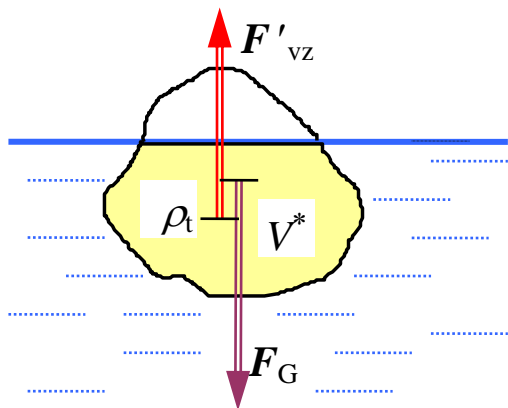
→ **2)  $F_G = F_{vz}$**

Případ dosti výjimečný, neboť z rovnosti obou sil vyplývá i rovnost hustot kapaliny a do ní ponořeného tělesa .....  $\rho_t = \rho_k$ ; těleso se pak v kapalině **volně vznáší**.

**Pozn.:** Je-li těleso nehomogenní (např. v určité hloubce pod hladinou volně se vznášející ponorka), pak hustota tělesa  $\rho_k$  v uvedené rovnosti je hustotou **průměrnou**.

→ **3)  $F_G < F_{vz}$**

Z této silové podmínky vyplývá, že v posledním případě musí být hustota tělesa menší než hustota okolní kapaliny  $\rho_t < \rho_k$ ; výslednice sil pak směřuje svisle vzhůru a těleso **stoupá k volné hladině kapaliny**; opět platí, že kdyby neexistoval odpor prostředí proti pohybu tělesa, byl by pohyb tělesa vzhůru rovnoměrně zrychlený. Přitom velikost zrychlení tohoto pohybu by mohla být i větší, než je velikost tíhového zrychlení  $g$ .



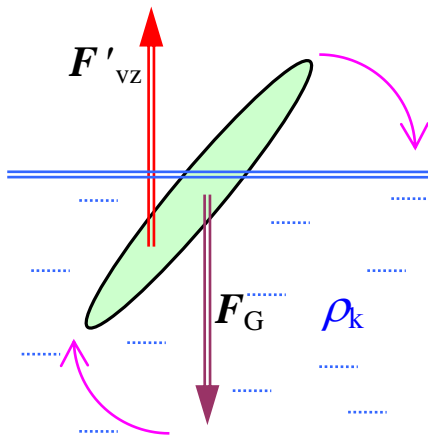
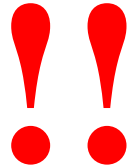
Obr. 8.5 – plování tělesa na povrchu kapaliny

Po dosažení hladiny se těleso musí částečně vynořit a ustálit se v poloze, kdy tíhová síla  $F_G$  bude v rovnováze se vztlkovou silou  $F'_{vz}$ , jejíž velikost je ovšem dána už pouze objemem  $V^*$  ponořené části tělesa (neboť jenom tento objem kapaliny těleso vytlačuje – viz vedlejší obr. 8.5).

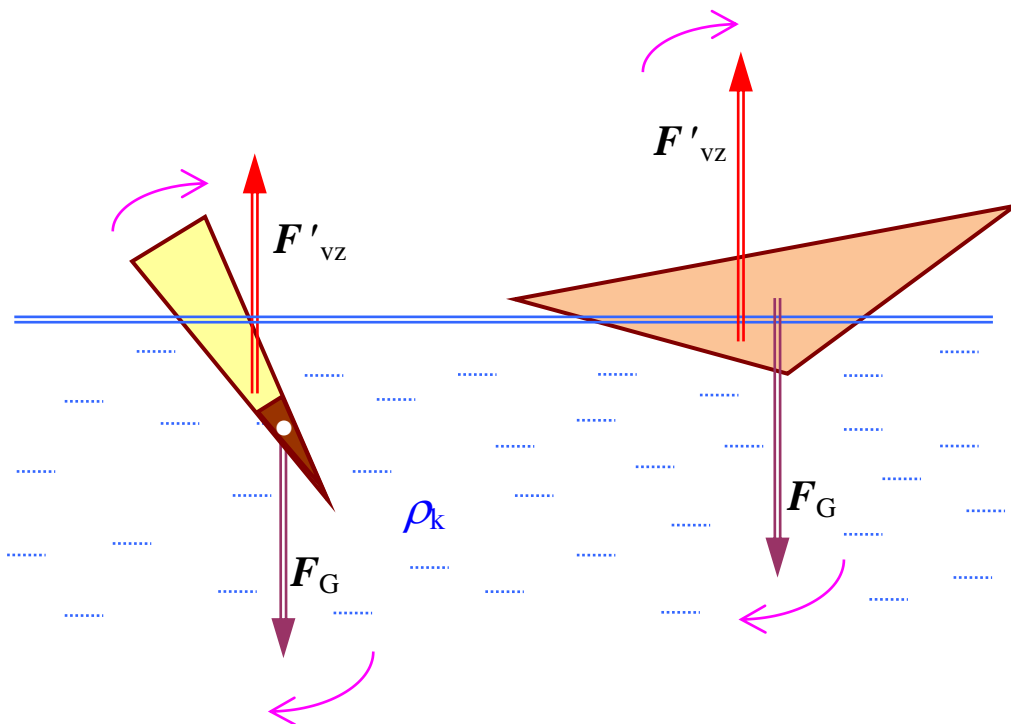
Jelikož tíhová síla  $F_G$  je silou působící na celý objem tělesa  $V$ , má velikost  $F_G = V \cdot \rho_t \cdot g$ , zatímco vztlaková síla  $F'_{vz}$  je vyvolána vytlačněním kapaliny pouze z objemu  $V^* < V$  a její velikost je rovna proto  $F'_{vz} = V^* \cdot \rho_k \cdot g$ . Ze zmíněné rovnosti velikosti obou sil pak pro objem  $V^*$  ponořené části tělesa a pro celý objem tělesa  $V$  musí platit následující úměra

$$\boxed{\frac{V^*}{V} = \frac{\rho_t}{\rho_k}} \quad (8.7)$$

Pozor na to, že obě síly mají **různá působišť** a nemusejí proto nutně ležet na jedné a téže vektorové přímce !!! Vytvářejí ve skutečnosti silovou dvojici, jež může těleso snadno překloupat (viz obr. 8.6). Aby k tomuto překloupení nedošlo např. při naklonění lodi, musí mít tato silová dvojice takový otáčivý účinek, aby loď narovнала zpět do svislé polohy (na následujícím obr. 8.7 máte schematicky znázorněny dva takové možné případy konfigurace sil  $F_G$  a  $F'_{vz}$ ).



Obr. 8.6 – silová dvojice překloupe plovoucí těleso



Obr. 8.7 – silové dvojice narovnají plovoucí tělesa

### Příklad:

Na vodě, jejíž hustota je  $999,8 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , plave blok ledu o hustotě  $916,8 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Určete, jaká část ledu vyčnívá nad vodní hladinu.

$$\text{Pro ponořený objem } V^* \text{ platí, že } V^* = V \cdot \frac{\rho_t}{\rho_k} = V \cdot \frac{916,8 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}}{999,8 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}} = 0,9170 V = 91,7 \% V.$$

Z vody proto vyčnívá  $8,3 \%$  z celkového objemu  $V$  plovoucího ledu.

Archimédova zákona lze také výhodně využít např. při různých nepřímých metodách **určování hustot těles**. Zejména u těles, jež nejsou geometricky pravidelná, nelze jejich objem  $V$  změřit přímo s dostatečnou přesností. Informaci o hodnotě této fyzikální veličiny nám může dát právě vztlaková síla  $F_{vz}$ , kterou lze obvykle velmi přesně zjistit (ať už měřením, či výpočtem) ze zadání příslušné úlohy nebo experimentu.

Ve většině případů – jak ukazuje i následující příklad – se u těchto problémů jedná o **řešení jisté silové rovnováhy**, kdy výslednice všech sil působících na těleso ponořené v kapalině je nulová.

### Příklad:

Jaká je hustota žulového kamene o hmotnosti  $12,6 \text{ kg}$ , jestliže na jeho úplné vytažení z vody je potřebná minimálně síla, jejíž velikost je  $81,2 \text{ N}$ ? Hustota vody je  $996,8 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .

Tíhová síla  $F_G$  mířící svisle dolů a proti ní působící dvě síly – vztlaková síla kapaliny  $F_{vz}$  a síla  $F_1$ , kterou kámen vytahujeme z vody, musí být v rovnováze a pro jejich velikosti musí platit vztah

$$F_G = F_{vz} + F_1 \quad .$$

Velikost vztlakové síly  $F_{vz}$  je tedy

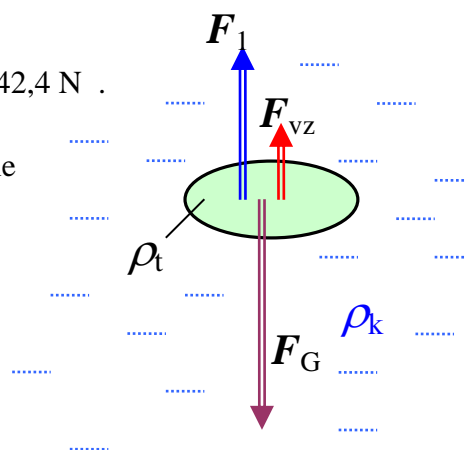
$$F_{vz} = F_G - F_1 = m \cdot g - F_1 = 12,6 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} - 81,2 \text{ N} \doteq 42,4 \text{ N} \quad .$$

Jelikož vztlaková síla kapaliny  $F_{vz} = V\rho_k g$ , je objem kamene

$$V = \frac{F_{vz}}{\rho_k g} = \frac{42,4 \text{ N}}{996,8 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} \cdot 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}} \doteq 4,38 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \quad .$$

Hledaná hustota žuly je potom

$$\rho_t = \frac{m}{V} = \frac{12,6 \text{ kg}}{4,34 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3} \doteq 2900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} \quad .$$



Statickou vztlakovou silou  $F_{vz}$  jsou nadlehčována ale i všechna tělesa **v plynech**. Vzhledem k velmi malé hustotě plynů (řádově jednotky  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ) je však velikost této síly úměrně menší ve srovnání se vztlakovou silou působící na těleso téhož objemu v kapalinách. Přesto se i tato síla uplatní např. při létání u tzv. **„těles lehčích než vzduch“**, jak ukazuje i následující příklad.

### Příklad:

Jakou zátěž unese balón o průměru 16 m naplněný héliem (jeho hustota je  $0,1875 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ), je-li hustota okolního vzduchu  $1,185 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ? Pro jednoduchost předpokládáme, že objem balónu je prakticky dán jen objemem jeho plynné náplně.

Opět se jedná o silovou rovnováhu – vztlaková síla vzduchu  $F_{vz}$ , tíhová síla zátěže  $F_G$  a tíhová síla samotného hélia  $F_{He}$  musí být v rovnováze, přičemž pro jejich velikosti platí vztah

$$F_{vz} = F_G + F_{He} \quad .$$

Objem balónu  $V = \frac{1}{6} \pi d^3 \doteq 2\,145 \text{ m}^3$ ,

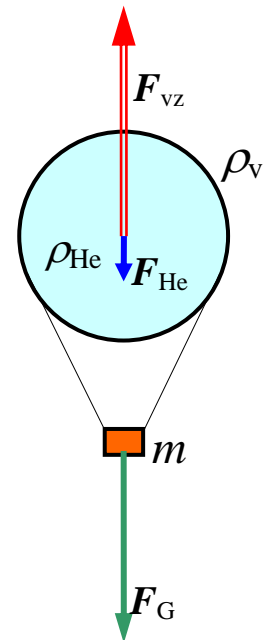
a tudíž vztlaková síla má velikost  $F_{vz} = V\rho_v g \doteq 24\,900 \text{ N}$

a tíhová síla hélia  $F_{He} = V\rho_{He} g \doteq 3\,950 \text{ N}$  .

Příslušná tíhová síla zátěže je pak rovna  $F_G = F_{vz} - F_{He} \doteq 20\,950 \text{ N}$

a jelikož platí  $F_G = m_x \cdot g$ , bude hledaná hmotnost zátěže

$$m_x = \frac{F_G}{g} = \frac{20\,950 \text{ N}}{9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}} \doteq 2\,140 \text{ kg} \quad .$$



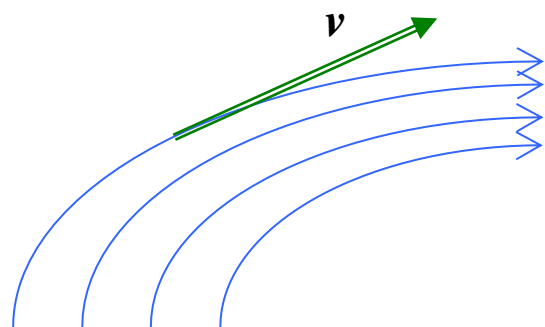
## 8.2 HYDRODYNAMIKA A AERODYNAMIKA

Až dosud jsme se zabývali pouze vlastnostmi tekutin (kapalin a plynů), jež se nacházely vzhledem k povrchu Země v klidu. Nyní přejdeme ke studiu zákonitostí pohybu tekutin. Uspořádaný makroskopický pohyb částic kapaliny nebo plynu se nazývá **proudění tekutiny**. Vzhledem k tomu, že jednotlivé částice (molekuly) tekutiny mohou při proudění měnit svoji vzájemnou polohu, je obecně pohyb kapalin a plynů složitější než pohyb tuhých těles.

### 8.2.1 Základní typy proudění tekutin

- **Ustálené (stacionární) proudění** je takové proudění tekutiny, při němž jsou v libovolném místě rychlost  $v$  a tlak  $p$  v proudící tekutině stálé veličiny, jež se nemění s časem.
- **Nestacionární proudění** je potom takové, při němž rychlost  $v$  a tlak  $p$  v proudící tekutině na čase závisí (s časem se mění).
- **Laminární proudění** je proudění, při němž se jednotlivé vrstvy tekutiny vůči sobě rovnoběžně posunují. Je charakterizováno rychlostí, jež je v daném bodě stálá nebo se jen velmi málo mění s časem.
- **Turbulentní proudění** tekutiny je charakteristické tím, že se její rychlost v daném bodě značně a nepravidelně mění.
- **Nevířivé proudění** je proudění, při němž všechny částice tekutiny vykonávají jen posuvný pohyb. Takové proudění může ve skutečnosti nastat jen v tekutině bez vnitřního tření (tedy v ideální tekutině).
- **Vířivé proudění** je typické tím, že při něm částice tekutiny vykonávají současně jak pohyb posuvný, tak i rotační (otáčivý).

Trajektorie jednotlivých částic (tedy molekul) proudící tekutiny se znázorňují tzv. **proudnicemi** (viz vedlejší obr. 8.8). Jsou to orientované čáry, přičemž jejichž tečny v libovolném bodě mají směr totožný se směrem vektoru rychlosti  $v$  pohybující se částice tekutiny. Každým bodem přitom **při ustáleném proudění** může logicky procházet **jen jedna jediná** proudnice; proudnice se tedy nemohou navzájem protínat!

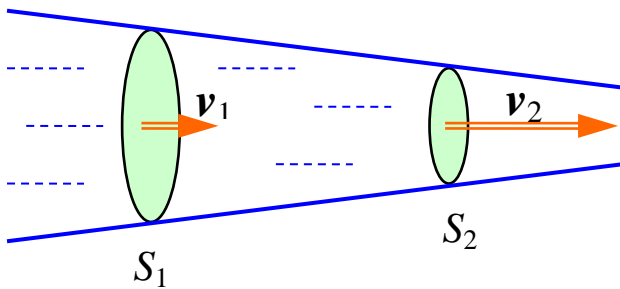


Obr. 8.8 – proudnice tekutiny

Trubice, jejíž plášť je tvořen proudnicemi, se nazývá **proudová trubice** (dá se říci, že představuje jakýsi ekvivalent potrubí, jímž tekutina protéká; jedná se však o pojem „trochu“ obecnější). Tekutina nacházející se uvnitř proudové trubice se pak označuje jako **proudové vlákno**.

## 8.2.2 Rovnice kontinuity (neboli spojitosti) toku

Nejjednodušším případem proudění kapalin (kterým se teď budeme zabývat) je **ustálené proudění ideální kapaliny**, tedy kapaliny, jež je dokonale tekutá a přitom absolutně nestlačitelná. V takovém případě musí každým průřezem trubice protékat za stejný čas stejný objem dané kapaliny  $V$ , což při konstantní hustotě kapaliny představuje i stejnou hmotnost kapaliny, jež proteče libovolným průřezem za stejný čas.



Obr. 8.9 – k rovnici spojitosti toku

Zvolme si v trubici na vedlejším obrázku 8.9 dva průřezy s různými obsahy ploch  $S_1$  a  $S_2$ . Příslušné rychlosti proudící kapaliny v těchto průřezích pak budou  $v_1$  a  $v_2$ . Obsahem prvního průřezu proteče za čas  $\Delta t$  objem kapaliny

$$V_1 = S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t ,$$

obsahem druhého pak

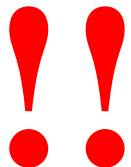
$$V_2 = S_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t .$$

Protože je kapalina nestlačitelná, musí být oba objemy  $V_1$  a  $V_2$  stejné ( $V_1 = V_2$ ). Tak po jednoduché úpravě dostáváme důležitý vztah

$$\boxed{S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 = konst.} \quad . \quad (8.8)$$

Uvedený výraz se nazývá **rovnice spojitosti toku** neboli **rovnice kontinuity** a je vlastně zvláštním případem obecně platného **zákonu zachování hmotnosti**. Jak se lze snadno přesvědčit, udává součin  $S \cdot v$  objem kapaliny, jež proteče libovolným příčným průřezem trubice za jednu sekundu. Tato fyzikální veličina se nazývá **objemový průtok**  $Q_V = S \cdot v$  a její fyzikální jednotkou je  $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .

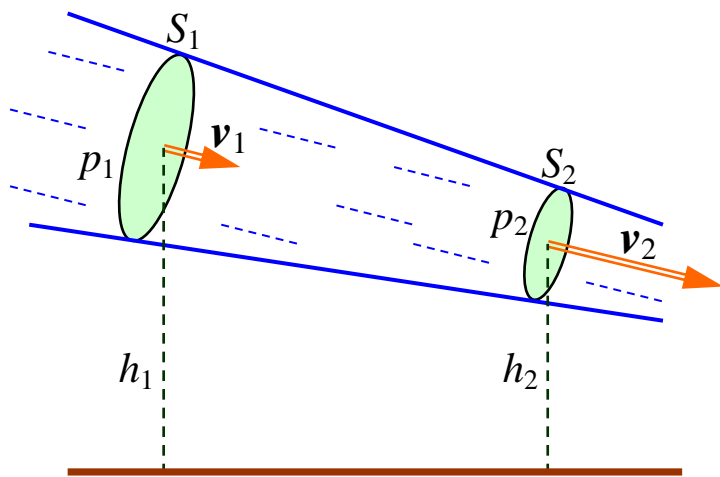
**Pozn.:** S rovnicí spojitosti toku se nesetkáváme jen v nauce o proudění tekutin. Podobná zákonitost platí i při vedení elektrického proudu (zde proudění představuje tok volných elektricky nabitých částic např. průřezem vodiče) a jedním z jejích důsledků je i např. platnost Ohmova zákona.



## 8.2.3 Bernoulliho rovnice

Druhou základní rovnicí, jež platí pro ustálené proudění ideální kapaliny, je **rovnice Bernoulliho**. Tato rovnice vyjadřuje obecné energetické zákonitosti v proudící ideální kapalině. Proudící kapalina je v pohybu  $\Rightarrow$  má tedy jistou nenulovou **energii kinetickou**; může se nacházet vzhledem k zemskému povrchu v různé výšce  $\Rightarrow$  má tedy i určitou **potenciální energii tíhovou**; na kapalinu lze ale též působit v příslušných plošných průřezích proudové trubice tlakovými silami  $\Rightarrow$  **práce těchto tlakových sil** pak **změní** hodnoty těchto energií i celkové energie proudící kapaliny.





Obr. 8.10 – k Bernoulliho rovnici

Zvolme si opět v trubici dva průřezy s obsahy  $S_1$  a  $S_2$  (viz obr. 8.10). Příslušné rychlosti  $v_1$  a  $v_2$  splňují rovnici spojitosti toku (8.8). Výšky průřezů nad zemským povrchem budou  $h_1$  a  $h_2$ . Tlaky v proudící tekutině v těchto průřezech jsou pak  $p_1$  a  $p_2$ .

Lze snadno ukázat, že příslušné tlakové síly budou konat nenulovou práci na kapalině právě tehdy, když tyto tlaky budou různé. **Budou-li tlaky stejné** ( $p_1 = p_2$ ), **tlakové síly práci konat nebudou a kapalina bude mít stálou celkovou energii**. V takovém případě bude platit, že změna pohybové energie musí být stejná jako změna energie polohové (přírůstek jedné bude roven úbytku druhé formy energie).

Na základě tohoto rozboru a s uplatněním známého vztahu rovnosti mezi prací konanou na určitém objektu a přírůstkem energie tohoto objektu (v našem případě proudící tekutiny) lze celkem jednoduše odvodit (ukážeme si to na přednášce), že v obecném případě platí pro veličiny charakterizující proudící tekutinu rovnice ve tvaru

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2 = konst. \quad , \quad (8.9)$$

kde  $\rho$  je hustota kapaliny,  $v_i$  rychlost v bodě, v němž je tlak  $p_i$  a jehož výška nad hladinou nulové potenciální energie (nad povrchem Země) je  $h_i$ .

Jak je celkem na první pohled patrné, nepředstavují jednotlivé členy v Bernoulliho rovnici přímo jednotlivé formy energie (resp. práci tlakových sil), ale jak se lze snadno přesvědčit, mají význam **hustot energií**. Fyzikální jednotkou všech členů v Bernoulliho rovnici je totiž

$$[p] = \left[ \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 \right] = [\rho \cdot g \cdot h] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m}^3} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \quad .$$

Podívejme se nyní na dva typické příklady aplikace Bernoulliho rovnice:

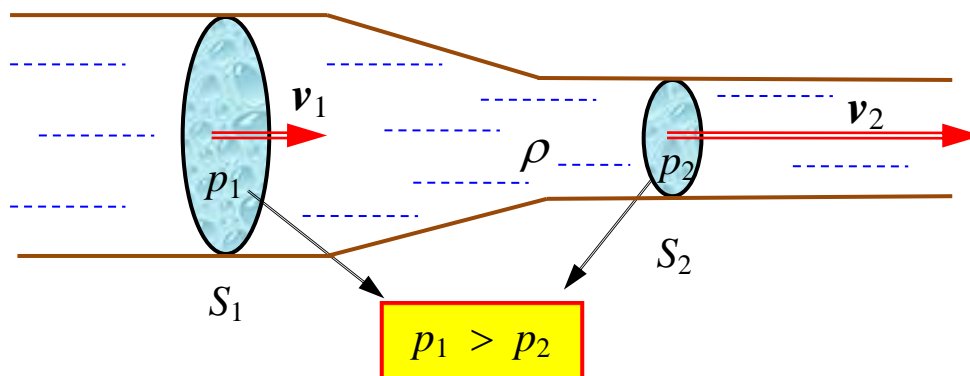
## 1) Proudění kapaliny vodorovnou trubicí

Bude-li kapalina stále proudit **vodorovnou trubicí**, bude výška  $h$  a tudíž i potenciální energie kapaliny stále stejná a Bernoulliho rovnice (8.9) přejde na jednodušší tvar

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 \quad , \quad (8.10)$$

Ze vztahu (8.10) jasně vyplývá, že při proudění kapaliny vodorovnou trubicí (viz obr. 8.11) musí být v užším plošném průřezu  $S_2$  (kde je podle rovnice kontinuity zákonitě vyšší rychlost  $v_2$  proudění) menší tlak  $p_2$  než v průřezu větším.

Je-li totiž  $S_1 > S_2$ , pak  $v_1 < v_2$  a nutně tlak  $p_1 > p_2$ . !!



Obr. 8.11 – tlak ve vodorovné trubicí různého průřezu

Obrazně přirovnáno – molekuly kapaliny se snaží ze širšího průřezu „nacpat“ do užšího místa, což zákonitě vede k nárůstu tlaku v kapalině v místě před zúžením trubice.

Při znalosti obsahů plošných průřezů  $S_1$  a  $S_2$  a při znalosti tlakového rozdílu  $p_1 - p_2$  (lze jej snadno určit k trubicí připojeným manometrem) lze z rovnice (8.10) s použitím rovnice spojitosti (8.8) vypočítat hodnotu rychlostí proudící kapaliny a následně např. i průtok kapaliny potrubím, na čemž jsou založeny různé vodoměry. V rámci řešení úloh na cvičení si odvodíme, že pro velikost rychlosti  $v_1$  kapaliny proudící průřezem o obsahu  $S_1$  platí

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left[ \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right]}} \quad (8.11)$$

## 2) Výtoková rychlost kapaliny malým otvorem z nádoby

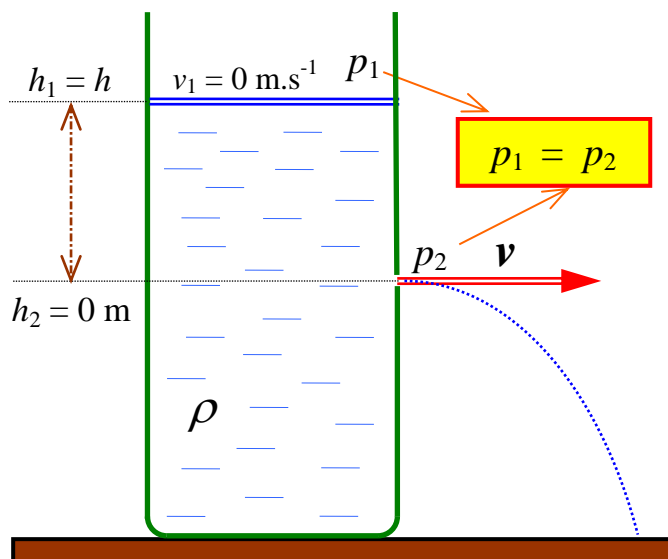
Pomocí Bernoulliho rovnice lze také snadno odvodit, jak velkou rychlostí vytéká kapalina malým otvorem z nádoby, jestliže se tento otvor nachází v hloubce  $h$  pod volnou hladinou tekutiny (viz obr. 8.12 na následující straně). Bude-li totiž výtokový otvor ve srovnání s plochou hladiny dostatečně malý, bude se hladina udržovat ve stále stejné výši a rychlost jejího poklesu bude nulová. Druhou možností je udržovat hladinu v nádobě ve stále stejné výši průběžným doplňováním kapaliny o vyteklé množství. Zaveďme si následující označení veličin, jež poté dosadíme do Bernoulliho rovnice (8.9):

- rychlost poklesu hladiny  $v_1 = 0 \text{ m.s}^{-1}$  ;
- výtoková rychlost  $v_2 = v$  ;
- výška hladiny  $h_1 = h$  ;
- výška výtokového otvoru  $h_2 = 0 \text{ m}$  .

Hladinu nulové potenciální energie v homogenním tíhovém poli Země můžeme volit libovolně, stejně vždy v tomto poli závisí jen na prostém rozdílu výšek (v našem případě výšky hladiny nad výtokovým otvorem).

Podmínka **volné hladiny** je podstatná!

Díky tomu budou tlaky  $p_1$  a  $p_2$  v kapalině u hladiny i ve výtokovém otvoru stejné (oba rovné vnějšímu tlaku vzduchu). Nepochází tedy ke konání práce tlakových sil a pro kapalinu platí zákon zachování energie.



Obr. 8.12 – vytékání kapaliny z nádoby malým otvorem

Na základě této skutečnosti a s použitím výše zvoleného označení veličin upravíme Bernoulliho rovnici

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2$$

na mnohem jednodušší tvar

$$\rho \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 \quad ,$$

z něhož už dostáváme známý **Torricelliho vzorec** pro výtokovou rychlost kapaliny

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad . \quad (8.12)$$

Uvědomte si, že tento výraz je naprosto stejný jako vztah pro rychlost tělesa padajícího volným pádem z výšky  $h$ , což je jen přímým důsledkem platnosti výše zmíněného zákona zachování energie v tomto případě.

**Pozn.:** Stejně jako u volně padajícího tělesa (ve vzduchoprázdnu) nezáleží na jeho hmotnosti, a tedy na tom, z jakého materiálu těleso je, tak i v případě rychlosti vytékající kapaliny nezávisí na druhu kapaliny, tj. na její hustotě. Vzorec (8.12) tuto veličinu neobsahuje.

To ale platí právě a pouze pro případ volné hladiny v nádobě a rovnosti tlaků  $p_1$  a  $p_2$ . Kdyby byl např. tlak  $p_1$  u hladiny větší ( $p_1 > p_2$ ), výtoková rychlost  $v$  by se logicky zvýšila, ale navíc by už na složení kapaliny a tedy i její hustotě záviselo. Lze odvodit (i to si dokážeme), že v takovém případě pro velikost výtokové rychlosti platí

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h + \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \quad . \quad (8.13)$$

- Vzorec (8.13) lze použít i pro případ opačný, kdy u hladiny bude tlak menší ( $p_1 < p_2$ ). V takovém případě naopak dojde k poklesu výtokové rychlosti.
- Ze vztahu (8.13) navíc vyplývá, že příslušné tlakové rozdíly se na výtokové rychlosti více projeví u kapaliny s menší hustotou. Kapalina s vyšší hustotou jakoby se méně ráda tomuto tlakovému rozdílu „poddávala“.

### Příklad:

Z vodní nádrže vyteklo otvorem o průměru 3 cm za 0,5 min 60 ℓ vody. Jak vysoko je volná hladina vody nad středem otvoru?

Určíme objemový průtok  $Q_V$  vody otvorem. Ten musí být při známém objemu 60 ℓ a času 0,5 min

$$\text{roven } Q_V = \frac{V}{t} = \frac{60 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{30 \text{ s}} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} .$$

Potom z rovnice kontinuity vypočítáme výtokovou rychlost vody z nádoby:

$$Q_V = S \cdot v = \pi r^2 \cdot v \Rightarrow v = \frac{Q_V}{\pi \cdot r^2} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}{\pi \cdot (0,015 \text{ m})^2} \doteq 2,83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Hledanou výšku vodní hladiny nakonec určíme na základě Torricelliho vzorce (8.12)

$$h = \frac{v^2}{2 \cdot g} = \frac{(2,83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} \doteq 0,41 \text{ m}$$

**Odpověď:** Volná hladina vody je přibližně 41 cm nad výtokovým otvorem.

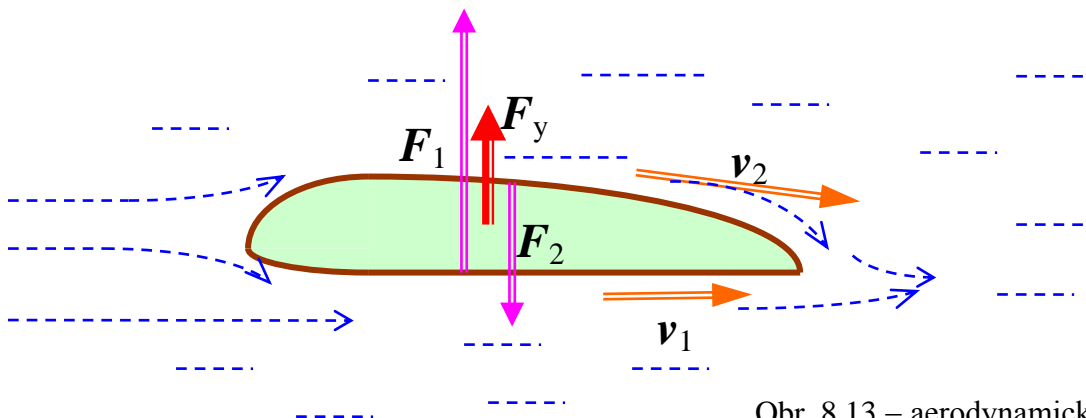


Na základě Bernoulliho rovnice pak lze snadno vysvětlit základní princip létání těles „**těžších než vzduch**“ (správně těles, jejichž střední hustota je vyšší než hustota okolního vzduchu). **Nosné plochy** – křídla – **letadel mají totiž nesouměrný tvar** (viz obr. 8.13 na následující straně). V důsledku toho obtéká vzduch horní část křídla vyšší rychlostí, než jakou obtéká kolem spodní části křídla ( $v_2 > v_1$ ). Proto je tlak  $p_2$  u horní části křídla naopak menší než tlak  $p_1$  u části spodní.

Uvědomte si, že tlakový rozdíl  $p_1 - p_2$  je vždy úměrný rozdílu druhých mocnin rychlostí  $v_2^2 - v_1^2$  proudícího vzduchu, a může proto i při malé diferenci rychlostí nabývat poměrně značných hodnot **!!!**). V důsledku toho i tlaková síla  $F_2$  působící na horní plochu křídla má menší velikost než síla  $F_1$  působící na plochu dolní. Výslednice  $F_y$  těchto dvou sil má velikost

$$F_y = F_1 - F_2$$

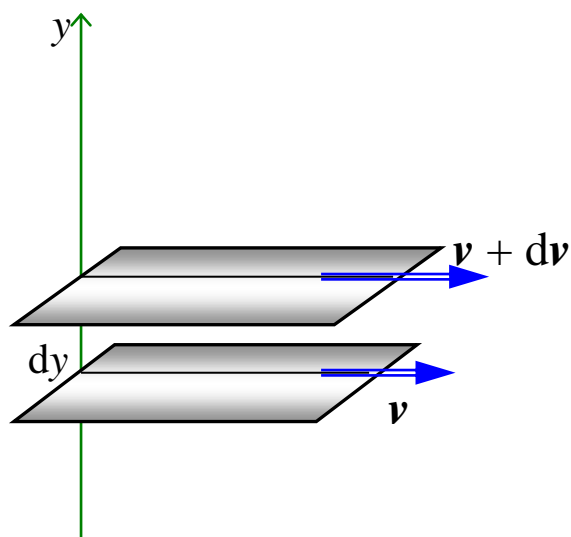
a nazývá se **aerodynamická vztlaková síla  $F_y$** .



Obr. 8.13 – aerodynamická vztlaková síla

## 8.2.4 Odpor prostředí proti pohybu tělesa

Na rozdíl od ideální kapaliny nejsou reálné kapaliny dokonale tekuté. Při laminárním proudění reálné kapaliny trubicí se zvyšuje její rychlost směrem ke středu trubice. Vrstva kapaliny mající vyšší rychlost se snaží zrychlovat vrstvu pomalejší a naopak pomalejší vrstva brzdí rychlejší. Mezi vrstvami kapaliny, jež se pohybují různou rychlostí, vzniká tečné napětí  $\tau$  a dochází tak k jevu nazývanému **vnitřní tření v reálné kapalině**.



Obr. 8.14 – k definici dynamické viskozity

Fyzikální veličinou, jež charakterizuje míru tohoto tření, je **dynamická viskozita**  $\eta$ . Při stálé teplotě proudící kapaliny je vlastně konstantou úměrnosti ve vztahu vyjadřujícím přímou úměrnost mezi velikostí zmíněného tečného napětí  $\tau$  a tzv. rychlostním spádem (neboli gradientem rychlosti)

$$\frac{dv}{dy}$$

Tento rychlostní spád je přitom dán poměrem přírůstku velikosti rychlosti  $dv$  ve vrstvách vzdálených od sebe o  $dy$  (měřeno **kolmo na směr proudění** – viz vedlejší obr. 8.14) právě ku této vzdálenosti  $dy$ . Platí

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy} \quad (8.14)$$

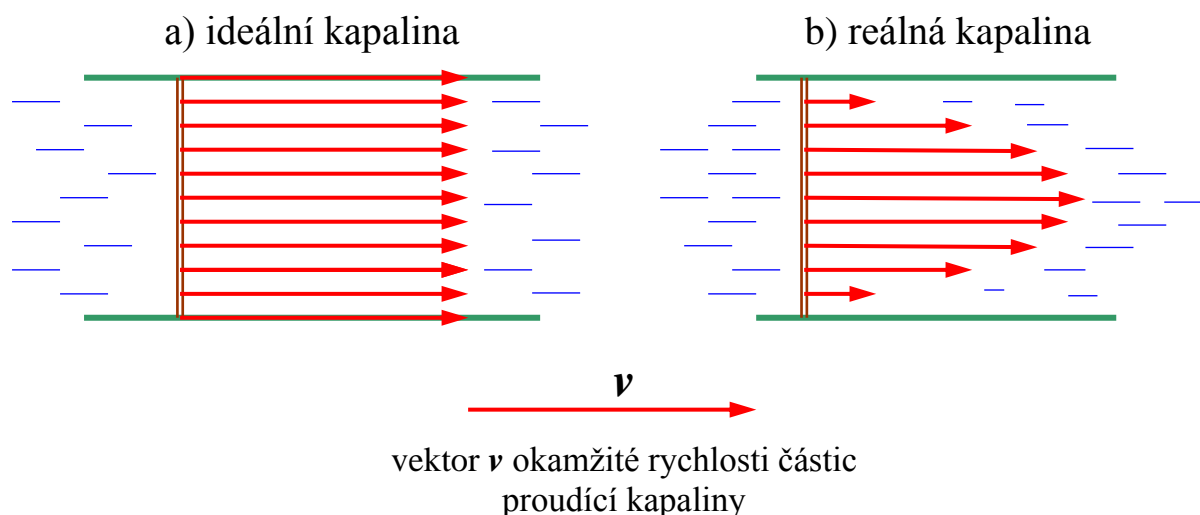
V soustavě SI je jednotkou dynamické viskozity  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ , běžně se používá ekvivalentní jednotka Pa.s.

Podíl dynamické viskozity  $\eta$  a hustoty  $\rho$  dané kapaliny pak definuje další charakteristickou veličinu reálných kapalin **kinematickou viskozitu**

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad . \quad (8.15)$$

Její fyzikální jednotkou v soustavě SI je  $\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Při proudění ideální tekutiny (např. nějakou trubicí) platí, že rychlost částic kapaliny je ve všech místech určitého průřezu naprosto stejná (viz následující obr. 8.15 a)). Proudí-li ale trubicí reálná kapalina, bude rychlost jejího proudění v různých místech daného průřezu různá. **Při laminárním proudění** takové reálné kapaliny je její rychlost u stěny v důsledku tření mezi kapalinou a stěnou trubice prakticky nulová a další vrstvy směrem ke středu trubice se pohybují postupně větší a větší rychlostí. Lze odvodit, že nárůst velikosti rychlosti ve směru kolmém na směr proudění má kvadratický průběh – koncové body vektorů  $\mathbf{v}$  okamžité rychlosti vytvářejí při zobrazení v rovině parabolu (viz obr. 8.15 b)).



Obr. 8.15 – průběh vektoru okamžité rychlosti při proudění kapaliny trubicí

Nachází-li se v proudící tekutině těleso nebo pohybuje-li se těleso vůči kapalině v klidu (hovoříme v obou případech o **vzájemném pohybu tělesa a tekutiny**), dochází k **obtékání těles tekutinou**. U reálných tekutin se pak v důsledku vnitřního tření vytváří odpor proti tomuto vzájemnému pohybu. Tento jev je pak charakterizován hydrodynamickou nebo aerodynamickou **odporovou silou**  $F_o$ .

Při **menších rychlostech** tělesa vůči tekutině je obtékání tělesa tekutinou **laminární**. Odporová síla je poměrně malá a její velikost je přímo úměrná velikosti  $\nu$  vzájemné rychlosti tělesa vůči kapalině

$$F_o \sim \nu \quad .$$

Například pro tělesa tvaru koule platí tzv. Stokesův vztah

$$F_o = 3\pi \eta d v \quad , \quad (8.16)$$

kde  $d$  je průměr koule.

Při **větších rychlostech** vznikají za tělesem víry, obtékání tělesa tekutinou je turbulentní, tlak za tělesem je nižší než před tělesem a právě tento rozdíl tlaků má za důsledek nárůst odporové síly. Její velikost se v takovém případě zvětšuje s druhou mocninou velikosti  $v$  vzájemné rychlosti tělesa vůči kapalině

$$F_o \sim v^2 \quad .$$

**Pro plynná prostředí** pak pro velikost aerodynamické odporové síly odvodil Newton vztah

$$F_o = \frac{1}{2} C \rho S v^2 \quad , \quad (8.17)$$

v němž  $C$  je tzv. součinitel odporu,  $\rho$  hustota prostředí,  $S$  plošný obsah průřezu tělesa kolmého ke směru vzájemného pohybu a  $v$  velikost relativní rychlosti.

Součinitel odporu  $C$  je příkladem fyzikální veličiny nemající fyzikální jednotku:

$$[C] = \frac{[F]}{[\rho] \cdot [S] \cdot [v]^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = 1 \quad .$$

Jeho hodnota závisí na tvaru tělesa. Největší hodnotu součinitele odporu má dutá polokoule, jejíž dutina je obrácena proti směru proudění ( $C = 1,33$ ), naopak nejmenší hodnoty nabývá u těles proudnicového tvaru ( $C = 0,03$ ). Tyto a další příklady hodnot součinitele odporu pro pravidelná tělesa jsou uvedeny na následující tabulce.

Tvar tělesa	Součinitel odporu $C$
Dutá polokoule	1,33
Rovná deska	1,12
Koule	0,48
Vypuklá polokoule	0,34
Proudnicový (aerodynamický)	0,03

Kvadratická závislost odporové síly na velikosti  $v$  rychlosti pohybu tělesa přestává platit, jestliže vzroste tato rychlost **nad rychlost šíření zvuku**  $c$  v daném prostředí. Poměr

$$\frac{v}{c} = M \quad (8.18)$$

se nazývá **Machovo číslo**. Po překročení rychlosti zvuku ( $M > 1$ ) vytváří těleso v prostředí tzv. rázovou vlnu a odporová síla  $F_o$  prudce vzroste.

# 9. KMITAVÝ POHYB HMOTNÉHO BODU

## 9.1 NETLUMENÝ KMITAVÝ POHYB HMOTNÉHO BODU

### 9.1.1 Kmitavý pohyb hmotného bodu a jeho vznik

Pro netlumený kmitavý pohyb hmotného bodu je charakteristické to, že hmotný bod setrvává stále v okolí jednoho určitého bodu, jenž se označuje jako **rovnovážná poloha**. Jedině v tomto místě totiž na hmotný bod nepůsobí žádná síla. Silové působení „pocítí“ hmotný bod až při svém vychýlení z této rovnovážné polohy; přitom platí:

- **velikost** síly, jež je příčinou netlumeného kmitavého pohybu hmotného bodu, se obvykle zvětšuje s rostoucí vzdáleností od rovnovážné polohy,
- **směr** této síly je vždy orientován právě do rovnovážné polohy. Síla (jež bývá nazývána též **silou budící** kmity), se tak vlastně „snaží“ hmotný bod vracet zpátky do jeho rovnovážné polohy.

Opakují-li se **pravidelně** všechny fyzikální veličiny charakterizující kmitání hmotného bodu s časem (poloha, rychlost, zrychlení hmotného bodu), jedná se o **pohyb periodický**, přičemž nejmenší časový úsek, po jehož uplynutí nabývá určitá veličina znovu stejné hodnoty, se nazývá **doba kmitu  $T$  periodického kmitavého pohybu** nebo stručně **perioda**.

Převrácenou hodnotou periody je pak **frekvence  $f$  periodického kmitavého pohybu** udávající počet kmitů, jež proběhnou právě za jednu sekundu. Její fyzikální jednotkou je **hertz**, značka Hz. Pro obě zmíněné veličiny kmitavého pohybu platí dobře známý vztah

$$\boxed{f = \frac{1}{T}} \quad . \quad (9.1)$$

### 9.1.2 Harmonický kmitavý pohyb hmotného bodu

Kmitavé pohyby hmotného bodu mohou mít nejrůznější časový průběh. Mezi nimi zaujímá určité výsadní postavení **harmonický kmitavý pohyb**. Lze říci, že je vůbec nejjednodušším příkladem periodického kmitavého pohybu hmotného bodu. Je pohybem přímočarým, přičemž výchylka  $y$  hmotného bodu z jeho rovnovážné polohy (což je vlastně jeho okamžitá vzdálenost od tohoto bodu) je v případě netlumených harmonických kmitů dána následující závislostí

$$\boxed{y(t) = y_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)} \quad . \quad (9.2)$$



Význam jednotlivých fyzikálních veličin ve vztahu (9.2) je následující:

$y_m$  označuje **amplitudu** (neboli maximální hodnotu) **výchylky** z rovnovážné polohy,

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$  je tzv. **úhlová frekvence** harmonického kmitu,

$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$  se nazývá **fáze**, jež umožní určit hodnotu výchylky hmotného bodu v čase  $t$ ,

$\varphi_0$  je konstanta nazývaná **počáteční fáze**; ta potom umožní určit počáteční výchylku hmotného bodu  $y_0$  v čase  $t_0 = 0$  s.

Netlumený harmonický kmitavý pohyb se tedy odehrává na úsečce v mezích  $\langle -y_m ; +y_m \rangle$ , typickým příkladem takového pohybu je například kmitání tělesa na pružině (pokud ovšem pomíneme odpor prostředí proti pohybu tělesa, jenž způsobuje postupné utlumení kmitů).

Funkční závislost (9.2) okamžité výchylky harmonického kmitavého pohybu na čase umožňuje při studiu těchto pohybů využít určité souvislosti s rovnoměrným pohybem hmotného bodu po kružnici. Ke znázornění harmonického pohybu hmotného bodu lze například použít metodu tzv. **rotujícího fázoru**.

Tímto geometrickým fázorem je

vlastně polohový vektor  $\vec{OM}$  bodu  $M$ , jenž koná rovnoměrný pohyb po kružnici o poloměru rovném amplitudě výchylky  $y_m$  se **stálou úhlovou rychlostí**  $\omega$  (viz vedlejší obr. 9.1).

A tak okamžitou výchylku  $y$  harmonického kmitavého pohybu lze velice jednoduše znázornit jako  $y$ -ovou souřadnici polohového vektoru  $\vec{OM}$ .

Pro úhel  $\varphi$  musí nutně platit

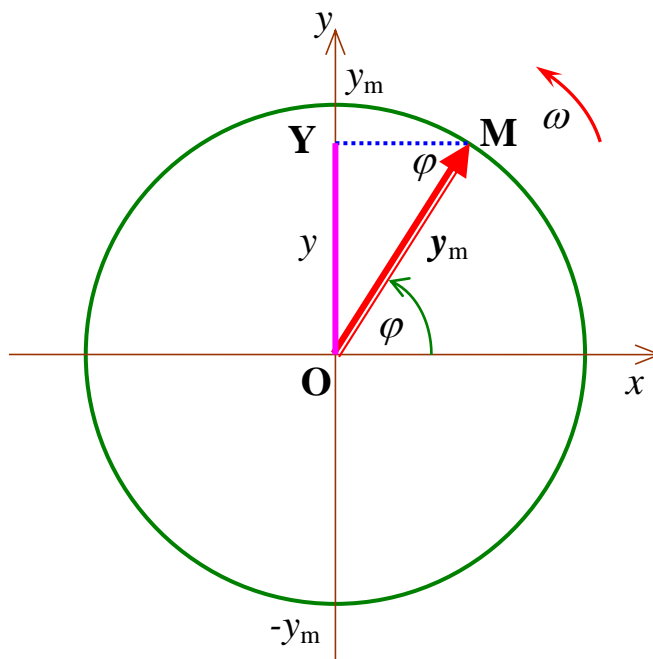
$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$$

(pohyb bodu  $M$  je přeci rovnoměrný !!!)  
a jelikož je

$$y = OY = OM \cdot \sin \varphi,$$

dostáváme se k rovnici výchylky harmonických kmitů ve výše uvedeném tvaru (9.2)

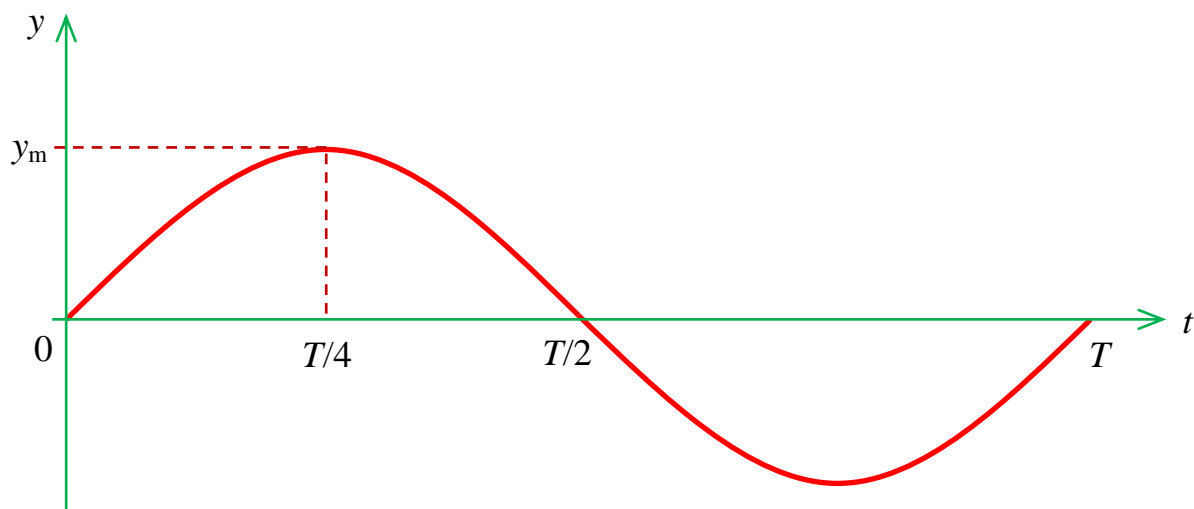
$$y(t) = y_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$



Obr. 9.1 – k odvození vztahu pro okamžitou výchylku harmonického kmitavého pohybu

Toto vzájemně jednoznačné zobrazení mezi harmonickým kmitavým pohybem a rovnoměrným pohybem po kružnici umožňuje zpětně „vytáhnout“ přímočarý kmitavý pohyb do roviny, čehož se využívá např. při skládání kmitavých pohybů (obecně při skládání jakýchkoli dějů majících harmonický – sinusový – průběh).

Graficky pak časovou závislost (9.2) okamžité výchylky harmonického kmitavého pohybu pro  $\varphi_0 = 0$  charakterizuje sinusoida procházející počátkem (viz následující obr. 9.2).



Obr. 9.2 – závislost výchylky  $y$  harmonického kmitavého pohybu na čase

### 9.1.3 Rychlost a zrychlení harmonického kmitavého pohybu

**Rychlost** a **zrychlení harmonického kmitavého pohybu** hmotného bodu mají tutéž periodu  $T$  jako výchylka  $y$  a jejich časové průběhy získáme na základě známých vztahů z mechaniky hmotného bodu

$$v = \frac{dy}{dt} \quad \text{a} \quad a = \frac{dv}{dt} \quad .$$

Po krátkém výpočtu (proved'te si sami !!!), dostáváme pro okamžitou rychlost vyjádření

$$v(t) = y_m \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (9.3)$$

a pro okamžité zrychlení

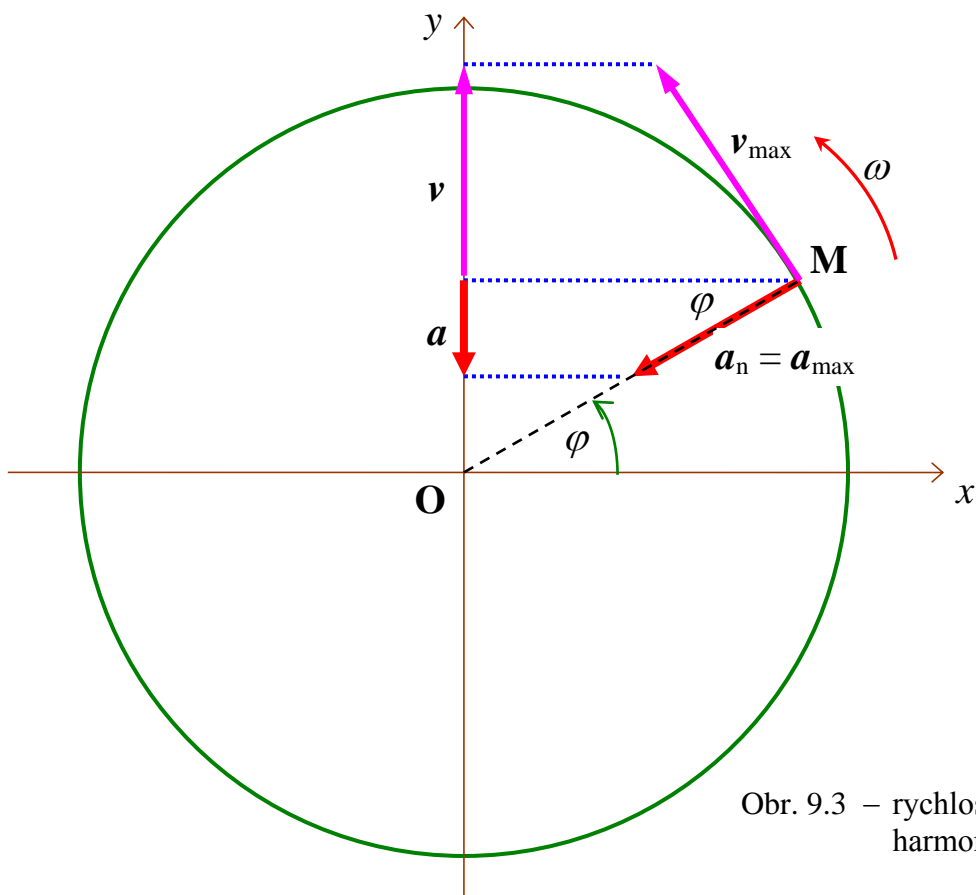
$$a(t) = -y_m \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \quad . \quad (9.4)$$

V těchto výrazech přitom představuje součin  $v_{\max} = y_m \omega$  tzv. **amplitudu rychlosti** a součin  $a_{\max} = y_m \omega^2$  tzv. **amplitudu zrychlení**. Ze vztahů (9.3) a (9.4) pak vyplývá i potvrzení známé skutečnosti, že největší rychlost má hmotný bod právě při průchodu rovnovážnou polohou a naopak nulovou v amplitudě výchylky  $y_m$ ; největšího zrychlení (tj. největší změny velikosti rychlosti) nabývá pohyb hmotného bodu naopak v amplitudách výchylky, nulová je tato veličina v rovnovážné poloze, což je v souladu i s velikostí budící síly, jež je příčinou pohybu.

Porovnáním vztahů pro časovou závislost okamžité výchylky (9.2) a okamžitého zrychlení (9.4) dále vidíme, že mezi oběma veličinami platí jednoduchá souvislost

$$a = -y \cdot \omega^2 \quad . \quad (9.5)$$

**Pozn.:** I pro okamžitou rychlost a okamžité zrychlení harmonického pohybu hmotného bodu lze využít fázorových diagramů, jak dokládá i následující obr. 9.3. Okamžité zrychlení je v tomto případě kolmým průmětem dostředivého zrychlení bodu **M**, jenž obíhá kružnici se stálou úhlovou rychlostí  $\omega$ .



Obr. 9.3 – rychlost a zrychlení harmonického kmitavého pohybu

### 9.1.4 Dynamika netlumeného harmonického pohybu hmotného bodu

Chceme-li určit sílu, jež je příčinou netlumených harmonických kmitů, vyjdeme z poslední rovnice (9.5) a zrychlení pohybu dosadíme do Newtonova II. pohybového zákona (zákona síly). Platí

$$F = m \cdot a = m \cdot (-y \cdot \omega^2) = -(m \cdot \omega^2) \cdot y \quad .$$

Vidíme, že z hlediska dynamiky je harmonický kmitavý pohyb působen silou **mající velikost přímo úměrnou výchylce**  $y$  z rovnovážné polohy. **Směr** působící síly pak charakterizuje znaménko *minus* – síla je vždy orientována opačně než výchylka (a tedy skutečně **směřuje pokaždé do rovnovážné polohy**). Formálně lze tedy psát (s použitím vektorové symboliky)



$$\boxed{F = -k \cdot y} \quad , \quad (9.6)$$

kde konstanta

$$k = m \cdot \omega^2 \quad . \quad (9.7)$$

Jak již bylo řečeno, harmonické kmity vykonává např. těleso zavěšené na pružině. Konstanta úměrnosti  $k$  se v takovém případě nazývá **tuhost pružiny**. Fyzikální jednotkou této veličiny je jeden  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$  a její číselná hodnota vlastně udává velikost síly, jež působí na hmotný bod při jednotkové výchylce ( $y = 1 \text{ m}$ ).

**Pozn.:** Případ tělesa o hmotnosti  $m$  konajícího netlumený harmonický kmitavý pohyb působením síly (9.6) bývá v literatuře také označován jako **lineární oscilátor** → velikost síly je totiž přímo úměrná právě první mocnině příslušné výchylky. Samotnou závislost (9.2) výchylky na čase bychom dostali právě řešením rovnice (9.6) – ve skutečnosti se jedná o lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty bez pravé strany (tedy rovnici homogenní) a výsledkem matematického postupu je opravdu sinusový průběh okamžité výchylky a rozbor řešení potvrdí i fyzikální obsah všech veličin obsažených v této závislosti tak, jak jsou charakterizovány v článku **9.1.2**.

Úhlovou frekvenci kmitů harmonického oscilátoru lze snadno vyjádřit ze vztahu (9.7) jako

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad . \quad (9.8)$$

Pro periodu kmitů harmonického oscilátoru pak musí platit

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad . \quad (9.9)$$

### Příklad:

V jakých časech během první půlperrody dosáhne hmotný bod konající harmonický netlumený pohyb výchylku rovnající se přesně polovině amplitudy výchylky, prochází-li v čase  $t_0 = 0 \text{ s}$  právě rovnovážnou polohou? Perioda kmitů  $T = 6 \text{ s}$ .

---

Prochází-li hmotný bod v čase  $t_0 = 0 \text{ s}$  právě rovnovážnou polohou, je jeho počáteční fáze  $\varphi_0$  nulová a rovnice výchylky (9.2) přejde na jednodušší tvar  $y = y_m \cdot \sin \omega t$  .

Jelikož má být  $y = \frac{1}{2} y_m$  , získáme po dosazení do rovnice pro výchylku rovnici  $\sin \omega t = \frac{1}{2}$  .

Tato rovnice má v první půlperiodě dvě řešení:  $\omega t_1 = \frac{\pi}{6}$  a  $\omega t_2 = \frac{5\pi}{6}$  .

Jelikož platí  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  , dostáváme po krátké úpravě:  $t_1 = \frac{T}{12} = 0,5 \text{ s}$  ;  $t_2 = \frac{5}{12} T = 2,5 \text{ s}$  .

**Odpověď:** Hledané časy jsou  $t_1 = 0,5 \text{ s}$  (hmotný bod se v tomto případě pohybuje z rovnovážné polohy směrem k amplitudě výchylky) a  $t_2 = 2,5 \text{ s}$  (hmotný bod se již vrací zpět do rovnovážné polohy).

## 9.1.5 Energie harmonického pohybu

Jak si ukážeme v následujícím výkladu dochází při netlumeném harmonickém kmitavém pohybu také k periodickým změnám jednotlivých forem energie (jak kinetické, tak i potenciální).

Hmotný bod koná kmitavý pohyb, jeho **kinetickou energii** proto můžeme snadno vyjádřit z obecně platného vztahu  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  dobře známého z mechaniky pohybu hmotného bodu, v němž za okamžitou rychlost  $v$  dosadíme z výrazu (9.3). Platí

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot y_m^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_0) \quad . \quad (9.10)$$

Jak je ze získaného vztahu patrné, dosahuje kinetická energie  $E_k$  hmotného bodu při netlumeném kmitání maximální hodnoty právě při jeho průchodu rovnovážnou polohou a naopak nejmenší – nulové hodnoty – nabývá v amplitudě výchylky.

Hodnota **potenciální energie**  $E_p$  harmonického kmitavého pohybu závisí především na vlastnostech pružného prostředí (např. na tuhosti pružiny), v němž se hmotný bod pohybuje. Polohovou energii určíme postupem obvyklým ve všech silových polích, a to tak, že položíme její přírůstek rovný práci, kterou je nutno vykonat, abychom hmotný bod dostali z jeho rovnovážné polohy do jisté výchylky  $y$  (například při natahování nebo stlačování pružiny, na níž hmotný bod kmitá). Práci musíme konat silou  $F = +k \cdot y$  tedy stejně velkou, jen opačně orientovanou, než je síla způsobující harmonické kmitání. Výpočet je třeba provést integrací

$$W = \int_0^y F dy = \int_0^y ky dy = k \int_0^y y dy = \frac{1}{2} k \cdot y^2 = \Delta E_p \quad .$$

Je celkem pochopitelné, že v rovnovážné poloze volíme nulovou hodnotu polohové energie. Tím pádem je polohová energie hmotného bodu v určité výchylce  $y$  přímo rovna výše vypočítané práci  $W$ . Dosadíme-li do výsledku  $\frac{1}{2} k \cdot y^2$  za okamžitou výchylku  $y$  hmotného bodu z výrazu (9.2), dostáváme, že potenciální energie harmonického oscilátoru

$$E_p = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}m \cdot y_m^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi_0) \quad . \quad (9.11)$$

Vidíme, že potenciální energie  $E_p$  logicky nabývá své maximální hodnoty v amplitudě  $y_m$  výchylky; nejmenší, a to nulová, je skutečně v rovnovážné poloze.

Ze vztahů (9.10) a (9.11) vyplývá navíc i to, že obě formy energie mají periodický průběh, obě veličiny se ale mění s periodou  $\frac{T}{2}$  (což lze snadno matematicky zdůvodnit druhou mocninou goniometrických funkcí  $\cos^2(\omega t + \varphi_0)$ , resp.  $\sin^2(\omega t + \varphi_0)$ ).

**Celková energie harmonického oscilátoru** je pak dána součtem jeho kinetické a potenciální energie  $E = E_k + E_p$ . Dosadíme-li do tohoto součtu příslušné výrazy pro jednotlivé energie a uvědomíme-li si, že platí známá poučka

$$\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \sin^2(\omega t + \varphi_0) = 1 \quad ,$$

dostaneme výraz pro celkovou energii harmonického oscilátoru ve tvaru

$$E = \frac{1}{2} m \cdot y_m^2 \cdot \omega^2 \quad . \quad (9.12)$$

**Celková energie netlumeného kmitavého pohybu je tedy konstantní.** Pro daný oscilátor (např. určitou hmotnost  $m$  kmitající s úhlovou frekvencí  $\omega$  (9.8) na pružině tuhosti  $k$ ) je závislá pouze – a to přímo úměrně – **na druhé mocnině amplitudy výchylky**  $y_m^2$ .



**Příklad:**

Hmotný bod vykonává harmonické kmity s amplitudou výchylky 2 cm, přičemž celková energie jeho pohybu je 0,3 mJ. Určete okamžitou výchylku  $y$ , při níž na hmotný bod působí síla o velikosti 22,5 mN.

Celková energie kmitavého pohybu hmotného bodu je .....  $E = \frac{1}{2} m \cdot y_m^2 \cdot \omega^2$  (1)

Ve výchylce o velikosti  $y$  na hmotný bod působí síla, jejíž velikost (absolutní hodnota) ...  $F = k \cdot y$

Dosadíme-li do tohoto vztahu pro sílu za konstantu  $k = m \cdot \omega^2$ , dostaneme .....  $F = m \cdot \omega^2 \cdot y$  (2)

Porovnáním rovnic (1) a (2) získáváme po zkrácení výraz

$$\frac{E}{F} = \frac{y_m^2}{2y} \quad ,$$

jehož následnou úpravou dostáváme hledanou hodnotu výchylky

$$y = \frac{y_m^2 \cdot F}{2E} = \frac{2,25 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot (0,02 \text{ m})^2}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \text{ J}} = 0,015 \text{ m} = 1,5 \text{ cm}$$

**Odpověď:** Síla o velikosti 22,5 mN působí na hmotný bod právě při okamžité výchylce 1,5 cm z rovnovážné polohy.

### 9.1.6 Skládání kmitavých pohybů

Jestliže koná hmotný bod současně několik kmitavých pohybů s okamžitými výchylkami (v daném čase  $t$ )  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ , bude okamžitá výchylka  $y$  výsledného kmitavého pohybu v témž čase  $t$  dána **vektorovým součtem** výchylek všech pohybů. Platí zde známý **princip superpozice pohybů**

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \dots + y_n(t) \quad . \quad (9.13)$$

Přitom výsledný pohyb může být poměrně složitý. Např. už u dvou skládaných kmitů původně různých směrů může být výsledný pohyb křivočarý a neperiodický – hmotný bod se v takovém případě pohybuje po neuzavřené křivce.

V dalším výkladu se zaměříme na nejjednodušší případ skládání kmitavých pohybů, a to na kmitavé pohyby **stejněho směru**. Jestliže koná hmotný bod současně několik kmitavých pohybů, jež se odehrávají na jedné a téže přímce, bude i výsledný pohyb přímočarý na téže přímce a okamžitou polohu (výchylku)  $y$  hmotného bodu v daném čase  $t$  získáme prostým součtem všech okamžitých výchylek  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  jednotlivých skládaných pohybů (pochopitelně v témž čase  $t$ )

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \dots + y_n(t) \quad . \quad (9.14)$$

Průběh okamžité výchylky  $y$  na čase výsledného pohybu tak bude závislý na amplitudách, frekvencích a počátečních fázích jednotlivých skládaných kmitů a obecně může být i u kmitů stejného směru velmi složitý a nemusí mít ani periodický charakter.

**Pouze v jednom jediném případě a to tehdy, když skládáme harmonické kmity téže frekvence  $\omega$ , dostaneme opět jako výsledek harmonické kmitání stejné frekvence  $\omega$ .**

Pro jednoduchost se nadále zabývejme skládáním jen **dvou harmonických kmitavých pohybů** stejného směru. Pro okamžité výchylky obou kmitavých pohybů platí vztahy

$$y_1(t) = y_{m1} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_{o1}) \quad ,$$

$$y_2(t) = y_{m2} \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_{o2}) \quad .$$

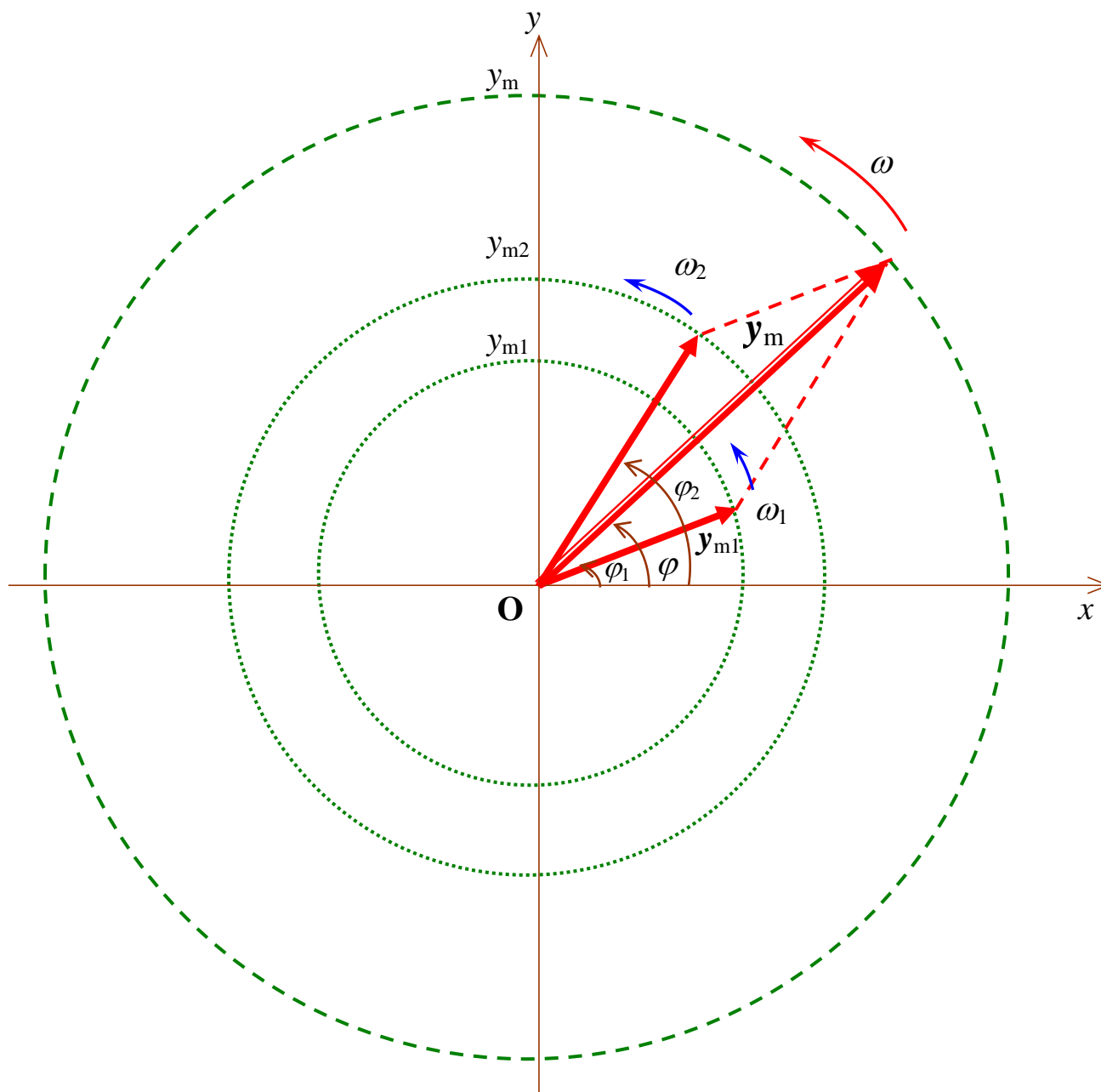
Jelikož jsou oba pohyby omezené amplitudou příslušné výchylky, lze snadno usoudit, že omezený bude i výsledný pohyb. Přitom pro velikost (absolutní hodnotu) amplitudy výchylky  $y_m$  výsledného pohybu bude splněn vztah

$$y_{m1} + y_{m2} \geq y_m \geq |y_{m1} - y_{m2}| \quad . \quad (9.15)$$

Pro charakter výsledného pohybu je vždy rozhodující vztah mezi frekvencemi  $f_1, f_2$  (resp. úhlovými frekvencemi  $\omega_1, \omega_2$ ) obou skládaných pohybů. Tady mohou nastat pouze dva případy: obě frekvence jsou buď stejné, nebo různé.

**A)**  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

Skládáme-li dva kmitavé pohyby stejné (úhlové) frekvence, bude i výsledný pohyb kmitavý a navíc s touž frekvencí. Za každou celou periodu  $T$  se totiž zopakuje stejná situace, jaká byla na začátku skládání pohybů v čase  $t_0 = 0$  s .



Obr. 9.4 – fázorový diagram pro skládání dvou kmitavých pohybů

Ke znázornění dané situace se přímo nabízí využití fázorového diagramu – viz obr. 9.4. Výsledný rotující fázor  $y_m$  získáme jako orientovanou úhlopříčku ve vektorovém rovnoběžníku, jehož strany tvoří právě skládané fázory  $y_{m1}$  a  $y_{m2}$ . Budou-li frekvence skládaných kmitů stejné ( $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ), bude se rovnoběžník otáčet se stálou úhlovou rychlostí  $\omega$  a nebude se přitom měnit jeho tvar – amplituda výsledného pohybu zůstane stále stejná, evidentně pro ni platí vztah (9.15) vyjadřující vlastně trojúhelníkovou nerovnost a výsledný složený pohyb bude skutečně harmonickým kmitem s původní úhlovou frekvencí  $\omega$ .



Velikost amplitudy výchylky  $y_m$  výsledného kmitu přitom závisí pouze na fázovém rozdílu

$$\Delta\varphi = \varphi_{o2} - \varphi_{o1}$$

obou skládaných kmitů.

→ Jestliže bude tento fázový rozdíl  $\Delta\varphi = 0$  (což znamená stejnou počáteční fázi obou kmitů), bude amplituda výchylky  $y_m$  složeného kmitání **největší** a bude rovna součtu amplitud obou skládaných kmitů

$$y_m = y_{m1} + y_{m2} \quad . \quad (9.16)$$

V takovém případě budou mít skládané fázory  $y_{m1}$  a  $y_{m2}$  ve fázorovém diagramu 9.4 souhlasný směr a tentýž směr a velikost danou vztahem (9.16) bude mít i výsledný fázor  $y_m$ .

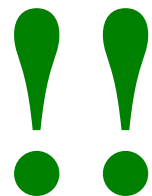
→ Bude-li fázový rozdíl  $\Delta\varphi = \pi$  rad (to nastává pouze v případě opačné počáteční fáze obou skládaných kmitů), vychází amplituda výchylky složeného kmitání naopak **nejmenší**, a sice rovna rozdílu amplitud obou kmitů

$$y_m = |y_{m1} - y_{m2}| \quad . \quad (9.17)$$

Nyní budou mít skládané fázory  $y_{m1}$  a  $y_{m2}$  ve fázorovém diagramu 9.4 opačný směr a velikost výsledného fázoru  $y_m$  bude skutečně dána absolutní hodnotou rozdílu (9.17). Směr výsledného fázoru pak bude souhlasit s větším z obou skládaných fázorů. Jestliže navíc u tohoto případu dojde k situaci, že amplitudy dvou původních skládaných kmitů jsou stejné  $y_{m1} = y_{m2}$ , bude amplituda výchylky výsledného kmitu (ale i každá okamžitá výchylka v libovolném čase) nulová a **kmitání zanikne**.

## B) $\omega_1 \neq \omega_2$

Skládáme-li dva harmonické kmitavé pohyby s různou (úhlovou) frekvencí, **nebude už nikdy** výsledný pohyb harmonickým kmitavým pohybem. Ve fázorovém diagramu 9.4 se bude v takovém případě tvar rovnoběžníku neustále měnit a tím pádem se bude měnit i velikost  $y_m$  amplitudy výsledného pohybu. Obrázek, jenž vidíme na začátku, se už nikdy zopakovat nemusí a o periodicitě výsledného pohybu nemůže být v takovém případě ani řeč.

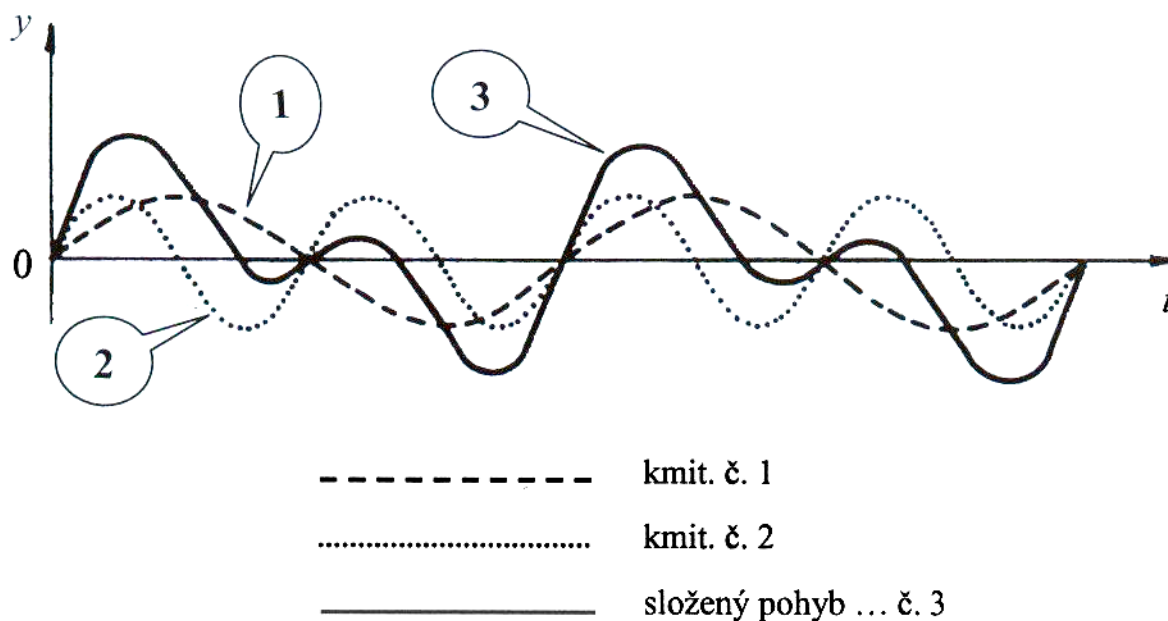


To, jestli zůstane výsledný pohyb alespoň pohybem periodickým, závisí na vzájemném vztahu mezi periodami  $T_1$  a  $T_2$  (resp. frekvencemi) obou skládaných pohybů.

Budou-li mít totiž tyto dvě veličiny společný celočíselný násobek, zachová se alespoň periodicitu děje, výsledný pohyb se pak bude konat vždy **s periodou, jež je nejmenším společným násobkem period obou pohybů**.

**Např.:** První ze skládaných kmitů má periodu  $T_1 = 3$  s, druhý pak  $T_2 = 5$  s. Je patrné, že po každých 15 s se zopakuje vždy stejná situace – první pohyb za tuto dobu proběhne pětkrát, druhý třikrát a vše začíná „nanovo“. Perioda výsledného složeného pohybu je tedy v tomto případě  $T = 15$  s.

Na následujícím obr. 9.5 je pak graficky zpracován časový průběh výchylky pohybu, jenž byl složen ze dvou harmonických kmitů, jejichž periody jsou ve vzájemném poměru 2:1.



Obr. 9.5 – skládání dvou harmonických kmitavých pohybů různých frekvencí; výsledkem je periodický pohyb

Jak je z tohoto obrázku patrné, je výsledný pohyb periodický s periodou stejnou, jako je perioda prvního pohybu (dvojka je skutečně nejmenším společným násobkem čísel jedna a dvě). Výsledný pohyb však není už pohybem harmonickým – časový průběh výchylky není jednoduchou závislostí, kterou by charakterizovala „prostá sinusoida“, ale je dán už složitější křivkou. I její tvar bude navíc závislý na fázovém posunu obou pohybů. Ten je v situaci znázorněné na obr. 9.5 nulový.

Budeme-li ale skládat dva kmitavé pohyby, jejichž periody nebudou mít celočíselný společný násobek (např.  $T_1 = 3$  s,  $T_2 = \sqrt{5}$  s), **nezachová se ani periodicitu děje**, výsledný pohyb pak bude **aperiodický**. Jediné, co zůstane v platnosti, bude to, že výsledný pohyb je stejně jako skládané pohyby pohybem omezeným, přímočarým; pro amplitudu výchylky tohoto pohybu pak samozřejmě bude platit vztah (9.15).

## 9.2 TLUMENÝ KMITAVÝ POHYB HMOTNÉHO BODU

### 9.2.1 Dynamika tlumeného kmitavého pohybu

V dosavadním výkladu jsme se zaměřili na ideální případ kmitání harmonického oscilátoru, u něhož nedochází k poklesu amplitudy, tedy na kmitání netlumené. U skutečných oscilátorů se však amplituda kmitů postupně zmenšuje a s tím se zmenšuje i celková energie oscilátoru. Příčinou může být (např. u tělesa kmitajícího na pružině) odpor prostředí proti pohybu tělesa, případně vlastnosti oscilátoru samého. V takovém případě hovoříme o **kmitání tlumeném**.

Kromě „budící“ síly  $F_h$ , jež je příčinou vzniku kmitavého pohybu, působí v takovém případě též druhá síla – síla tlumící – jejíž **velikost** závisí obvykle přímo úměrně na velikosti rychlosti kmitavého pohybu. Přitom pro **orientaci** této síly je charakteristické, že míří **proti směru pohybu** (proti vektoru okamžité rychlosti) kmitajícího tělesa. Lze ji proto psát ve tvaru

$$\mathbf{F}_o = -R_m \cdot \mathbf{v} \quad , \quad (9.18)$$

přičemž veličina  $R_m$  představuje tzv. **mechanický odpor prostředí**.

Určení kinematických veličin tohoto pohybu (např. určení závislosti okamžité výchylky  $y$  tlumeného kmitu na čase) vyžaduje znalost řešení diferenciální rovnice vycházející z II. Newtonova zákona (zákona síly)

$$\mathbf{F}_h + \mathbf{F}_o = m \cdot \mathbf{a} \quad . \quad (9.19)$$

Po krátké úpravě totiž dostaneme

$$\begin{aligned} -k \cdot y - R_m \cdot v &= m \cdot a \quad . \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} + R_m \cdot \frac{dy}{dt} + k \cdot y &= 0 \quad / : m \quad . \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{R_m}{m} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} \cdot y &= 0 \quad . \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\delta \cdot \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 \cdot y = 0} \quad . \quad (9.20)$$

Poslední rovnice (9.20) představuje pohybovou rovnici námi studovaného pohybu, jejímž řešením získáme závislost okamžité výchylky tlumených kmitů na čase  $y = f(t)$  . Jedná se – jak je na první pohled patrné – o homogenní diferenciální rovnici druhého řádu se dvěma konstantními koeficienty:

$$\rightarrow \delta = \frac{R_m}{2m} \quad \dots \text{tzv. } \mathbf{koeficient \acute{u}tlumu};$$

$$\rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \dots \text{což je } \mathbf{frekvence vlastních} \text{ (tedy netlumených) } \mathbf{kmitů}.$$

Jak se můžete sami snadno přesvědčit, fyzikální jednotka obou těchto veličin je stejná .....  $s^{-1}$ .

Podle teorie diferenciálních rovnic se řešení (9.20) provádí pomocí tzv. charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (9.21)$$

a jeho konečný tvar

$$y(t) = C_1 \cdot e^{-\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{-\lambda_2 t} \quad (9.22)$$

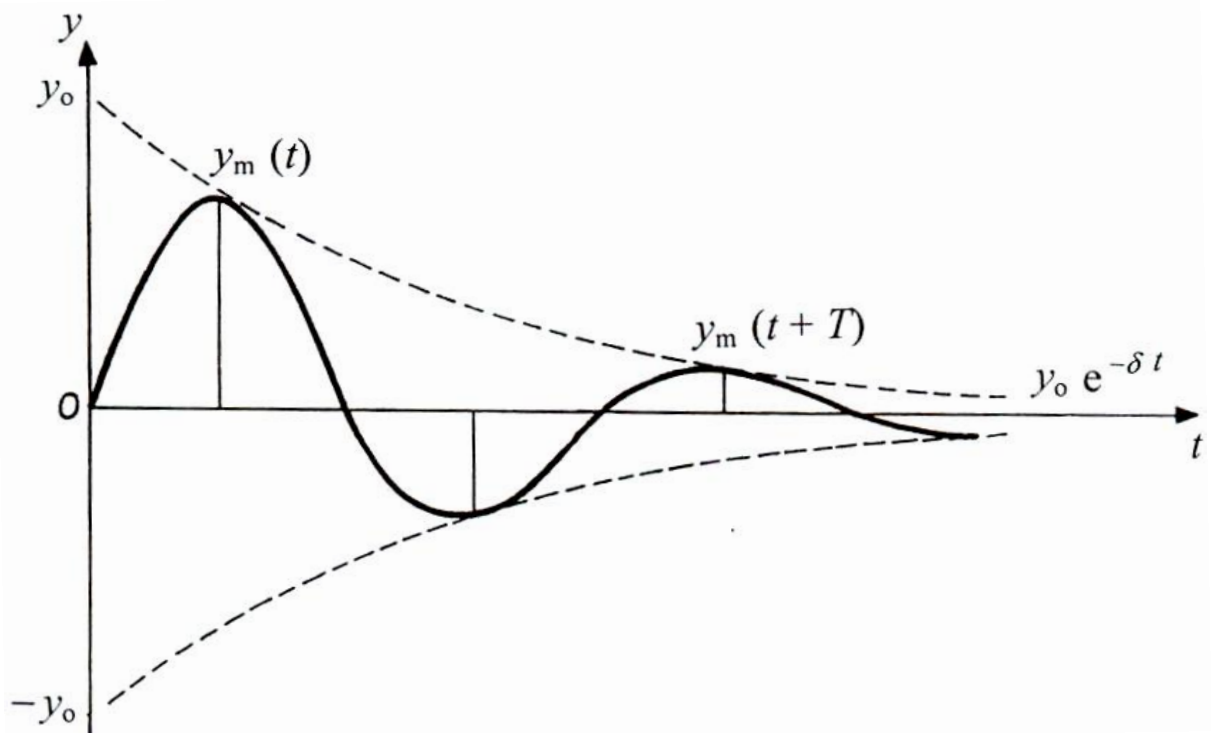
závisí právě na znaménku diskriminantu

$$D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2$$

charakteristické rovnice (9.21). Zde mohou nastat – jak známo – tři rozdílné případy podle toho, zda určující roli při pohybu sehrává budící prvek (ten je reprezentovaný právě frekvencí vlastních, netlumených kmitů  $\omega_0$ ) nebo prvek tlumící (ten vyjadřuje zase koeficient útlumu  $\delta$ ):

### I. $\delta^2 < \omega_0^2$

Kořeny charakteristické rovnice  $\lambda_{1,2}$  jsou v takovém případě dvě komplexně sdružená čísla, řešením (9.22) pohybové rovnice je komplexní exponenciální funkce. Z teorie funkcí komplexní proměnné ale vyplývá, že právě komplexní exponenciála je funkcí periodickou. Z fyzikálního hlediska „má navrch“ buzení kmitů nad tlumením, pohyb zůstává **pohybem kmitavým**, ale je **tlumený**. Přitom pokles amplitudy tlumeného kmitání je právě exponenciální – tento případ dokumentuje následující obr. 9.6.



Obr. 9.6 – harmonický kmitavý pohyb tlumený

Je-li amplituda kmitů v čase  $t_0 = 0$  s rovna  $y_0$ , vyjadřuje tento pokles amplitudy závislost

$$y_m = y_0 \cdot e^{-\delta t} \quad . \quad (9.23)$$

Samotná okamžitá výchylka tlumených harmonických kmitů se v závislosti na čase mění podle vztahu

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin \omega t \quad , \quad (9.24)$$

v němž  $\omega$  je úhlovou frekvencí tlumených kmitů, pro níž platí

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad . \quad (9.25)$$

Jak je z posledního vztahu patrné, tlumení pohybu se projeví na zmenšení (úhlové) frekvence kmitů ve srovnání s kmity netlumenými u téhož oscilátoru. Perioda  $T$  tlumených kmitů je naopak delší než u kmitů netlumených a s rostoucím tlumením se postupně dále prodlužuje.

Pokles amplitudy výchylky během jedné periody pak charakterizuje fyzikální veličina **útlum**

$A$ . Je dán poměrem dvou za sebou následujících amplitud

$$A = \frac{y_m(t)}{y_m(t+T)} = \frac{y_0 \cdot e^{-\delta t}}{y_0 \cdot e^{-\delta(t+T)}} = e^{\delta T} \quad . \quad (9.26)$$

Přirozený logaritmus útlumu

$$\lambda = \ln A = \delta \cdot T \quad (9.27)$$

se pak nazývá **logaritmický dekrement** tlumených kmitů.

## II. $\delta^2 = \omega_0^2$ a III. $\delta^2 > \omega_0^2$

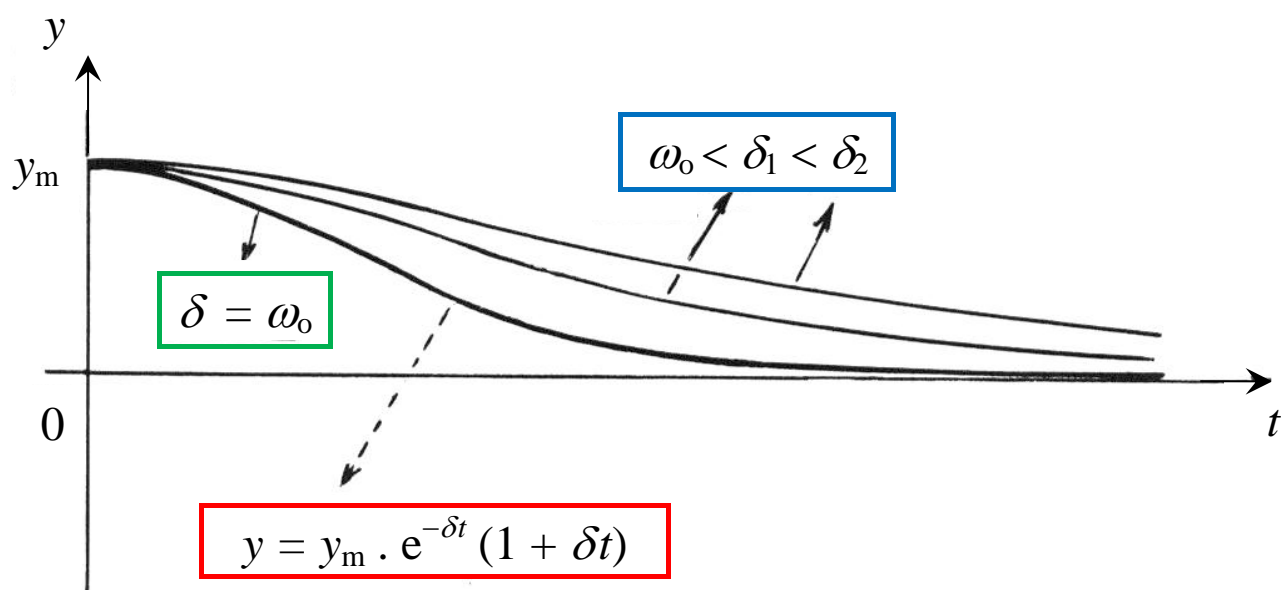
Kořeny charakteristické rovnice  $\lambda_{1,2}$  jsou v takovém případě reálná čísla (buď dostáváme jeden dvojnásobný kořen nebo dva různé kladné kořeny). Řešením (9.22) pohybové rovnice (9.20) je tedy v těchto dvou případech exponenciální funkce s proměnnou v reálném oboru, což je ale vždy funkce neperiodická – říkáme, že takový pohyb je **aperiodický**. Když se na to podíváme opět z fyzikálního hlediska má v těchto situacích „navrch“ tlumení kmitů nad jejich buzením. Hmotný objekt konající takový pohyb se po vychýlení z rovnovážné polohy už do ní (teoreticky) nikdy nevrátí – závislost výchylky  $y$  na čase charakterizuje exponenciální funkce limitně se blížící časové ose (viz obrázek 9.7 na následující straně). V případě rovnosti  $\omega_0 = \delta$  mezi frekvencí vlastních kmitů a koeficientem útlumu nastává mezní případ aperiodického pohybu

Pro výchylku v tomto mezním případě platí

$$y(t) = y_m \cdot e^{-\delta t} \cdot (1 + \delta t) \quad , \quad (9.28)$$

přičemž  $y_m$  je hodnota počáteční výchylky v čase  $t_0 = 0$  s .

Výchylka se u mezního aperiodického pohybu snižuje zpět k nulové hodnotě „nejrychleji“, při vyšších hodnotách koeficientu útlumu  $\delta$  (**přetlumené pohyby**) nastává stále „pomalejší“ pokles výchylky, jak ostatně vyplývá i z uvedeného obrázku 9.7.



Obr. 9.7 – aperiodický pohyb

# 10. STACIONÁRNÍ MAGNETICKÉ POLE

## 10.1 MAGNETICKÉ POLE VE VAKUU

Jak již bylo uvedeno v minulém semestru, je **magnetické pole** jednou ze dvou nedílných složek pole elektromagnetického. Podobně jako pole elektrické je i magnetické pole projevem nabitých objektů (částic nebo těles.). Zásadní rozdíl od pole elektrického je ovšem v tom, že **magnetická síla  $F_m$** , jež v magnetických polích působí na elektricky nabitě objekty, **je vždy závislá na okamžité rychlosti  $v$  těchto objektů.**

Magnetická pole vznikají pouze v okolí **pohybujících se** elektrických nábojů (a tím pádem i v okolí vodičů protékaných elektrickým proudem, a jak s ukážeme později, za určitých okolností i v okolí některých látek – jejich magnetické pole je ale také důsledkem pohybu nábojů, a sice pohybu elektronů kolem jádra atomů příslušné látky).

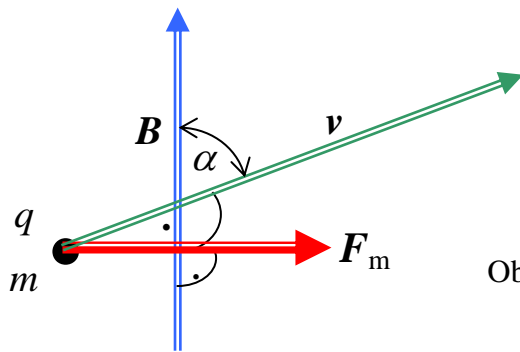
Podle časové stálosti pak rozdělujeme magnetická pole do dvou odlišných skupin:

- **Stacionární magnetické pole** je na čase nezávislé a je vyvolané ustálenými (tedy konstantními stejnosměrnými) proudy.
- **Nestacionární magnetické pole** se naopak s časem mění; taková pole bývají vyvolána časově proměnnými proudy.

### 10.1.1 Magnetická síla, indukce magnetického pole

**Magnetická síla  $F_m$**  je základní fyzikální veličinou charakterizující míru působení daného magnetického pole na elektricky nabitě hmotné objekty pohybující se vůči magnetickému poli rychlostí  $v$  a na vodiče, jimiž prochází elektrický proud. Podívejme se nejprve podrobněji na jevy spojené s **pohybem nabitě částice v magnetickém poli.**

Pronikne-li částice o hmotnosti  $m$  s nábojem  $q$  do magnetického pole jistou rychlostí  $v$  (viz následující obr. 10.1), začne na ní působit magnetická síla  $F_m$ , jež je závislá na velikosti a směru vektoru okamžité rychlosti  $v$ . Síla celkem pochopitelně závisí (a to přímo úměrně) na velikosti náboje  $q$ , jenž nese daná částice, a také na magnetickém poli samém, t.j. na jeho „velikosti“ (či „mohutnosti“) a také na jeho orientaci (směru) v prostoru.



Obr. 10.1 – částice s nábojem v magnetickém poli

K popisu zmíněné „velikosti“ („mohutnosti“) magnetického pole nám slouží vektorová fyzikální veličina nazvaná **indukce magnetického pole  $B$**  (používá se též kratšího termínu **magnetická indukce  $B$** ), jež vychází právě ze silových účinků příslušného pole. Magnetická indukce  $B$  zcela jednoznačně charakterizuje v jednotlivých bodech prostoru silové účinky magnetického pole. Platí to pochopitelně i pro námi právě studovaný případ pohybující se nabitě částice v takovém poli. **Velikost**  $F_m$  magnetické síly působící na tuto částici je dána výrazem

$$F_m = q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha \quad . \quad (10.1)$$

Jak je z uvedeného vztahu pro velikost magnetické síly  $F_m$  na první pohled patrné, na náboje v klidu ( $v = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ) – na rozdíl od pole elektrického – skutečně magnetické pole **nikdy** silově nepůsobí !!!



Rovnici (10.1) je vlastně možné chápat i jako definici velikosti vektoru indukce  $B$  magnetického pole. Vidíme, že pro tuto fyzikální veličinu musí platit

$$B = \frac{F_m}{q \cdot v \cdot \sin \alpha} \quad . \quad (10.2)$$

Magnetická indukce v daném místě prostoru je tedy **číselně** rovna velikosti magnetické síly, jež působí na jednotkový elektrický náboj ( $q = 1 \text{ C}$ ), jež kolmo vletěl do tohoto magnetického pole rychlostí  $v$  o velikosti  $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Magnetická indukce  $B$  tedy fakticky představuje veličinu stejného typu, jakou je v gravitačním nebo elektrickém poli intenzita  $K$  resp.  $E$ . Magnetické pole má ale úplně jiný (a sice mnohem komplikovanější) charakter než obě zmíněná fyzikální pole, a proto i definice vektoru magnetické indukce  $B$  je složitější.

Fyzikální jednotkou veličiny magnetická indukce je v soustavě SI jeden **tesla** (T). Ze vztahu (10.2) rovněž vyplývá, že pro tuto jednotku musí platit

$$1 \text{ T} = 1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{A}^{-1} \quad .$$



**Směr** vektoru indukce  $\mathbf{B}$  magnetického pole je pak dán ve vakuu polohou magnetky (tedy od jižního k severnímu pólu). Jak si ukážeme dále ve článku 10.1.3, je tento směr volen záměrně tak, aby byl kolmý k vektoru magnetické síly  $\mathbf{F}_m$ .

**Ke znázornění** magnetického pole se používá (podobně jako tomu bylo v poli elektrickém) tzv. **magnetických indukčních čar**. Jsou to opět orientované čáry, jejichž orientované tečny v každém bodě mají směr vektoru magnetické indukce  $\mathbf{B}$  v tomto bodě. Orientace magnetické indukční čáry se vyznačuje šipkou. Na rozdíl od elektrických siločar, jež vždy směřovaly od kladně nabitých objektů k objektům záporným, **jsou** však **magnetické indukční čáry** vždy **uzavřené křivky**.

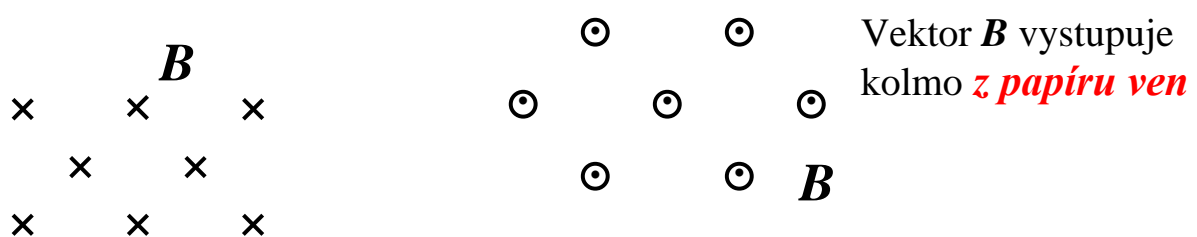
## Magnetické indukční čáry

**nemají nikde ani začátek a ani konec !!!**

Přitom hustota magnetických indukčních čar (t.j. jejich počet kolmo procházejících jednotkovou plochou) je číselně rovna velikosti vektoru magnetické indukce  $\mathbf{B}$ .

**Homogenní magnetické pole** je takové pole, jehož vektor magnetické indukce  $\mathbf{B}$  je ve všech bodech uvažovaného prostoru stejný co do velikosti i co do směru. Magnetické indukční čáry tohoto pole jsou ve vymezeném prostoru rovnoběžné stejně vzdálené a souhlasně orientované přímky.

**Pozn.:** Vzhledem k charakteru magnetického pole je v celé řadě případů potřeba v obrázcích vyznačit situaci, kdy je příslušné magnetické pole orientováno kolmo k nákresně (vstupuje či vystupuje kolmo k papíru, tabuli, obrazovce monitoru, apod.). Pro tyto případy se používá obvyklého označení tak, jak je ukázáno na následujícím obr. 10.2.



Vektor  $\mathbf{B}$  vstupuje kolmo **do papíru**

Vektor  $\mathbf{B}$  vystupuje kolmo **z papíru ven**

Obr. 10.2 – znázornění magnetického pole v případě, kdy je vektor magnetické indukce  $\mathbf{B}$  kolmý k rovině papíru

## 10.1.2 Magnetický indukční tok

Podobně jako v poli elektrickém umožňuje v magnetickém poli zavedení pojmu magnetické indukční čáry definovat důležitou fyzikální veličinu – **magnetický indukční tok**  $\Phi$  určitou **orientovanou plochou**  $S$ . Tato skalární veličina fakticky charakterizuje magnetické pole na této ploše a opět představuje obrazně řečeno **celkový počet magnetických indukčních čar**, jež v daném magnetickém poli procházejí danou orientovanou plochou.

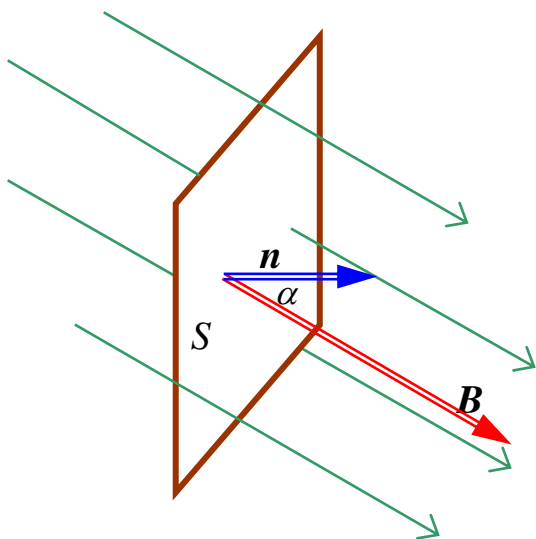
Je-li magnetické pole homogenní ( $\mathbf{B} = \textit{konst.}$ ) a navíc plocha  $S$  rovinná (viz obr. 10.3), je magnetický indukční tok  $\Phi$  dán prostým součinem

$$\Phi = B S \cos \alpha \quad , \quad (10.3)$$

kde  $\alpha$  je úhel mezi vektorem magnetické indukce  $\mathbf{B}$  **a kolmicí** na plochu  $S$  (normálou  $\mathbf{n}$ ). Díky tomu lze vztah (10.3) jednoduše vyjádřit ve tvaru skalárního součinu

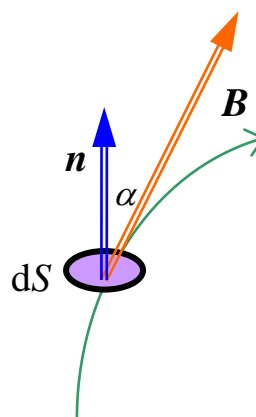
$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \quad , \quad (10.4)$$

přičemž „vektor plochy“  $\mathbf{S} = S \cdot \mathbf{n}$  (neboť velikost vektoru normály  $\mathbf{n}$  je rovna jedné!).



Obr. 10.3 – magnetický indukční tok v homogenním magnetickém poli

V případě, že magnetické pole není homogenní (viz vedlejší obr. 10.4), je nutno celou plochu  $S$  rozdělit na nekonečně malé elementy  $dS$  a spočítat jednotlivé příspěvky toku  $d\Phi$  ploškami  $dS$ .



Obr. 10.4 – magnetický indukční tok v nehomogenním magnetickém poli

Celkový tok  $\Phi$  pak získáme integrací těchto příspěvků přes celou plochu  $S$

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad . \quad (10.5)$$

Fyzikální jednotkou veličiny magnetický indukční tok je v soustavě SI **weber** (Wb). Z jeho definice vyplývá, že musí platit

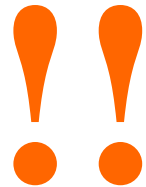
$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1} \quad .$$

**Pozn.:** Jako jednotka magnetického indukčního toku bývá též používána 1 V.s (voltsekunda), což vyplývá z Faradayova zákona elektromagnetické indukce, s nímž se seznámíme v další kapitole.

Kdybychom vyšetřovali podobnou úlohu jako v elektrickém poli – celkový magnetický indukční tok libovolnou **uzavřenou** plochou  $S$ , došli bychom v magnetickém poli k odlišnému závěru. Magnetické indukční čáry – jak již bylo řečeno – jsou na rozdíl od elektrických siločar **uzavřené křivky**, nemají ani začátek a ani konec, což souvisí mimo jiné i s tím, že neexistuje samostatně nějaký „kladný“ či „záporný“ magnetický náboj. Každá magnetická indukční čára, jež protíná uzavřenou plochu  $S$  (a tedy vstupuje „dovnitř“), musí nutně zase z plochy vycházet ven. To ale v celkovém souhrnu znamená, že výsledný magnetický indukční tok takovou uzavřenou plochou  $S$  je nutně nulový

$$\Phi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad . \quad (10.6)$$

Tento závěr potvrzuje odlišnou povahu magnetického a elektrického pole. Na rozdíl od elektrického pole (jež bývá vytvářeno elektrickými náboji) nejsou v poli magnetickém žádná podobná zřídla magnetického indukčního toku. Magnetické indukční čáry mohou být jen uzavřené křivky a magnetické pole je **pole vírové**.



### 10.1.3 Pohyb nabité částice v magnetickém poli

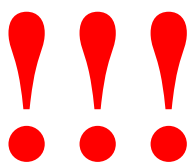
Vraťme se však ještě nazpět k působení magnetického pole na pohybující se nabitou částici. Zatím jsme se v úvodním článku zabývali pouze velikostí tohoto silového působení (10.1), podívejme se proto nyní podrobněji na jeho směr. Jak už naznačuje i obr. 10.1, má magnetická síla  $F_m$  zcela jednoznačnou orientaci (směr)  $\rightarrow$  tento vektor je totiž **vždy kolmý** jak na vektor okamžité rychlosti  $\mathbf{v}$  pohybující se nabitě částice, tak i na vektor indukce  $\mathbf{B}$  magnetického pole

$$\begin{aligned} & \parallel \mathbf{F}_m \perp \mathbf{B} \\ & \parallel \mathbf{F}_m \perp \mathbf{v} \quad . \end{aligned} \quad (10.7)$$

Tím pádem je ale magnetická síla kolmá i na celou rovinu určenou oběma vektory ( $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{B}$ ). Z tohoto důvodu lze skutečnosti charakterizované vztahy (10.1) a (10.7) shrnout do jedné jediné rovnice formálně vyjádřené ve tvaru vektorového součinu veličin  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{B}$  vynásobeného velikostí náboje  $q$ . Platí, že

$$\mathbf{F}_m = q \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad . \quad (10.8)$$

Navíc ze druhého řádku podmínky (10.7) vyplývá jeden velmi důležitý závěr týkající se pohybu nabitě částice v magnetickém poli. Jelikož je magnetická síla  $F_m$  vždy kolmá k vektoru okamžité rychlosti ( $F_m \perp \mathbf{v}$ ), nemůže částici nesoucí náboj  $q$  magnetické pole touto silou ani urychlovat, ani brzdit !!!



Magnetická síla pouze mění **směr** vektoru rychlosti  $\mathbf{v}$ ; pohyb nabitě částice v magnetickém poli je rovnoměrný křivočarý a magnetická síla  $\mathbf{F}_m$  je silou **dostředivou**.

Vyšetřujme nyní nejjednodušší případ, kdy určitá částice o hmotnosti  $m$  mající náboj  $q$  vletí do homogenního magnetického pole o indukci  $\mathbf{B} = \text{konst. kolmo}$  ( $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ ). Tedy úhel mezi vektory rychlosti  $\mathbf{v}$  a magnetickou indukcí  $\mathbf{B}$  bude  $\alpha = 90^\circ$ , jak ukazuje i následující obr. 10.5.

Magnetická síla je silou dostředivou, což lze formálně zapsat jako rovnost mezi dvěma charakteristikami jednoho a téhož vektoru, tedy

$$F_m = F_d$$

$$q \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$$

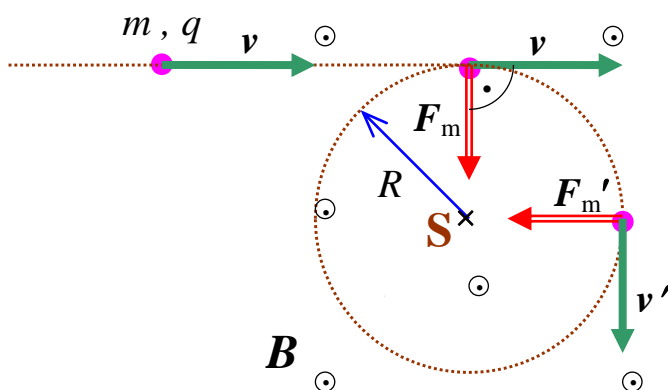
(10.9)

Uvědomte si, že jak náboj  $q$ , tak i hmotnost  $m$  částice jsou konstantní hodnoty a velikost  $v$  rychlosti jejího pohybu je také stále stejná.

To ale znamená, že se částice nesoucí náboj  $q$  po proniknutí do **homogenního** magnetického pole bude pohybovat po kružnici (případně jen po její části – po kruhovém oblouku) o poloměru  $R$ , jehož hodnotu udává právě vztah (10.9).

Kdyby bylo magnetické pole nehomogenní, byla by trajektorie pohybu jiná křivka, jejíž poloměr křivosti by byl v různých bodech nepřímo úměrný měnící se indukci  $\mathbf{B}$  magnetického pole.

Na uvedeném obr. 10.5 je přitom znázorněna situace, kdy do magnetického pole vnikla částice, jejíž náboj  $q$  je **kladný**. Kdyby byl náboj  $q$  letící částice záporný, změnila by se pouze orientace magnetické síly  $\mathbf{F}_m$ , „na druhou stranu“ a poloha kruhové trajektorie částice by byla potom v opačné polorovině vzhledem k vektorové přímce její okamžité rychlosti  $\mathbf{v}$ .



Obr. 10.5 – trajektorie nabitě částice v homogenním magnetickém poli; rychlost částice  $\mathbf{v}$  je kolmá k vektoru indukce  $\mathbf{B}$

Tím, že **velikost** v **rychlosti** částice na kruhové trajektorii zůstává stále stejná, bude konstantní i úhlová rychlost jejího pohybu

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{q \cdot B}{m}$$

a rovněž neměnná zůstává i doba každého celého oběhu kružnice (perioda)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \cdot m}{q \cdot B} \quad . \quad (10.10)$$

Povšimněte si, že tato doba oběhu vůbec nezávisí na rychlosti částice  $v$  ani na poloměru kruhové trajektorie, po níž se pohyb částice v magnetickém poli odehrává.

Vletí-li nabitá částice do magnetického pole **ve směru rovnoběžném** se směrem vektoru magnetické indukce  $\mathbf{B}$  (v takovém případě buď  $\alpha = 0^\circ$  nebo  $\alpha = 180^\circ$ ), nebude na ní magnetické pole vůbec silově působit !!! Magnetická síla  $\mathbf{F}_m$  – podívejte se znovu na vztah (10.1) – má evidentně nulovou velikost. Nabitá částice tak bude setrvávat v rovnoměrném a navíc přímočarém pohybu.



Vletí-li částice s nábojem  $q$  do magnetického pole ve směru **obecně různoběžném** (ne však kolmém) vzhledem k indukčním čarám, t.j. svírá-li vektor rychlosti  $\mathbf{v}$  se směrem vektoru magnetické indukce  $\mathbf{B}$  úhel  $\alpha$  takový, že platí

$$\alpha \in (0^\circ; 90^\circ) \cup (90^\circ; 180^\circ) \quad ,$$

bude pohyb částice složitější; magnetická síla  $\mathbf{F}_m$  způsobí zakřivení trajektorie částice do tvaru šroubovice.

Rychlost pohybu částice  $\mathbf{v}$  si totiž v takovém případě můžeme rozdělit na dvě složky, z nichž jedna (označovaná  $\mathbf{v}_{||}$ ) je se směrem magnetické indukce  $\mathbf{B}$  rovnoběžná a druhá (označovaná  $\mathbf{v}_{\perp}$ ) je pak k tomuto vektoru kolmá. Pro velikosti těchto rychlostí pak platí, že

$$v_{||} = v \cdot \cos \alpha \quad , \quad v_{\perp} = v \cdot \sin \alpha \quad .$$

Pohyb částice si tak podle principu superpozice rozložíme na pohyby dva – jedním bude rovnoměrný kruhový pohyb („důsledek“ rychlosti  $\mathbf{v}_{\perp}$  částice) a druhým pak postupný unášivý pohyb rychlostí  $\mathbf{v}_{||}$  ve směru vektoru  $\mathbf{B}$ .

Poloměr  $R$  šroubovice se i v tomto případě spočítá podle vztahu (10.9), do něhož je však třeba místo rychlosti  $v$  dosadit složku rychlosti  $v_{\perp}$ , tedy

$$R = \frac{m \cdot v_{\perp}}{q \cdot B} = \frac{m \cdot v \cdot \sin \alpha}{q \cdot B} \quad . \quad (10.11)$$

Úhlová rychlost  $\omega$  i doba oběhu  $T$  zůstanou stejné jako při předcházejícím případě ( $\alpha = 90^\circ$ ), neboť tyto veličiny nezávisí na rychlosti  $v$ . Výška jednoho závitu šroubovice  $h$  pak bude dána složkou rychlosti ve směru pole  $\mathbf{v}_{||}$  a bude rovna

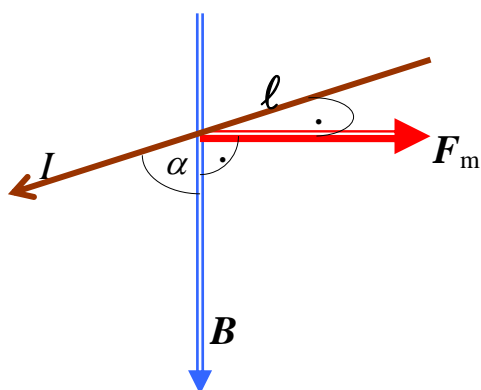
$$h = v_{||} \cdot T$$

Dosadíme-li do této rovnice za dobu oběhu  $T$  ze vztahu (10.10) dostáváme

$$h = \frac{2\pi \cdot m \cdot v \cdot \cos \alpha}{q \cdot B} \quad (10.12)$$

### 10.1.4 Vodič s proudem v magnetickém poli

Jelikož magnetické pole působí na pohybující se nabitě částice, bude zákonitě působit i na takové, jež vedou ve vodičích elektrický proud. Velikost magnetického silového působení na vodič s proudem v magnetickém poli o indukci  $\mathbf{B}$  vyjadřuje tzv. **Ampérova síla  $F_m$** .



Obr. 10.6 – vodič s proudem v magnetickém poli

Nechť se přímý vodič délky  $\ell$  nachází v magnetickém poli o indukci  $\mathbf{B}$  (viz vedlejší obr. 10.6). Vodičem přitom protéká proud  $I$ . Elementem vodiče délky  $d\ell$  se bude pohybovat náboj  $dq$  rychlostí  $\mathbf{v}$  a podle (10.8) bude na tento náboj (resp. na příslušný element vodiče) působit magnetická síla

$$d\mathbf{F}_m = dq \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (10.13)$$

Vzhledem k tomu, že platí,

$$dq = I dt \quad \text{a současně} \quad \mathbf{v} = \frac{d\ell}{dt},$$

můžeme rovnici (10.13) snadno upravit na tvar

$$d\mathbf{F}_m = I \cdot [d\ell \times \mathbf{B}] \quad (10.14)$$

Jestliže se bude přímý vodič délky  $\ell$  nacházet v homogenním magnetickém poli, jehož vektor indukce  $\mathbf{B} = \text{konst.}$  a bude přitom svírat se směrem tohoto vektoru úhel  $\alpha$  tak, jak je naznačeno i na obr. 10.6, bude na něj působit Ampérova síla

$$\mathbf{F}_m = I \cdot [\ell \times \mathbf{B}] \quad (10.15)$$

přičemž orientaci vektoru  $\ell$  určuje směr proudu  $I$  procházejícího vodičem.

**Velikost** Ampérovy síly  $F_m$  je pak tedy rovna

$$F_m = B \cdot I \cdot \ell \cdot \sin \alpha \quad (10.16)$$

**směr** tohoto vektoru je kolmý jednak k vektoru indukce  $\mathbf{B}$  magnetického pole ( $\mathbf{F}_m \perp \mathbf{B} \Rightarrow$  vodič je proto vytlačován z magnetického pole kolmo) a jednak ke směru proudu (tedy k vodiči). Orientace Ampérovy síly je patrná z vektorového součinu (10.13) a vystihuje jí tzv. **Flemingovo pravidlo levé ruky**:

**Přiložíme-li levou ruku k přímému vodiči tak, aby magnetické indukční čáry daného pole vstupovaly do dlaně a natažené prsty ukazovaly směr elektrického proudu, pak kolmo vychýlený palec ukazuje směr Ampérovy síly.**

### 10.1.5 Magnetická pole vytvářená v okolí vodičů, jimiž protékají elektrické proudy; Biotův – Savartův – Laplaceův zákon

Existence magnetického pole je vždy spojena s pohybujícím se elektrickým nábojem, proto magnetické pole vzniká i v okolí každého vodiče s proudem. Velikost indukce  $B$  takového pole je vždy přímo úměrná proudu  $I$  ve vodiči, závisí však také na geometrii (tvaru) vodiče a na vzdálenosti od daného vodiče. Výpočet indukce magnetického pole vodiče s proudem je poměrně složitou matematickou operací, obecný postup udává **Biotův – Savartův – Laplaceův zákon**.

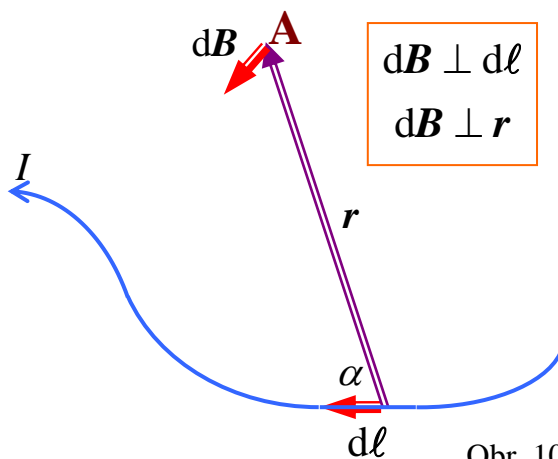
Tento zákon shrnuje závěry k nimž ve svých zkoumáních došli roku 1820 Francouzi Jean Baptiste Biot (1774 – 1862) a Felix Savart (1791 – 1841) a jež v matematické podobě nakonec zformuloval slavný matematik, fyzik a astronom (a po nástupu Napoleona Bonaparte k moci jeden čas též ministr vnitra Francouzské republiky) Pierre Simon markýz de Laplace (1749 – 1827).

Jedná se o zákon v tzv. **diferenciálním tvaru**. Vyjadřuje totiž pouze to, jak „velký“ je infinitesimální (tedy nekonečně malý) příspěvek indukce  $d\mathbf{B}$  magnetického pole, jenž je vytvářen průchodem elektrického proudu  $I$  vybraným a přitom nekonečně krátkým úsekem tenkého vodiče délky  $d\ell$  v jistém místě prostoru  $A$  v okolí daného vodiče. Polohu bodu  $A$  vzhledem k vybranému elementu vodiče  $d\ell$  přitom charakterizuje polohový vektor  $\mathbf{r}$  bodu  $A$  (viz následující obr. 10.7).

Pro velikost infinitesimálního příspěvku indukce  $d\mathbf{B}$  přitom platí

$$d\mathbf{B} = kI \cdot \frac{d\ell \cdot \sin \alpha}{r^2}, \quad (10.17)$$

směr vektoru  $d\mathbf{B}$  je potom kolmý na rovinu určenou vektory  $d\ell$  a  $\mathbf{r}$ .



Obr. 10.7 – k Biotovu - Savartovu - Laplaceovu zákonu

Orientace (směr) nekonečně malého příspěvku indukce  $d\mathbf{B}$  je pak dána **pravidlem pravé ruky** (tedy v případě uvedeném konkrétně na obr. 10.7: budou-li vektory  $d\ell$  i  $\mathbf{r}$  ležet v rovině papíru, bude vektor  $d\mathbf{B}$  orientován **kolmo do papíru**, resp. kolmo do obrazovky monitoru). Vzhledem k těmto skutečnostem lze pak Biotův – Savartův – Laplaceův zákon snadno vyjádřit i ve vektorovém zápisu, a sice

$$\boxed{d\mathbf{B} = k.I. \frac{[d\ell \times \mathbf{r}]}{r^3}} \quad . \quad (10.18)$$

Konstantu  $k$  volíme (ve vakuu) z ryze praktických důvodů ve tvaru

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad , \quad (10.19)$$

čímž ale zavádíme konstantu novou  $\mu_0$  nazývanou **permeabilita vakua**. Její číselná velikost vyjádřená v jednotkách soustavy SI je vzhledem k definici ampéru

$$\{\mu_0\} = 4\pi \cdot 10^{-7} \quad .$$

Jednotku permeability pak snadno určíme např. z rovnice (10.17)

$$[\mu_0] = \text{kg.m.s}^{-2}.\text{A}^{-2} \quad ,$$

používají se však také jednotky (viz následující kapitola „Nestacionární elektromagnetické jevy“)

$$\frac{\text{V.s}}{\text{A.m}} \quad \text{nebo} \quad \text{H.m}^{-1} \quad .$$

**Pozn.:** Vyjádření konstanty  $k$  ve tvaru uváděném ve vztahu (10.19) a zavedení permeability vakua  $\mu_0$  není náhodné. Z teorie elektromagnetického pole je totiž známo, že rychlost šíření elektromagnetického vlnění  $c$  (a tedy i světla) ve vakuu je dána výrazem

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad . \quad (10.20)$$

## 10.1.6 Příklady magnetických polí vodičů protékaných proudem

Integrací Biotova – Savartova – Laplaceova zákona je možné vypočítat indukci  $\mathbf{B}$  magnetických polí vytvářených vodiči nejrůznějších tvarů. Při výpočtu celkové indukce  $\mathbf{B}$  v určitém místě prostoru musíme provést sčítání všech nekonečně malých příspěvků  $d\mathbf{B}$  přes celou délku vodiče  $\ell$ . Je však třeba vzít v úvahu vektorový charakter veličiny indukce  $\mathbf{B}$  magnetického pole a jednotlivé příspěvky  $d\mathbf{B}$  sčítat s ohledem na jejich velikosti i směry podle pravidel vektorového sčítání

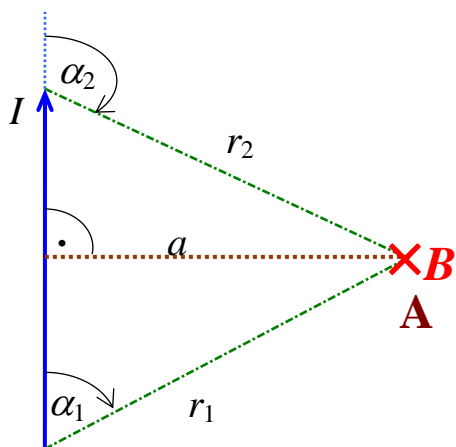
$$\mathbf{B} = \int_{\ell} d\mathbf{B} \quad . \quad (9.21)$$



Z matematického hlediska je tento výpočet relativně nejjednodušší u vodičů geometricky pravidelných tvarů, kdy příslušné magnetické pole vykazuje jistý stupeň symetrie. Výsledky některých výpočtů, v praxi často využívaných případů vodičů protékanych proudy, si nyní alespoň uvedeme.

### A) Magnetické pole přímého vodiče (viz následující obr. 10.8)

Indukci  $B$  magnetického pole přímého vodiče, jímž protéká proud  $I$  budeme počítat v jistém bodě A, jenž se nachází v kolmé vzdálenosti  $a$  od tohoto vodiče.



Obr. 10.8 – k magnetickému poli přímého vodiče

Vodič a bod A leží (jak je tomu i na uvedeném obrázku) v jedné rovině – v rovině papíru. Vodič má konečnou délku, kterou jednoznačně charakterizují dva úhly  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$ , jež měříme mezi průvodiči počátečního a koncového bodu vodiče a vodičem samým, a to zásadně **ve směru protékajícího proudu !!!** Integrací Biotova – Savartova – Laplaceova zákona (10.17) pak dostáváme jako výsledek poměrně komplikovaného matematického postupu pro velikost indukce následující vztah:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \quad (10.22)$$

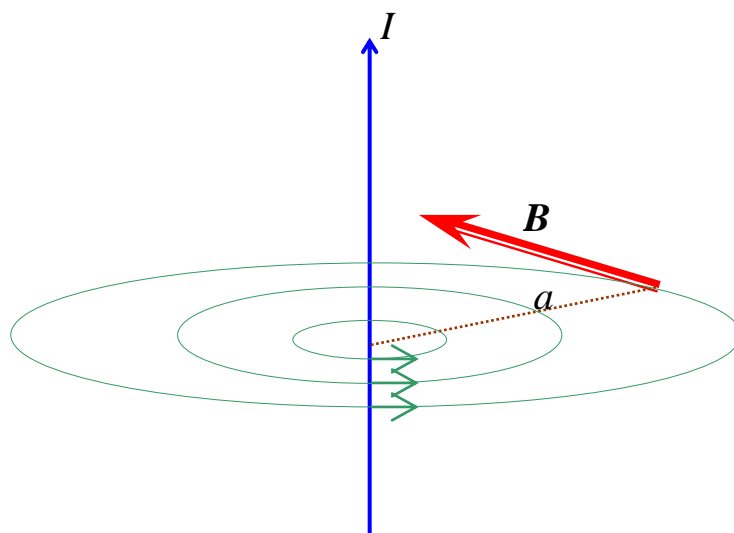
V případě, že vodič vytvářející magnetické pole bude nekonečně dlouhý (nebo alespoň velmi dlouhý), bude pro úhly  $\alpha_1$  do  $\alpha_2$  platit

$$\begin{aligned} \alpha_1 = 0 & \Rightarrow \cos \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = \pi & \Rightarrow \cos \alpha_2 = -1 \end{aligned}$$

a vztah (10.22) pro velikost magnetické indukce  $B$  pak přejde do jednoduššího tvaru

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot a} \quad (10.23)$$

Jak je z odvozených vztahů dobře patrné, velikost  $B$  indukce magnetického pole, jež je buzené proudem  $I$  v přímém vodiči, klesá (a to nepřímo úměrně) s rostoucí vzdáleností  $a$  od vodiče. Směr vektoru  $B$  je vždy kolmý na směr proudu  $I$  (a tedy i kolmý k vodiči). Magnetické indukční čáry mají logicky tvar kružnic, jejichž středy leží vždy na ose vodiče (viz vedlejší obr. 10.9)



Obr. 10.9 – magnetické pole přímého vodiče

Výše uvedené vztahy (10.22) a (10.23) charakterizují magnetické pole (nekonečně) tenkého vodiče, ale jejich platnost lze rozšířit i na válcové vodiče s jistým nenulovým poloměrem  $R$ . Bude-li vzdálenost  $a$  od osy vodiče větší než jeho poloměr ( $a > R$ ), budou platit uvedené vztahy ve stejné podobě jako pro vodič nekonečně tenký. Největší velikost indukce  $B$  magnetického pole pak bude na povrchu vodiče a bude dána výrazem

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \quad , \quad (10.24)$$

resp.

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot R} \quad (10.25)$$

pro vodič nekonečně dlouhý.

Uvnitř válcového vodiče je též nenulové magnetické pole, ale ve vzdálenosti  $a$  od osy vodiče ( $a < R$ ) je toto magnetické pole vytvářeno (buzeno) jen takovou částí proudu, jenž protéká plochou kruhu právě o poloměru  $a$ . Ostatní proud tekoucí vodičem vně této plochy magnetické pole již neovlivní.

Z toho následně vyplývá, že v případě válcového vodiče nezanedbatelného poloměru se velikost  $B$  indukce magnetického pole směrem k ose vodiče postupně zmenšuje. **Uvnitř dutého vodiče** – i když po jeho povrchu bude protékat elektrický proud – je magnetické pole vždy nulové.



## B) Magnetické pole ve středu kruhové smyčky (viz obr. 10.10)

Integrace Biotova – Savartova – Laplaceova zákona je v tomto případě poměrně jednoduchá, neboť všechny elementy délky vodiče  $d\ell$  svírají s příslušným polohovým vektorem  $r$  pravý úhel a navíc je velikost polohového vektoru  $r$  vždy rovna poloměru kruhové smyčky  $R$ .

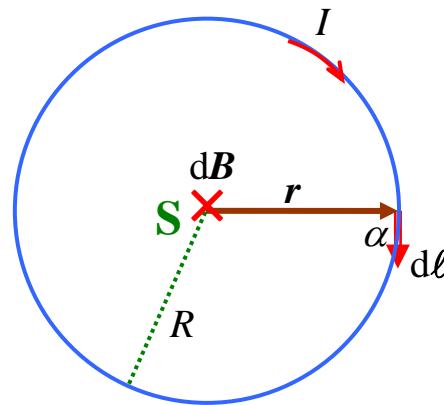
Rovněž orientace všech infinitezimálních příspěvků indukce  $d\mathbf{B}$  magnetického pole je shodná. (Bude-li proud  $I$  smyčkou obíhat ve směru chodu hodinových ručiček tak, jak je tomu i na následujícím obr. 10.10, pak příspěvky  $d\mathbf{B}$  i výsledný vektor indukce  $\mathbf{B}$  míří **kolmo do roviny** papíru). Takže stačí integrovat pouze velikost indukce  $B$ .

Vzhledem k uvedeným skutečnostem bude velikost infinitezimálního (nekonečně malého) příspěvku indukce  $dB$  dána výrazem

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{d\ell}{R^2} .$$

Po krátkém výpočtu, jenž si proveďte sami, získáme pro velikost celkové indukce  $B$  ve středu  $S$  naší smyčky výraz

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2R} . \quad (10.26)$$



Obr. 10.10 – magnetické pole ve středu  $S$  kruhové smyčky

## C) Magnetické pole válcové cívky (solenoidu)

Cívku tvoří soustava sériově vodivě spojených závitů. Budou-li tyto závity vinuty hustě, můžeme předpokládat, že místo vinutí ve tvaru šroubovice je solenoid složen z jednotlivých  $N$  kruhových smyček stejného poloměru  $R$ , přičemž každou protéká stejný proud  $I$ . Indukce  $\mathbf{B}$  magnetického pole vyvolaná v určitém bodě tohoto pole proudem  $I$  procházejícím cívku je vlastně součtem indukcí vyvolaných proudem v každém jejím závitě. Odvození (matematický postup) je však v tomto případě – i přes uvedené zjednodušení – poměrně složité, i když pole vykazuje značný stupeň symetrie.

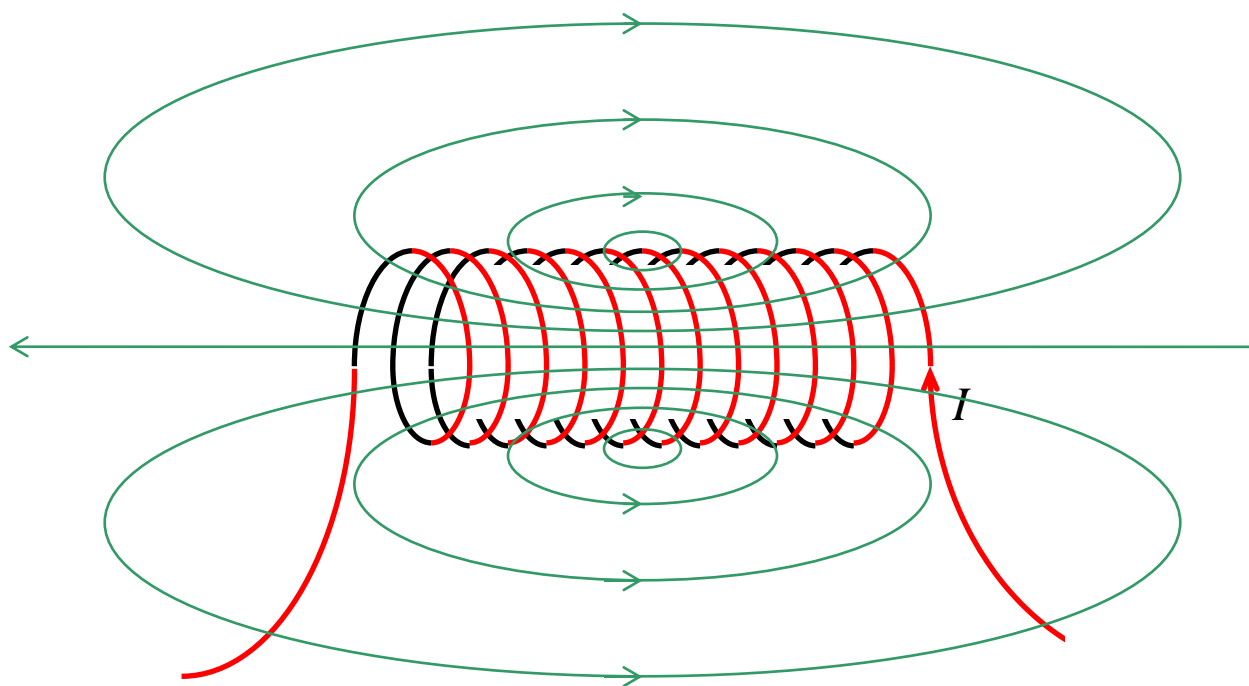
Jestliže je ale válcová cívka dostatečně dlouhá vůči svému poloměru ( $\ell \gg R$ ), dostaneme nakonec po několika provedených úpravách známý vztah pro velikost indukce  $B$  ve středu takového solenoidu

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{\ell} . \quad (10.27)$$

Navíc tento vzorec s poměrně velkou přesností vystihuje i velikost indukce  $B$  magnetického pole v bodech ležících mimo střed cívky, pokud se zrovna nenacházejí v těsné blízkosti jejích konců (pólů). U konců cívky se velikost indukce  $B$  zmenšuje a lze dokázat, že přímo na jejích okrajích dosahuje právě poloviční hodnoty ve srovnání se vztahem (10.27). V těchto místech je velikost indukce

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2 \ell} \quad (10.28)$$

Magnetické pole solenoidu lze rovněž znázornit pomocí magnetických indukčních čar (viz připojený obr. 10.11). Výsledkům obsaženým ve vzorcích (10.27) a (10.28) odpovídá i to, že hustota těchto magnetických indukčních čar je u konců cívky poloviční vzhledem k jejich hustotě uprostřed solenoidu. Indukční čáry jako uzavřené křivky pak probíhají i prostorem vně cívky. Jejich hustota je však zde podstatně menší než uvnitř solenoidu, a proto se indukce magnetického pole vně válcové cívky prakticky rovná nule (přesněji řečeno velikost  $B$  magnetické indukce vně cívky obvykle pokládáme za zanedbatelně malou).



Obr. 10.11 – magnetické indukční čáry magnetického pole válcové cívky

## D) Magnetické pole prstencové cívky (toroidu)

Toroid je zvláštním případem cívky, jejíž stejné kruhové závity jsou navinuty na kruhovém prstenci. Magnetické indukční čáry probíhají jen vnitřkem prstence a jsou jimi soustředné kružnice. Magnetické pole je vlastně soustředěno pouze do prostoru uvnitř prstence a vnější prostor je při dostatečné hustotě vinutí závitů zcela bez magnetického pole. Pro velikost indukce  $B$  magnetického pole uvnitř toroidu lze použít výsledku získaného pro střed válcové cívky.

Toroid můžeme totiž v jistém přiblížení považovat za solenoid, jehož oba konce jsou spojeny. Je-li délka toroidu

$$\ell = 2\pi R \quad ,$$

kde  $R$  je střední poloměr dané prstencové cívky, pak lze za předpokladu, že průměr  $d$  každého závitu je podstatně menší než délka  $\ell$  ( $d \ll \ell$ ), použít vztah (10.27) upravený do tvaru

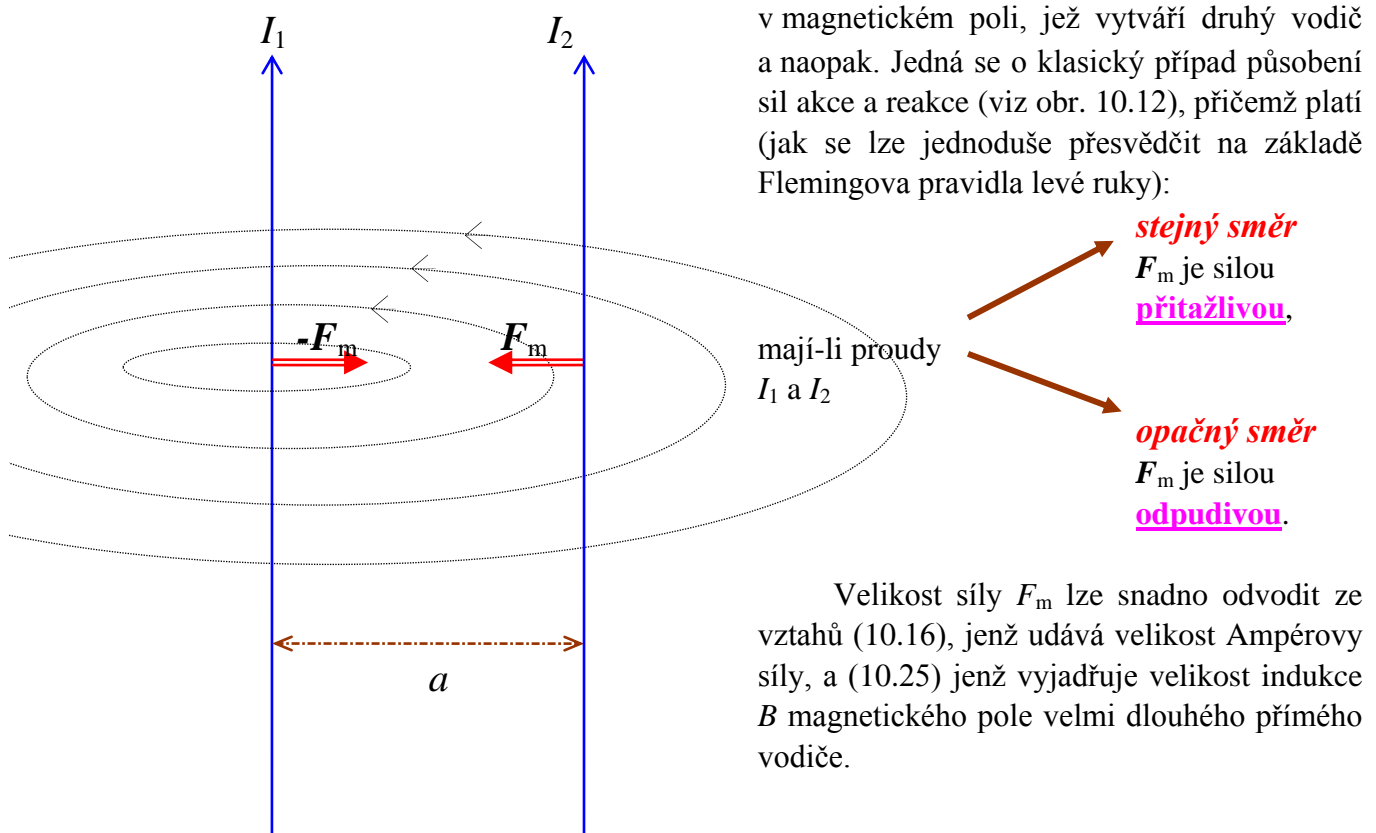
$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2\pi R} \quad . \quad (10.29)$$

Jak je patrné ze vzorce (10.29), má indukce  $B$  magnetického pole uvnitř toroidu za uvedených podmínek konstantní velikost.

### 10.1.7 Vzájemné silové působení mezi dvěma vodiči s proudy, definice fyzikální jednotky ampér

Uvažujme nyní případ vzájemného silového působení dvou přímých nekonečně (nebo alespoň dostatečně) dlouhých navzájem rovnoběžných vodičů zanedbatelného průřezu, jimiž protékají dva proudy  $I_1$  a  $I_2$ . V prostoru mezi vodiči předpokládáme vakuum.

Silový účinek (působení) mezi vodiči nastává proto, že jeden z nich se nachází



Obr. 10.12 – vzájemné silové působení mezi dvěma vodiči s proudy

Jelikož ve vzdálenosti  $a$  od prvního vodiče má indukce  $B_1$  jím buzeného magnetického pole velikost

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot a} \quad (\text{viz 10.23})$$

a navíc je tento vektor kolmý k vodiči s proudem  $I_2$ , bude na libovolnou délku  $\ell$  druhého vodiče působit Ampérova síla

$$F_m = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot a} \cdot \ell \quad (10.30)$$

Tohoto jevu lze pak využít při definici jedné ze základních jednotek soustavy SI - *ampér* (A).

**Ampér** je stálý proud, jenž při průchodu dvěma přímými rovnoběžnými nekonečně dlouhými vodiči zanedbatelného průřezu umístěnými ve vakuu ve vzdálenosti 1 m od sebe vyvolá mezi vodiči sílu o velikosti  $2 \cdot 10^{-7}$  N na 1 m délky vodiče.

**Pozn.:** Z této definice jasně vyplývá, že takto zavedená jednotka elektrického proudu není nezávislá na již dříve zavedených jednotkách mechanických. Podobnou vazbou mezi ampérem na jedné straně a kilogramem, metrem a sekundou na straně druhé byl již ostatně Coulombův zákon. Dříve dokonce soustavy jednotek založené pouze na centimetru, gramu a sekundě existovaly a používaly se i pro veličiny elektrické a magnetické. Toto vyjadřování však bylo podstatně složitější a často obsahovalo i lomené (racionální) exponenty v zápisech elektrických a magnetických jednotek.



## 10.2 MAGNETICKÉ POLE V LÁTKÁCH

### 10.2.1 Základní jevy a jejich podstata

Až dosud jsme se zabývali jevy, jež nastávají v magnetických polích bez přítomnosti látky, tedy magnetickými poli ve vakuu. Závěrem si alespoň stručně shrňme základní poznatky o magnetických vlastnostech látek, tedy o chování látek v magnetických polích. Jak známo, různé látky ovlivňují magnetická pole různým způsobem a různě silně. Hmotná prostředí, jež jsou schopna magnetické pole ovlivnit, se označují jako **magnetika**, a lze říci, že magnetikem je vlastně každá látka bez výjimky. Vložíme-li magnetikum do vnějšího magnetického pole, dochází k jevu, jenž se nazývá **magnetizací** dané látky.

**Pozn.:** Vzpomeňte si na jevy, jež nastávají v nevodivých látkách (dielektrických), když je vložíme do nějakého elektrického pole. Viděli jsme, že tyto látky lze v principu rozdělit do dvou základních skupin – na dielektrika nepolární a dielektrika polární. Molekuly prvních netvořily elektrické dipóly, druhých ano, odlišně v nich probíhal proces polarizace, ale konečný výsledek byl stejný – ta i ona **dielektrika vnější elektrické pole vždy zeslabila !!!** Uvidíme dále, že magnetika se také dělí do dvou základních skupin, ale výsledek magnetizace látky v poli magnetickém už tak jednoznačný nebude.

První skupinu magnetik tvoří tzv. látky **magneticky nepolární**. Dá se říci, že se tato magnetika chovají podobně jako nepolární dielektrika v poli elektrickém. Jejich atomy totiž bez přítomnosti vnějšího magnetického pole žádné magnetické momenty nemají (a tudíž žádné magnetické dipóly netvoří). Jistý magnetický moment získají až po vložení látky do nějakého magnetického pole. Přitom tento (naindukovaný) magnetický moment je vždy orientován **proti směru vektoru indukce  $B$  původního pole**. Tím tak dojde v konečném důsledku **k zeslabení vnějšího magnetického pole**.

Druhá skupina látek jsou tzv. **magnetika polární**. Když jsme studovali chování polárních dielektrik v elektrických polích, viděli jsme, jak elektrické náboje vázané na dipóly dielektrika mění (zeslabují) při procesu rotační polarizace původní elektrické pole. Chování polárních magnetik v magnetickém poli je však zásadně odlišné. Zatímco elektrický dipól se v elektrickém poli natáčí tak, že v konečném důsledku má vnitřní pole v látce vždy směr opačný vůči poli původnímu, **magnetický dipól se orientuje pokaždé tak, že směr obou magnetických polí (původního i vnitřního) je souhlasný**. Tím se **původní magnetické pole zesílí** a vektor výsledné magnetické indukce bude mít větší velikost, než jskou měl bez přítomnosti látky (tedy ve vakuu).

O tom, zda bez přítomnosti vnějšího magnetického pole má, či nemá určitý atom magnetický moment (zda atomy látky tvoří nebo netvoří magnetické dipóly), rozhodují **nabitě pohybující se částice v atomech, a těmi jsou elektrony** určitým způsobem uspořádané v obalech příslušných atomů. Každý pohybující se elektron má jistý magnetický moment a jejich vektorový součet v celém atomu pak dává výsledek, podle něhož rozdělujeme magnetika do dvou velkých základních skupin.

→ A) V první skupině jsou látky, jejichž atomy mají momenty jednotlivých elektronů plně vykompenzovány, a tím pádem je výsledný magnetický moment takového atomu roven nule. Tyto látky, jejichž atomy nemají vlastní magnetický moment, se nazývají **látky diamagnetické**.

→ B) Do druhé skupiny řadíme takové látky, jejichž atomy nemají magnetické momenty svých elektronů vykompenzovány – výsledný magnetický moment těchto atomů je od nuly různý. Lze říci, že látek, jejichž atomy mají vlastní magnetický moment, je většina; tyto látky se nazývají **látky paramagnetické**.

### 10.2.2 Diamagnetické látky

Diamagnetismus je v podstatě všeobecnou vlastností všech látek bez rozdílu – naindukování jistého „dalšího“ magnetického momentu totiž můžeme pozorovat i u magnetik jež jsou ze skupiny látek paramagnetických. V naprosto čisté podobě jej však můžeme sledovat pouze u látek složených z atomů, jejichž výsledný magnetický moment je bez přítomnosti vnějšího magnetického pole nulový. Magnetik tohoto typu je poměrně málo, patří mezi ně například všechny inertní plyny (He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn), většina organických sloučenin, ale také některé kovy (Cu, Ag, Au, Hg, Bi) a rovněž voda  $H_2O$ .

Vložíme-li diamagnetickou látku do vnějšího magnetického pole původní indukce  $B_0$ , nebude toto pole působit na nemagnetický atom vcelku, ale začne ovlivňovat pohyb jednotlivých elektronů, jež obíhají kolem jeho jádra.

Pokud vnější magnetické pole silově nepůsobí ( $B_0 = 0$  T), pohybuje se elektron po kruhové trajektorii působením dostředivé síly, již je v tomto případě přitažlivá elektrická Coulombovská síla mezi kladným nábojem jádra atomu a záporným nábojem elektronu. Vložíme-li ale diamagnetikum do vnějšího magnetického pole, začne na obíhající elektrony v atomech působit navíc další „přídavná“ dostředivá síla – síla magnetická a dojde ke změně úhlové rychlosti  $\omega$  pohybujícího se elektronu. U elektronu se tak objeví (naindukuje) jistý příspěvek magnetického momentu. Tento přídavný magnetický moment elektronu je zpravidla velmi malý a představuje vlastní diamagnetismus. Lze dokázat, že orientace tohoto přídavného magnetického momentu je vždy opačná, než je směr indukce  $B_0$  původního pole, jež proces magnetizace vyvolalo. V látce tak magnetizací vzniká jisté vnitřní pole indukce  $B_i$ , přičemž pro **velikost**  $B$  indukce výsledného pole v magnetiku musí nutně platit

$$B = B_0 - B_i \quad ;$$

výsledné pole v látce je tedy „slabší“ než pole původní.

Poměr mezi velikostí  $B$  indukce výsledného pole v magnetiku a velikostí  $B_0$  indukce původního magnetického pole (ve vakuu) pak charakterizuje bezrozměrná fyzikální veličina **relativní** (též poměrná) **permeabilita**  $\mu_r$ , jež je důležitým materiálovým parametrem daného magnetika (její hodnotu můžeme najít v tabulkách). Platí



$$\mu_r = \frac{B}{B_0} \quad (10.31)$$

To, co zde bylo jen stručně nastíněno, potvrzuje už na začátku zmíněný fakt, že diamagnetismus je vlastností všech látek, protože vnější magnetické pole působí na obíhající elektrony v atomech bez rozdílu, ať už se jedná o atomy s vykompenzovanými magnetickými momenty, či nikoliv. U těch látek, jež vykazují diamagnetismus v čisté podobě je to však „jediná možná cesta“ magnetizace. Příslušná relativní permeabilita  $\mu_r$  těchto materiálů je číslo jen o málo menší než jedna (zeslabení pole diamagnetikem je totiž obvykle velmi malé).

Protože tepelný pohyb molekul diamagnetika nemá vliv na uspořádání elektronů v atomech, **nezávisí diamagnetismus na teplotě.**

### 10.2.3 Paramagnetické látky

Na rozdíl od diamagnetických látek mají atomy látek paramagnetických i bez přítomnosti vnějšího magnetického pole magnetický moment různý od nuly. Vložíme-li takovou látku do vnějšího magnetického pole, snaží se magnetické momenty jednotlivých atomů paramagnetika orientovat vždy do směru tohoto pole. Magnetizace paramagnetik je tedy založena na stáčení magnetických momentů atomů do směru působícího magnetického pole.

**Pozn.:** Jak již bylo řečeno v předcházejícím článku, lze i u paramagnetických atomů pozorovat jev dodatečného indukování přídavného magnetického momentu elektronů, jenž ve svém důsledku vede k zeslabení původního magnetického pole. Ale tento jev bývá zpravidla zanedbatelný ve srovnání s následky orientace nevykompenzovaných magnetických momentů v paramagnetiku.



Klasickou teorii paramagnetizmu vypracoval Paul Langevin (1872 – 1949), současník a též pokračovatel Pierra Curie (1859 – 1906). Vycházel přitom ze zjednodušeného předpokladu, že atomy paramagnetika na sebe vzájemně nepůsobí ani mechanicky, ani magneticky a každý má stejně velký nenulový magnetický moment. Tyto momenty však vlivem tepelného pohybu molekul látky mají nejrůznější směry a bez přítomnosti vnějšího magnetického pole se látka jako celek navenek chová – podobně jako diamagnetikum – jako materiál magneticky neutrální.

Teprve po vložení paramagnetika do vnějšího magnetického pole indukce  $B_0$  se dosáhne jistého stupně souhlasné orientace magnetických momentů jednotlivých atomů. Kdyby se směr magnetických momentů všech atomů ztotožnil se směrem vektoru indukce  $B_0$  vnějšího pole, nastal by stav, jenž označujeme jako **magnetizaci nasycenou**. U paramagnetik však lze stavu nasycení dosáhnout jen velmi nesnadno. Je k tomu třeba volit silná vnější magnetická pole a současně ochlazovat paramagnetikum na teploty blízké absolutní nule. Snaze vnějšího magnetického pole natočit magnetické momenty atomů do svého směru totiž brání právě tepelný pohyb molekul dané látky. Paramagnetickou magnetizaci je proto třeba posuzovat z hlediska statistické rovnováhy mezi usměrňujícím účinkem vnějšího magnetického pole a dezorientujícím účinkem tepelného pohybu vlastních molekul.

V paramagnetické látce se při magnetizaci vytváří rovněž vnitřní pole jisté indukce  $B_i$ , ale ta má na rozdíl od diamagnetik souhlasný směr s vektorem  $B_0$  vnějšího pole. Pro velikost  $B$  indukce výsledného pole v paramagnetiku tak musí nutně platit

$$B = B_0 + B_i \quad ;$$

výsledné pole v látce je tedy „silnější“ než pole původní.

Stejným způsobem jako u diamagnetik lze pak definovat i **relativní permeabilitu**  $\mu_r$  látek paramagnetických

$$\boxed{\mu_r = \frac{B}{B_0}} \quad . \quad (10.31)$$

U paramagnetik je naopak příslušná relativní permeabilita  $\mu_r$  číslo jen o málo větší než jedna (i zesílení původního pole paramagnetikem je poměrně malé). Protože tepelný pohyb molekul paramagnetika má vliv na orientaci magnetických momentů atomů, **závisí paramagnetismus na teplotě**.

V předešlém výkladu bylo stručně vyloženo odlišné chování diamagnetik a paramagnetik ve vnějších magnetických polích i teplotní závislosti procesu magnetizace u těchto látek. Uvedené skutečnosti lze stručně shrnout v následujících závěrech:

→ relativní permeabilita **diamagnetických látek** je jen o málo menší než jedna a nezávisí na teplotě  $T$  diamagnetika

$$\mu_{r \text{ dia}} < 1 \quad ; \quad \mu_{r \text{ dia}}(T) = \textit{konst.} \quad ; \quad (10.32)$$

→ relativní permeabilita **paramagnetických látek** je jen o málo větší než jedna a s rostoucí absolutní teplotou  $T$  se zmenšuje

$$\mu_{r \text{ para}} > 0 \quad ; \quad \mu_{r \text{ para}}(T) \sim T^{-1} \quad . \quad (10.33)$$

## 10.2.4 Feromagnetismus

Látky feromagnetické zaujímají mezi všemi magnetiky zvláštní postavení. Formálně se chovají jako paramagnetika, až na to, že je možno v nich vzbudit i poměrně slabým vnějším magnetickým polem velmi silnou magnetizaci, kterou si feromagnetika udrží i po odstranění vnějšího magnetického pole.

Na rozdíl od paramagnetizmu a diamagnetizmu je feromagnetismus **výhradně vlastností pevných látek, jež se vyznačují krystalovou strukturou**. Neexistují ani feromagnetické kapaliny, ani feromagnetické plyny a dokonce ani amorfní feromagnetické látky. Feromagnetismus projevují jen takové látky, jejichž atomy nebo ionty tvoří krystalové mřížky, a proto se nejčastěji vyskytuje u kovů a slitin, jež jsou vesměs látkami krystalové povahy, pokud jsou v pevné fázi.

Feromagnetismus pozorujeme za běžných teplot jen **u čtyř prvků** (Fe, Co, Ni, Gd). Projevuje se také u různých slitin těchto čtyř kovů. Je ale zajímavé, že byl kromě toho zjištěn i u několika slitin, jež feromagnetické prvky neobsahují. Příkladem mohou být tzv. Heuslerovy slitiny, což jsou některé slitiny manganu s cínem, hliníkem, arzénem, antimonem, vizmutem nebo borem a mědí (přítom As, Sb, Bi, B a Cu jsou dokonce diamagnetika!).

Že feromagnetismus souvisí s krystalovou strukturou potvrzuje i ta skutečnost, že zvyšováním teploty lze dosáhnout takových změn v uspořádání krystalů, že feromagnetismus při určité teplotě skokem mizí, a látka se poté stává „obyčejným“ paramagnetikem. Tato teplota je pro každé feromagnetikum charakteristickou veličinou a nazývá se **Curieova teplota**.

Porovnáme-li u látek feromagnetických a paramagnetických průběh magnetizace v závislosti na teplotě a na indukci  $B_0$  vnějšího magnetického pole, vidíme, že u obou skupin látek stupeň magnetizace s rostoucí teplotou postupně klesá a se vzrůstající intenzitou vnějšího pole naopak roste, ale mechanismus těchto dějů je naprosto odlišný. Tato odlišnost je způsobena existencí tzv. **spontánní magnetizace** a **doménové struktury**, jež jsou typickými znaky právě (a pouze) feromagnetizmu.

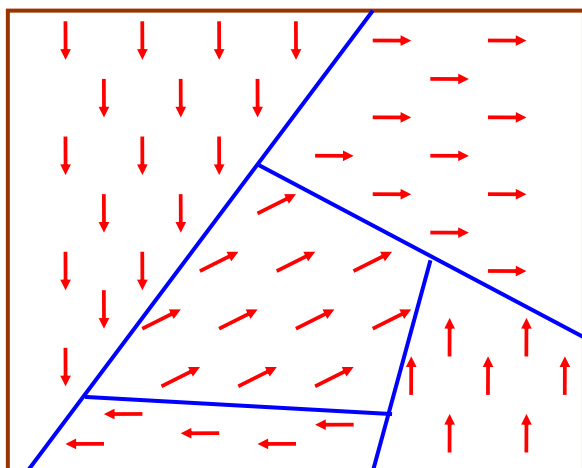
Protože se magnetický moment atomu feromagnetické látky svou velikostí nijak neliší od magnetického momentu atomů „běžných“ paramagnetických látek, nelze feromagnetismus chápat jako vlastnost jednotlivých atomů, ale jako **vlastnost určitého většího souboru těchto atomů**. Při objasnění feromagnetizmu (bylo to roku 1907) vyšel tvůrce teorie tohoto jevu francouzský fyzik Pierre Ernest Weiss ze dvou základních předpokladů:

**1)** Ve feromagnetických látkách existuje jisté **vnitřní pole**, jež při teplotách nižších, než je již zmíněná **teplota Curieova**, vyvolá v celých uzavřených oblastech feromagnetika magnetizaci až do nasycení. K této nasycené magnetizaci dochází i bez přítomnosti vnějšího magnetického pole, a proto se označuje jako **magnetizace spontánní**.

**2)** Všechna feromagnetika se při teplotách nižších, než je Curieova teplota, rozpadají na malé oblasti nazývané **feromagnetické** nebo též **Weissovy domény**, přičemž každá doména je spontánně zmagnetizovaná do nasycení.

Vnitřní pole ve feromagnetiku způsobí, že díky spontánní magnetizaci jsou v jednotlivých doménách výsledné magnetické momenty atomů nebo iontů dané látky orientovány navzájem rovnoběžně (viz obr. 10.13 na následující straně).

Není-li taková feromagnetická látka vložena do vnějšího magnetického pole, jsou směry magnetických momentů v každé doméně obecně jiné, takže výsledek, jenž získáme jejich součtem, je nulový a feromagnetická látka se jeví navenek jako nemagnetická. Teprve vlivem jistého vnějšího pole dochází k postupnému uspořádávání magnetických momentů do směru tohoto pole (a to paralelně s vektorem  $B_0$ ) tak, že feromagnetická látka získá nenulovou výslednou magnetizaci přístupnou našemu pozorování.



Obr. 10.13 – schématické znázornění Weissových domén

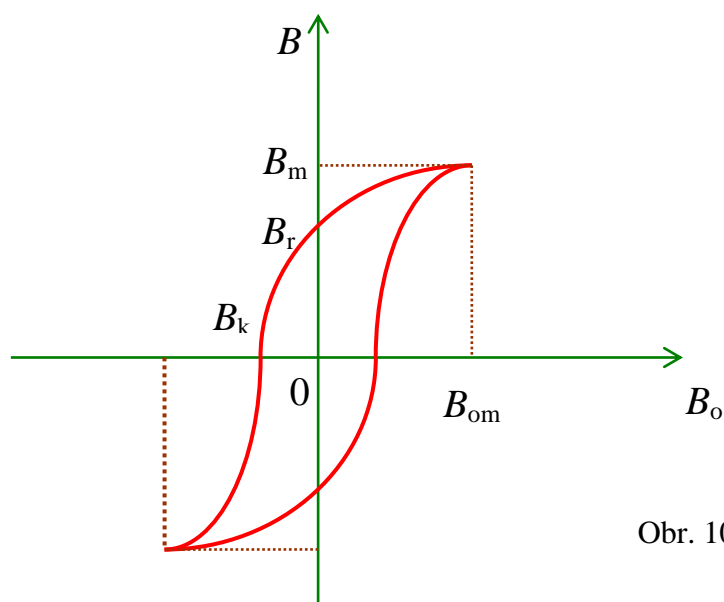
„Úkolem“ vnějšího magnetického pole tedy není magnetizaci ve feromagnetiku budit, ale působit na tyto látky, aby se mohla projevit navenek. Ačkoli Weiss vnitřní pole ve feromagnetikách předpověděl, nedokázal jeho existenci vysvětlit. Vysvětlení podstaty tohoto pole podali až později Frenkel a Heisenberg na základě existence výměnných sil kvantové povahy mezi elektrony sousedních atomů.

Přítomnost doménové struktury ve feromagnetiku pak umožní jednoduše vysvětlit i snadnost dosažení nasycené magnetizace ve feromagnetickém tělese jako celku. Při magnetizaci je totiž mnohem snazší uspořádat do směru vnějšího magnetického pole celé domény než magnetické momenty jednotlivých atomů paramagnetických látek.

Existence spontánní magnetizace a doménové struktury pak podmiňují fyzikální vlastnosti feromagnetických materiálů, jimiž se zřetelně liší od ostatních magnetik:

- feromagnetika snadno dosahují stavu nasycené magnetizace v celé látce, a to zpravidla působením relativně slabého vnějšího magnetického pole; s tím souvisí i **značně vysoké hodnoty relativní permeability**  $\mu_r$ ;
- magnetizace u feromagnetika **není přímo úměrná** indukci  $B_0$  vnějšího magnetického pole, ale probíhá v závislosti na vnějším poli značně složitým způsobem; proto také relativní permeabilita  $\mu_r$  feromagnetik není konstantou, ale veličinou rovněž závislou na vnějším magnetickém poli;
- na magnetizaci feromagnetik mají podstatný vliv i předcházející magnetizační děje; s tím je pak úzce spojen jev **magnetické hystereze**;
- feromagnetické vlastnosti látky jsou vázány jen na určitý interval teplot; při překročení jisté teploty (**Curieova teplota**) feromagnetizmus látky skokem zaniká a nad touto hraniční teplotou se látka stává „obyčejným“ paramagnetikem.

Velmi důležitou vlastností feromagnetických materiálů je právě již zmíněný jev nazývaný **magnetická hysterese**. Podstata tohoto jevu spočívá v nevratnosti magnetizačních procesů při magnetování feromagnetické látky. Magnetizace feromagnetika není jednoznačně určena indukcí  $B_0$  vnějšího magnetického pole, ale závisí též na předchozích magnetických stavech feromagnetické látky.



Obr. 10.14 – hysterezní smyčka

Zmagnetujeme magnetikum až do stavu nasycení vnějším polem o indukci  $B_{om}$ , kdy velikost vektoru magnetické indukce ve feromagnetiku bude  $B_m$  (viz obr. 10.14). Snižíme-li pak indukci vnějšího pole na nulovou hodnotu, neklesne velikost indukce  $B$  v látce na nulu, ale podrží si jistou nenulovou velikost  $B_r$ . Abychom dosáhli stavu, kdy je látka odmagnetována, musíme použít vnější magnetické pole  $B_k$  opačného směru.

Podle tvaru hysterezní smyčky dělíme feromagnetické materiály na **magneticky měkké** (s poměrně úzkou hysterezní smyčkou) a na **magneticky tvrdé** (mají naopak širokou hysterezní smyčku). Tyto dva pojmy vycházejí z analogie magnetických vlastností s tvrdostí mechanickou (měkká a tvrdá ocel).

**Pozn.:** Při rychlých periodických magnetizačních dějích (např. při magnetování vyvolaném střídavým proudem) vznikají ve feromagnetiku ztráty energie (tzv. **hysterezní ztráty**) spojené s „přeměnou“ magnetické energie na teplo, což vede k zahřívání feromagnetika. Velikost těchto ztrát během každé periody je pak přímo úměrná ploše omezené hysterezní smyčkou.

## 10.2.5 Intenzita magnetického pole

Abychom mohli snáze studovat magnetické vlastnosti látek, je dobré rozšířit skupinu fyzikálních veličin popisujících magnetické o veličiny další. Jednou z nich je i **intenzita magnetického pole  $H$** . Jedná se o vektorovou fyzikální veličinu charakterizující podobně jako indukce v jednotlivých bodech (tedy lokálně) dané magnetické pole.

Vektor intenzity  $H$  magnetického pole je „šikovně“ definován tak, že jeho velikost nezávisí na prostředí a je stejný v jakémkoli magnetiku i ve vakuu, zatímco vektor indukce  $B$  je v různých prostředích různý (a navíc i jiný než ve vakuu).

Ve vakuu, v němž k magnetizaci nemůže pochopitelně docházet, je vztah mezi oběma vektory dán jednoduchým výrazem

$$\boxed{B_0 = \mu_0 \cdot H} \quad . \quad (10.34)$$

V magnetiku s relativní permeabilitou  $\mu_r$  pak pro indukci magnetického pole v dané látce platí

$$\boxed{B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H} \quad . \quad (10.35)$$

Součin  $\mu_0 \cdot \mu_r$  se označuje  $\mu$  a tato veličina se nazývá **permeabilita daného prostředí**. Její fyzikální jednotka je stejná jako jednotka permeability vakua ( $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$ ). Relativní permeabilita tak vlastně charakterizuje kolikrát je větší (resp. menší) permeabilita daného prostředí než permeabilita vakua.

Dosadíme-li z rovnice (10.34) do vztahu (10.35) dostáváme potvrzení fyzikálního významu veličiny relativní permeabilita. Platí totiž

$$B = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot H = \mu_r \cdot B_0 \quad ,$$

kde  $B_0$  je původní indukce magnetického pole bez přítomnosti magnetika (tedy ve vakuu). Relativní permeabilita

$$\boxed{\mu_r = \frac{B}{B_0}} \quad (10.36)$$

tak skutečně charakterizuje kolikrát je větší (resp. menší) velikost magnetické indukce v magnetiku vůči velikosti tohoto vektoru ve vakuu. V souladu s tím pak platí, že relativní permeabilita látek zesilujících původní magnetické pole je větší než jedna ( $\mu_r > 1$ ) a u látek původní pole zeslabujících pak menší než jedna ( $\mu_r < 1$ ). Pro vakuum je tato veličina pochopitelně jedné rovna.

Ze vztahu (10.35) pak rovněž po jednoduchém vydělení

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} = \frac{B_0}{\mu_0} \quad (10.37)$$

dostáváme potvrzení té skutečnosti, že vektor magnetické intenzity  $H$  je na rozdíl od vektoru indukce  $B$  magnetického pole v lineárním izotropním prostředí nezávislý na magnetických vlastnostech dané látky.

# 11. NESTACIONÁRNÍ ELEKTROMAGNETICKÉ JEVY

## 11.1 ELEKTROMAGNETICKÁ INDUKCE

Elektromagnetická indukce je **fyzikální jev**, jenž byl objeven roku 1831 Faradayem a později pak zobecněn Maxwellem. Podstata tohoto jevu spočívá v tom, že každá **časová změna** magnetického indukčního toku  $\Phi$  je provázána vznikem časově proměnného elektrického pole. Takto vznikající elektrické pole (tzv. **indukované elektrické pole**, jehož intenzitu obvykle značíme  $\mathbf{E}_i$ ) má však na rozdíl od elektrických polí vytvářených nabitými objekty naprosto odlišný charakter – je to pole **vírové !!!**

Indukované elektrické pole může vznikat v podstatě třemi způsoby:

- a) při pohybu vodiče, v němž indukované elektrické pole vzniká, vůči magnetickému poli;
- b) časovou změnou indukce  $\mathbf{B}$  magnetického pole ( $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$ ), v němž se vodič nachází;
- c) kombinací obou těchto možností.

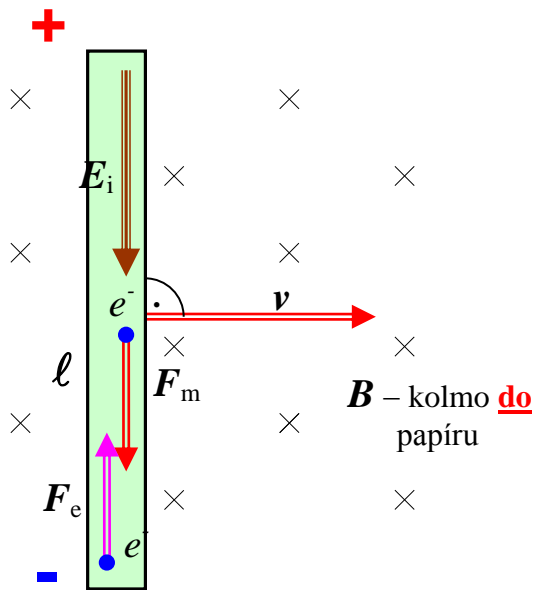
### 11.1.1 Napětí indukované ve vodiči pohybujícím se v magnetickém poli

Podívejme se nejprve na první ze zmíněných způsobů, při nichž dochází k jevu elektromagnetické indukce. Je to i případ nejnázornější – k elektromagnetické indukci bude docházet ve vodiči, jenž bude v pohybu jistou rychlostí  $\mathbf{v}$  vůči magnetickému poli. Každá vodivá látka obsahuje ve své struktuře volně pohyblivé nabitě částice a právě silové působení magnetického pole na ně vyvolá následně vznik indukovaného pole elektrického.

Jak bylo ukázáno v předcházející kapitole „**Stacionární magnetické pole**“, působí na každou **pohybující se nabitou** částici v magnetickém poli magnetická síla

$$\mathbf{F}_m = Q \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad ,$$

kde  $\mathbf{B}$  je vektor indukce daného magnetického pole.



Obr. 11.1 – indukované napětí ve vodiči pohybujícím se v magnetickém poli

Bude-li se v magnetickém poli pohybovat **přímý** vodič určitou okamžitou rychlostí  $v$  (viz vedlejší obr. 11.1), bude magnetické pole působit na každého nositele elektrického náboje (tj. na každý elektron) uvnitř tohoto vodiče silou

$$F_m = -e \cdot [v \times B] , \quad (11.1)$$

jež je kolmá jak k vektoru indukce  $B$  magnetického pole, tak i k vektoru  $v$  okamžité rychlosti vodiče. Tato síla nutně musí způsobit přemísťování elektronů vodičem v jejím směru. Tím pádem na jednom konci vodiče (na obr. 11.1 je to konkrétně „dolní“ konec) bude koncentrace elektronů vyšší a bude tam převládat jejich záporný náboj, zatímco na opačném konci vodiče (na obr. 11.1 na „horním“ konci) bude naopak převládat kladný náboj iontů kovové krystalové mřížky daného vodiče.

Mezi konci vodiče se tak zákonitě vytvoří indukované elektrické pole intenzity  $E_i$  (na obr. 11.1 má tento vektor směr odshora dolů). Toto indukované pole ale musí na volné elektrony ve vodiči působit silou elektrickou

$$F_e = -e \cdot E_i , \quad (11.2)$$

jejíž směr je nutně opačný vzhledem ke směru magnetické síly  $F_m$  (jak je ostatně velmi dobře patrné i z obrázku 11.1).

Ve vodiči se však musí velmi rychle ustavit stav rovnováhy, kdy obě dvě zmíněné síly budou mít stejnou velikost a jejich výslednice bude vzhledem k opačným směrům nulová (důkaz lze lehce provést sporem). Musí tedy platit

$$F_e = -F_m ,$$

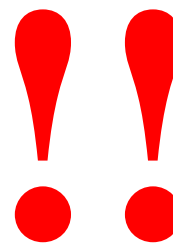
z čehož okamžitě dostáváme, že intenzita  $E_i$  indukovaného elektrického pole ve vodiči je dána vektorovým součinem

$$\boxed{E_i = -[v \times B] = [B \times v]} . \quad (11.3)$$

Intenzita  $E_i$  indukovaného elektrického pole má tedy vždy směr kolmý jednak k vektoru indukce  $B$  magnetického pole a jednak k vektoru rychlostí  $v$ , s nímž se vodič v magnetickém poli pohybuje. Je-li **magnetické pole homogenní** a **rychlost vodiče konstantní** (koná-li vodič rovnoměrný přímočarý pohyb), **bude homogenní i indukované elektrické pole**. **V každém jiném případě** (nehomogenní magnetické pole, pohyb vodiče se zrychlením, rotace vodiče, apod.) **se obecně ve vodiči vytváří nehomogenní indukované elektrické pole** a vztah (11.3) pak charakterizuje jeho intenzitu  $E_i$  lokálně (t.j. v každém určitém bodě prostoru, kde pole existuje).



**Pozn.:** Přemístění elektronů ve vodiči při elektromagnetické indukci připomíná děj, k němuž dochází při vložení vodiče do vnějšího elektrostatického pole – indukci elektrostatickou (polarizaci vodiče). Mezi oběma jevy je však **zásadní kvalitativní rozdíl**, což potvrzuje např. i ta skutečnost, že zatímco při elektrostatické indukci je vždy intenzita elektrického pole uvnitř vodiče nulová, při elektromagnetické indukci je nenulová a rovna velikosti vektoru  $\mathbf{E}_i$ .



Vytvoření indukovaného elektrického pole ve vodiči se projeví vznikem **indukovaného napětí**  $u_i$  mezi opačnými konci vodiče. V souladu se známým vztahem, jenž definoval tuto veličinu, je hodnota indukovaného napětí

$$u_i = \int_{\ell} \mathbf{E} \, d\ell = \int_{\ell} [\mathbf{B} \times \mathbf{v}] \, d\ell \quad . \quad (11.4)$$

Bude-li intenzita indukovaného elektrického pole homogenní v celém vodiči a navíc vodič přímý a délky  $\ell$ , bude indukované napětí dáno vztahem

$$u_i = [\mathbf{B} \times \mathbf{v}] \cdot \ell \quad . \quad (11.5)$$

Toto indukované napětí bude mít maximální hodnotu při splnění podmínky  $\mathbf{B} \perp \mathbf{v} \perp \ell \perp \mathbf{B}$ , a sice

$$U_i = B \cdot v \cdot \ell \quad . \quad (11.6)$$

Jak je z uvedeného výkladu i z odvozených vztahů patrné, jev elektromagnetické indukce potrvá jen do té doby, dokud se vodič bude v magnetickém poli pohybovat. Přestane-li magnetické pole existovat ( $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  T) nebo bude-li vodič v klidu ( $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  m.s<sup>-1</sup>), elektromagnetická indukce okamžitě vymizí.

Jev samozřejmě nemůžeme pozorovat v případě, kdy se pohyb vodiče děje rovnoběžně se směrem magnetických indukčních čar (se směrem vektoru indukce

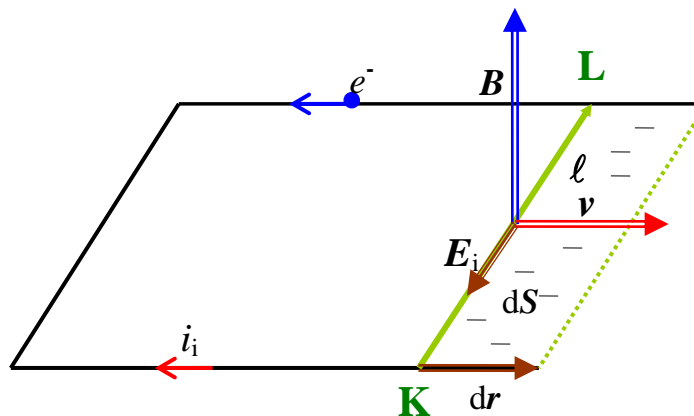
$$\mathbf{v} \parallel \mathbf{B} \Rightarrow [\mathbf{B} \times \mathbf{v}] = \mathbf{0} \text{ V.m}^{-1} \quad !!!$$

### 11.1.2 Faradayův zákon elektromagnetické indukce

Jev elektromagnetické indukce popsán na případu vodiče pohybujícího se v magnetickém poli jisté indukce  $\mathbf{B}$  lze pozorovat i při četných dalších experimentech. Ačkoli jsou jevy spojené s elektromagnetickou indukcí velmi rozmanité, lze je všechny popsat jediným kvantitativním zákonem – **Faradayovým zákonem elektromagnetické indukce**. K jeho formulaci nám poslouží následující úvaha.

Mějme uzavřený vodivý obvod (např. ve tvaru obdélníka – viz následující obr. 11.2)., jehož tři strany jsou pevné a čtvrtá (na obrázku je to strana **KL**) je pohyblivá příčka délky  $\ell$ , jež se posouvá rychlostí  $\mathbf{v}$ . Tato rychlost je rovnoběžná se sousedními (pevnými) dvěma stranami rovnoběžníka. Rovina, v níž rovnoběžník leží, je totožná s rovinou papíru (resp. rovinou obrazovky monitoru). Obvod se celý nachází v magnetickém poli, přičemž budeme pro jednoduchost nadále předpokládat, že toto pole je homogenní (vektor indukce  $\mathbf{B} = \text{konst.}$ ). Jeho směr je navíc i kolmý na rovinu, v níž obvod leží.

Obr. 11.2 – k Faradayovu zákonu elektromagnetické indukce



Předpokládejme, že směr vektoru indukce  $\mathbf{B}$  magnetického pole je na obr. 11.2 orientován kolmo ven z papíru (na obrázku „směřuje nahoru“). Při pohybu vodivé příčky **KL** doprava rychlostí  $\mathbf{v}$  se tato za čas  $dt$  posune o

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt \quad . \quad (11.7)$$

Při pohybu vodiče začne na elektrony ve vodiči působit magnetická síla  $\mathbf{F}_m$  (11.1), takže se přesouvají k bodu **L**, odkud pokračují uzavřenou smyčkou proti směru hodinových ručiček k bodu **K**, kde se celý děj opakuje, ale pouze po tu dobu **dokud je vodič v pohybu !!!** V uvažované smyčce tak vzniká indukovaný proud  $i_i$ , jehož směr je ovšem podle zavedené definice elektrického proudu opačný než směr pohybu záporných elektronů, což v našem případě znamená, že indukovaný proud obíhá smyčkou ve směru chodu hodinových ručiček. Z hlediska zákona zachování energie je elektrická energie indukovaného proudu (jenž obíhá smyčkou bez „přičinění“ nějakého vnějšího zdroje elektromotorického napětí) rovna práci potřebné k posunu smyčky ve směru vektoru rychlosti  $\mathbf{v}$ .

Silové působení magnetického pole v příčce **KL** a průchod proudu touto příčkou a dále celou smyčkou, je ekvivalentní silovému působení indukovaného elektrického pole, jež směřuje od bodu **L** k bodu **K** pohyblivé příčky. Toto indukované elektrické pole je **za námi zvolených zjednodušujících podmínek** polem homogenním a jeho intenzita má velikost

$$E_i = B \cdot v \quad . \quad (11.8)$$

Mezi body **K** a **L** (ale ve skutečnosti v celé uzavřené smyčce) tak vzniká indukované napětí, jehož hodnota je právě dána výrazem odvozeným v předcházejícím článku **11.1.1**.

$$u_i = B \cdot v \cdot \ell \quad . \quad (\text{viz } 11.6)$$

Tento výraz lze ale snadno dále upravit, dosadíme-li ze vztahu (11.7) pro velikost rychlosti pohybující se příčky **KL**

$$v = \frac{dr}{dt} ,$$

$$u_i = B \cdot v \cdot \ell = B \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \ell = B \cdot \frac{dr \cdot \ell}{dt} = B \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{B \cdot dS}{dt} .$$

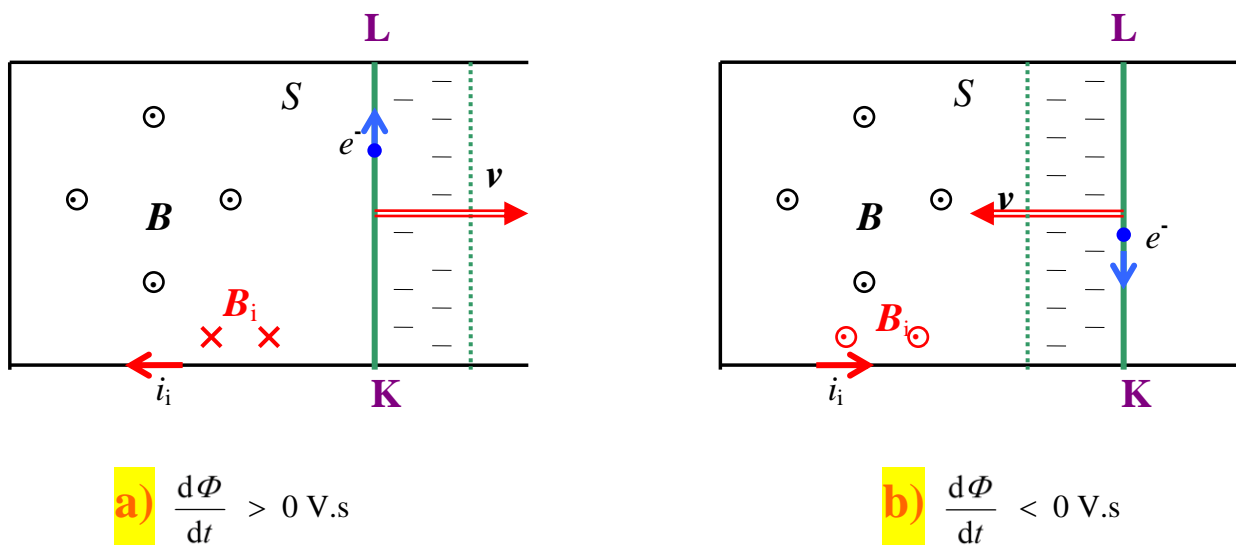
Přitom součin  $B \cdot dS$  v posledním výrazu představuje nekonečně malý přírůstek magnetického indukčního toku  $d\Phi$  v důsledku posunutí vodivé příčky **KL** o nekonečně malý element  $dr$ .

Velikost (tedy absolutní hodnotu) indukovaného elektromotorického napětí  $u_i$  tak nakonec můžeme vyjádřit rovnicí ve tvaru časové změny magnetického indukčního toku

$$u_i = \frac{d\Phi}{dt} . \quad (11.9)$$

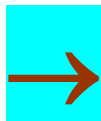
Lze samozřejmě dokázat, že tento vztah odvozený pro naši velmi jednoduchou modelovou situaci **platí naprosto obecně**. Napětí se v uzavřené křivce totiž indukuje nejen při změně plochy  $S$  jako v našem případě, ale i při změnách indukce  $B$  magnetického pole a také při změnách směru, jenž svírá vektor indukce  $B$  magnetického pole s normálou plochy  $S$ .

Povšimněme si ale ještě jedné velice důležité skutečnosti, jež je pro jev elektromagnetické indukce naprosto typická a má rovněž obecnou platnost. Demonstrujme si ji na stejné modelové situaci, jakou jsme měli na předcházejícím obr. 11.2. Mějme vodivý uzavřený obvod ve tvaru obdélníka, jehož tři strany budou znovu pevné a čtvrtá (opět strana **KL**) se posouvá stálou rychlostí  $v$  kolmo na stranu **KL**. Rovina, v níž obdélník leží, je totožná s rovinou papíru. Obvod se nachází v homogenním magnetickém poli indukce  $B = \text{konst.}$ , přičemž vektor  $B$  je orientován kolmo ven z papíru (viz následující obr. 11.3).



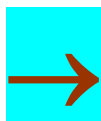
Obr. 11.3 – Lenzovo pravidlo

Na obr. 11.3 a) je znázorněna situace, kdy posuvem vodivé příčky **KL** doprava dochází k nárůstu magnetického indukčního toku  $\Phi$  plochou  $S$  (její obsah vzrůstá), na obr. 11.3 b) pak při posuvu příčky doleva magnetický indukční tok naopak klesá (neboť se plošný obsah postupně zmenšuje).



**Bude-li magnetický indukční tok plochou  $S$  omezenou uzavřeným vodičem**

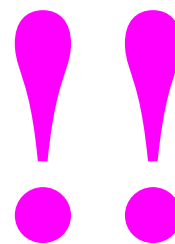
**vzrůstat** tak, jak je tomu na obr. 11.3 a), bude indukovaný elektrický proud  $i_i$  obíhat smyčkou ve směru hodinových ručiček a jím buzené magnetické pole o indukci  $B_i$  bude mít v ploše  $S$  orientaci opačnou, než jakou má původní pole (vektory  $B$  a  $B_i$  budou antiparalelní). Indukované pole se tak „snaží“ snížit nárůst magnetického indukčního toku pole původního.



Na obr. 11.3 b) je tomu právě naopak. **Magnetický indukční tok v ploše  $S$  s časem**

**klesá**, indukovaný proud  $i_i$  obíhá smyčkou proti směru chodu hodinových ručiček a jím buzené magnetické pole o indukci  $B_i$  má nyní v ploše  $S$  stejnou orientaci s polem původním (vektory  $B$  a  $B_i$  jsou v tomto případě paralelní). Konečný výsledek je ale naprosto stejný – indukované pole má „snahu“ opět bránit (tentokrát ovšem) poklesu magnetického indukčního toku původního vnějšího pole.

Uvedený případ je jen potvrzením obecně platné zákonitosti nastávající u všech jevů spojených s elektromagnetickou indukcí, a sice, že indukované napětí a jím vyvolaný indukovaný proud v uzavřeném obvodu vždy svými magnetickými účinky působí **proti změně**, jež indukované napětí (resp. indukovaný proud) vyvolala. Tato skutečnost známá jako **Lenzův zákon** se v matematické podobě promítá do záporného znaménka ve vztahu pro velikost indukovaného napětí.



Lenzovo pravidlo je ostatně jen důsledkem obecně platného zákona zachování energie. Kdyby toto pravidlo neplatilo, docházelo by totiž u jevů spojených s elektromagnetickou indukcí po jejich vybuzení k rychlému samovolnému (lavinovitému) nárůstu v neomezeném rozsahu.

Uvedené skutečnosti lze pak shrnout do konečného výrazu pro napětí, jež se indukuje v uzavřené vodivé smyčce. Dostáváme tak definitivní podobu naprosto obecně platného vztahu

$$u_i = - \frac{d\Phi}{dt} \quad , \quad (11.10)$$

jenž představuje základní zákon elektromagnetické indukce a nazývá se podle objevitele tohoto jevu **Faradayovým zákonem elektromagnetické indukce**, i když v této matematické formě jej poprvé zformuloval až Maxwell.

Zákon vyjadřuje následující skutečnost:

**Indukované elektromotorické napětí  
po jednoduché uzavřené vodivé křivce (vodivé smyčce)  
je rovno záporně vzaté časové změně (matematicky řečeno  
„záporně vzaté derivaci“) magnetického indukčního toku  
plochou  $S$ , jež je danou uzavřenou křivkou ohraničena.**

Jednou z bezprostředních aplikací Faradayova zákona je např. vznik harmonického střídavého napětí a střídavého proudu harmonického průběhu při rovnoměrné rotaci závitu (nebo cívky) v homogenním magnetickém poli.

Indukovaný proud však nevzniká jen v uzavřených jednorozměrných vodičích (tedy v tenkých drátech, či v tenkých smyčkách), ale i v neuzavřených vodičích větších průřezů. V takovýchto masivních kovových tělesech, jež jsou vystavena vlivu rychle se měnících magnetických polí, nebo také v tělesech, jež se v magnetickém poli pohybují, se indukují elektrická pole, jež dávají vznik indukovaným proudům tekoucím v uzavřených smyčkách uvnitř kovu. Tyto proudy se nazývají **vířivé proudy** nebo podle svého objevitele **proudy Foucaultovy**.

Protože masivní kovová tělesa kladou vířivým proudům jen nepatrný odpor, mohou tyto proudy dosahovat poměrně velkých hodnot a často vedou ke vzniku značného Joulova tepla, což může v mnohých případech působit škodlivě. Týká se to především zahřívání feromagnetických jader transformátorů a jiných elektrických strojů, u nichž navíc nepříznivý vliv vířivých proudů roste s frekvencí použitého střídavého proudu (a tedy i s rychlostí změn, k nimž v magnetickém poli dochází). Proto se snažíme omezit vliv těchto proudů ve feromagnetických jádrech tím, že je skládáme z tenkých navzájem izolovaných plechů, nebo pro ně používáme feromagnetické materiály s velkou rezistivitou. Joulova tepla vznikajícího vířivými proudy se naopak s výhodou využívá při tavení kovů v indukčních pecích.

Vířivé proudy mají rovněž silné brzdící účinky. Podle Lenzova pravidla vznikají ve vodiči za jeho pohybu v magnetickém poli vířivé proudy takového směru, že magnetické síly, jež na ně následně působí, mají směr orientovaný proti pohybu vodiče, a tím tento pohyb brzdí. Toho se využívá např. k tlumení pohybu systémů ručkových elektrických měřících přístrojů, v indukčních brzdách, apod.

### 11.1.3 Jev vlastní a vzájemná indukce

Až dosud jsme jev elektromagnetické indukce spojovali se změnami magnetického indukčního toku jistého vnějšího magnetického pole, v němž se nachází uzavřený vodič (uzavřená smyčka). Indukované elektrické pole může ale vznikat v uzavřeném vodiči i při změnách elektrického proudu, jenž jím sám prochází.

Mění-li se totiž s časem elektrický proud protékající vodičem tvořícím uzavřený obvod, mění se ve stejném časovém sledu v okolí vodiče i magnetické pole tímto proudem buzené, a tím se mění i magnetický indukční tok plochou ohraničenou daným vodičem. Změny indukčního toku pak indukují elektrické pole a elektromotorické napětí ve vlastním vodiči. Tento fyzikální jev se nazývá **vlastní indukce**.

Přírodní jev vlastní indukce, k němuž nejčastěji dochází v uzavřeném vodiči nebo cívce, pak charakterizuje skalární fyzikální veličina **indukčnost**  $L$  (též se pro ni používá názvu **vlastní indukčnost**), jež je definována vztahem

$$L = \frac{\Phi}{i} \quad , \quad (11.11)$$

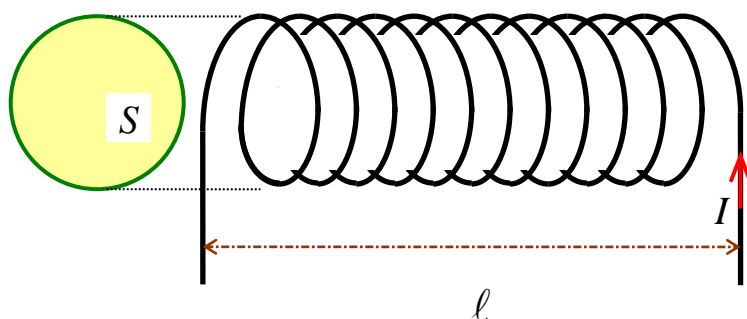
kde  $i$  je okamžitá hodnota proudu procházejícího daným vodičem a  $\Phi$  je okamžitá hodnota celkového magnetického indukčního toku plochou obepnutou vodičem (např. závitů cívky). Jestliže nejsou v okolí vodiče feromagnetika, je indukčnost daného vodiče konstantou závislou pouze na jeho geometrii. V opačném případě (jako je tomu např. u cívky s feromagnetickým jádrem), je indukčnost závislá na proudu (na jeho velikosti a na frekvenci) a platí  $L = L(i)$ . Jak z definice indukčnosti vyplývá, je jednotkou této veličiny

$$[L] = \text{Wb} \cdot \text{A}^{-1} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2} \quad , \text{ pro níž se používá označení } \textit{henry} \text{ (H)}.$$

Ukažme si nyní na příkladu válcové cívky (solenoidu), jak lze využít definičního vztahu (11.11) při určení indukčnosti vodiče. Solenoid má délku  $\ell$  a obsahuje  $N$  závitů plošného průřezu  $S$ . Těmito závitů nechť protéká konstantní stejnosměrný proud  $I$  (viz následující obr. 11.4). Bude-li válcová cívka dostatečně dlouhá, vytvoří se v její dutině homogenní magnetické pole o indukci velikosti

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{\ell} \quad (\text{viz } 10.27)$$

a magnetický indukční tok každým závitkem je roven  $\Phi_1 = B \cdot S$ .



Obr. 11.4 – indukčnost válcové cívky

Při počtu  $N$  závitů cívky pak bude platit, že celkový magnetický indukční tok plochou ohraničenou **všemi těmito závitky dohromady** je dán výrazem

$$\Phi = N \cdot B \cdot S = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot S}{\ell} \cdot I \quad .$$

Porovnáme-li poslední rovnici s definičním vztahem (11.11), dostáváme, že indukčnost  $L$  dostatečně dlouhého solenoidu ve vakuu je určena vztahem

$$L = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot S}{\ell} \quad . \quad (11.12)$$

Je-li navíc solenoid vyplněn izotropním magnetikem (prostředím o relativní permeabilitě  $\mu_r$ ), zvýší se jeho indukčnost na hodnotu

$$L = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N^2 \cdot S}{\ell} \quad . \quad (11.13)$$



Opusťme nyní solenoid a věnujme se jevu vlastní indukce ještě chvíli obecně. Mění-li se proud  $i$  ve vodiči s časem  $i = i(t)$ , mění se i magnetický indukční tok  $\Phi$  plochou obepnutou vodičem a ve vodiči vzniká indukované elektromotorické napětí

$$u_i = - \frac{d\Phi}{dt} \quad , \quad (\text{viz 11.10})$$

pro něž po dosazení z rovnice (11.11) dostaneme výraz

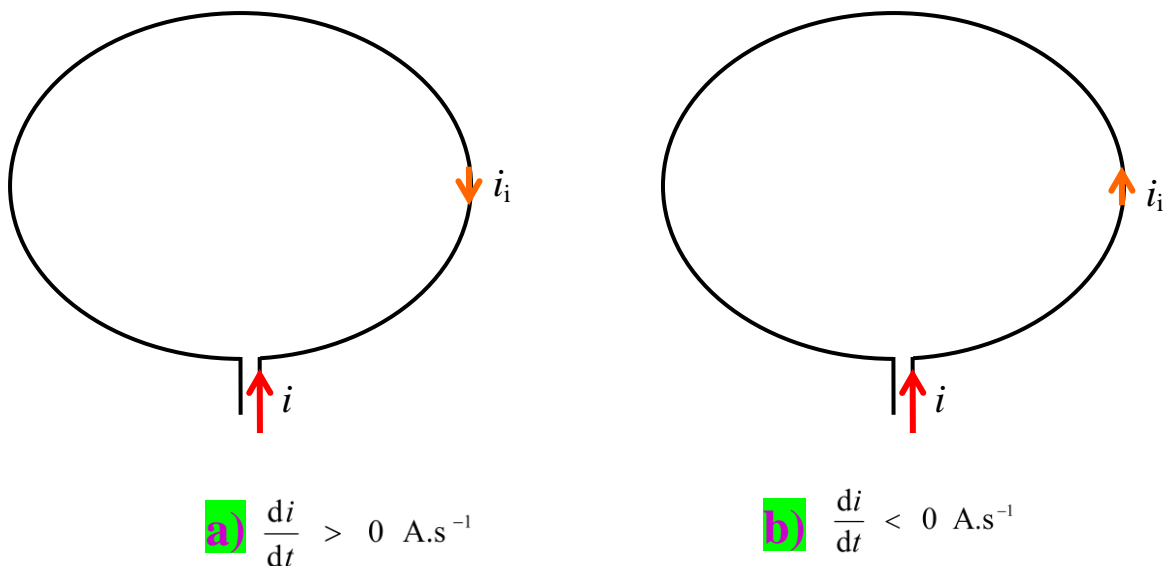
$$u_i = -L \frac{di}{dt} - i \frac{dL}{dt} \quad . \quad (11.14)$$

Jelikož indukčnost  $L$  vodiče **bývá většinou** konstantní (neplatí to však vždy !!! – můžeme např. různě měnit geometrii vodiče, z cívky vysouvat jádro, apod.), dostáváme za splnění tohoto předpokladu vyjádření **Faradayova zákona pro jev vlastní indukce** ve tvaru

$$u_i = -L \frac{di}{dt} \quad . \quad (11.15)$$

Podle tohoto vztahu vidíme, že vodič má indukčnost právě 1 H, jestliže se v něm rovnoměrnou změnou proudu o 1 A za 1 s indukuje elektromotorické napětí 1 V.

I jev vlastní indukce se řídí **Lencovým pravidlem**. Máme-li vodič, jehož indukčnost  $L$  je stále stejná, pozorujeme při změně proudu ve vodiči následující skutečnosti. Vyrůstá-li proud  $i$  ve vodiči (viz obr. 11.5 a) na následující straně), způsobí indukované elektromotorické napětí vznik indukovaného proudu  $i_i$ , jehož směr je opačný než směr proudu  $i$ . Jestliže bude naopak proud  $i$  ve vodiči klesat (viz obr. 11.5 b) tamtéž), bude směr indukovaného proudu  $i_i$  souhlasný se směrem původního proudu  $i$  a indukovaný proud se bude snažit proud  $i$  udržet.



Obr. 11.5 – Lenzovo pravidlo u jevu vlastní indukce

Lenzovo pravidlo lze také velice dobře demonstrovat na případech, kdy dochází **ke změnám indukčnosti  $L$  vodiče**. Vznik indukovaného proudu je spojen např. u cívky se zasouváním či vysouváním feromagnetického jádra nebo s deformací závitů (tím dojde ke změně plochy  $S$ , jež je vodičem obepnuta). Necháme-li cívku protékat stálý proud  $I$  a budeme-li přitom zvětšovat její indukčnost  $L$  zasouváním feromagnetického jádra, bude mít indukovaný proud  $i_i$  směr opačný, než jaký má proud  $I$  cívku procházející, což lze snadno dokázat ampérmetrem. Budeme-li naopak zmenšovat indukčnost cívky vysouváním feromagnetického jádra, uvidíme že směr indukovaného proudu  $i_i$  bude naopak totožný se směrem proudu  $I$ .

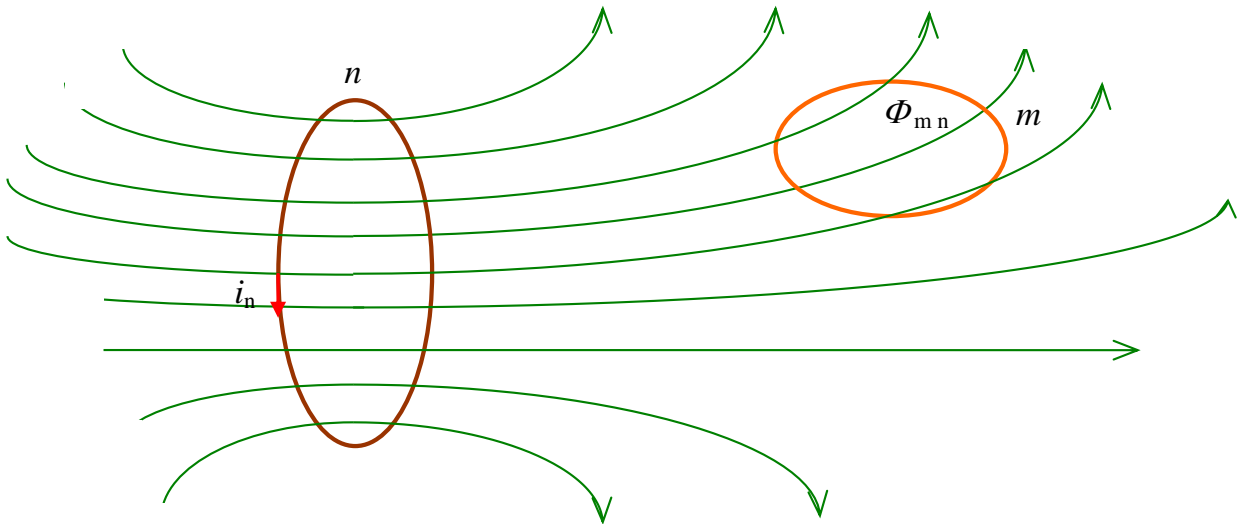


V okolí vodičů protékaných elektrickým proudem se však mohou nacházet i jiné vodiče nebo uzavřené obvody a tím se vlastně nacházejí současně v magnetickém poli těch prvních. Budou-li časové změny proudu v jednom vodiči vyvolávat (indukovat) vznik elektrického pole a s tím i vznik elektromotorického napětí a indukovaného proudu ve vodiči druhém, jenž se nachází v jeho blízkosti, nastává jev nazývaný **vzájemná indukce** (viz obr. 11.6 na následující straně).

Tento fyzikální jev, k němuž dochází mezi dvojicí uzavřených vodičů (např. cívek), charakterizuje skalární fyzikální veličina **vzájemná indukčnost**  $L_{m\ n}$ , definována pro příslušnou  $m, n$ -tou dvojici vztahem

$$L_{m\ n} = \frac{\Phi_{m\ n}}{i_n} \quad , \quad (11.16)$$





Obr. 11.6 - vzájemná indukce dvou vodičů

kde  $i_n$  je okamžitá hodnota proudu procházejícího  $n$ -tým vodičem a  $\Phi_{m n}$  je celková okamžitá hodnota jím vzbuzeného magnetického indukčního toku plochou obepnutou  $m$ -tým vodičem (nebo závitů cívky). Opět platí, že vzájemná indukčnost dvou vodičů je konstantou závislou pouze na jejich geometrii, jestliže nejsou v prostoru v okolí vodičů nějaká feromagnetika. V přítomnosti feromagnetik je vzájemná indukčnost závislá na proudu a platí  $L_{m n} = L_{m n}(i)$ . Jednotkou této fyzikální veličiny je rovněž jeden **henry** (H).

Na vzájemnou indukci dvou obvodů se můžeme podívat i z opačného pohledu. Bude-li proud  $i_m$  protékat  $m$ -tým vodičem, bude celková okamžitá hodnota jím vzbuzeného magnetického indukčního toku plochou obepnutou  $n$ -tým vodičem rovna  $\Phi_{c, n m}$ . Stejně jako v prvním případě lze pak definovat vzájemnou indukčnost těchto obvodů

$$L_{n m} = \frac{\Phi_{n m}}{i_m} \quad . \quad (11.17)$$

Zůstávají-li rozměry i vzájemná geometrická poloha obou vodičů beze změny, jsou obě uvažované vzájemné indukčnosti totožné a platí

$$L_{m n} = L_{n m} \quad . \quad (11.18)$$

Dochází-li ke změnám proudu  $i_n$  v  $n$ -tém vodiči s časem  $i = i(t)$  nebo mění-li se geometrická konfigurace obou obvodů (a tím pádem i jejich vzájemná indukčnost  $L_{m n}$ ), mění se i magnetický indukční tok  $\Phi_{m n}$  plochou obepnutou  $m$ -tým vodičem a v tomto vodiči vzniká indukované elektromotorické napětí

$$u_i = - \frac{d\Phi}{dt} \quad , \quad (11.10)$$

Toto napětí lze po dosažení z rovnice (11.16) vyjádřit vztahem

$$\boxed{u_i = -L_{m n} \frac{di_n}{dt} - i_n \frac{dL_{m n}}{dt}} \quad . \quad (11.19)$$

Za předpokladu, že vzájemná indukčnost  $L_{m\ n}$  dvou uzavřených vodičů zůstává konstantní (což ovšem znamená jejich neměnnou geometrii a navíc absenci feromagnetických látek), přejde poslední rovnice do jednoduššího tvaru, jenž vlastně představuje vyjádření Faradayova zákona pro jev vzájemné indukce, a to

$$\boxed{u_i = -L \frac{d i}{d t}} \quad . \quad (11.20)$$

**Pozn.:** Je celkem pochopitelné, že jev vzájemné indukce mezi dvojicí uzavřených obvodů je vždy spojen s jevem vlastní indukce ve vodiči, v němž prochází časově proměnný proud, jenž oba zmíněné jevy svými změnami vyvolává.



Hodnotu vzájemné indukčnosti dvou obvodů ovlivňuje zejména jejich uspořádání (vzájemná geometrie). Jestliže prakticky celý magnetický indukční tok jednoho obvodu prochází plochou obepnutou druhým vodičem, hovoříme o tom, že **vazba** mezi oběma obvody je **těsná**. V opačném případě, kdy magnetický indukční tok jednoho obvodu druhým obvodem prakticky neprochází, hovoříme o **vazbě volné**.

Příkladem těsné vazby mezi dvěma obvody mohou být dvě válcové cívky (solenoidy) navinuté na sobě, mající stejnou délku  $\ell$  i stejný plošný průřez  $S$ . Předpokládejme, že první solenoid obsahuje  $N_1$  závitů a těmito závity protéká konstantní stejnosměrný proud  $I_1$ . Bude-li cívka dostatečně dlouhá, vybudí se v její dutině homogenní magnetické pole, jehož indukce má velikost

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N_1 \cdot I_1}{\ell} \quad .$$

Magnetický indukční tok každým závitem druhé cívky je roven  $\Phi_1 = B \cdot S$ . Má-li tato cívka  $N_2$  závitů, bude platit, že celkový magnetický indukční tok plochou ohraničenou všemi jejími závity je roven výrazu

$$\Phi_{12} = N_2 \cdot B \cdot S = \frac{\mu_0 \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot S}{\ell} \cdot I_1 \quad .$$

Porovnáme-li poslední rovnici s definičním vztahem (11.16) pro fyzikální veličinu vzájemná indukčnost, dostáváme, že vzájemná indukčnost  $L_{12}$  dvou dostatečně dlouhých solenoidů navinutých na sobě je ve vakuu určena vztahem

$$\boxed{L_{12} = \frac{\mu_0 \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot S}{\ell}} \quad . \quad (11.21)$$

Je-li v dutině cívek izotropní prostředí o relativní permeabilitě  $\mu_r$ , zvýší se vzájemná indukčnost na hodnotu

$$\boxed{L_{12} = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot S}{\ell}} \quad . \quad (11.22)$$

### 11.1.4 Energie magnetického pole

Protéká-li vodičem o odporu  $R$  a indukčnosti  $L$  ustálený (konstantní stejnosměrný) proud  $I_0$ , existuje v jeho okolí stacionární magnetické pole. Veškerá práce, kterou zdroj proudu mající elektromotorické napětí  $U_e$  za určitý čas  $t$  vykoná, se v tomto případě spotřebuje pouze na zahřátí vodiče (je rovna Joulovu teplu), zatímco na udržení magnetického pole zdroj žádnou práci nekoná. Platí, že

$$U_e \cdot I_0 \cdot t = R \cdot I_0^2 \cdot t \quad . \quad (11.23)$$

Jinak je tomu ale při vzniku magnetického pole po zapojení obvodu. Proud  $i$  vzrůstá z nulové hodnoty na jistou konečnou hodnotu  $I$  a v důsledku této změny se v indukčnosti indukuje elektromotorické napětí

$$u_L = -L \frac{di}{dt} \quad .$$

Pro obě napětí pak musí platit vztah (vlastně II. Kirchhoffův zákon)

$$R \cdot i = U_e - L \frac{di}{dt} \quad , \quad \text{neboli} \quad U_e = R \cdot i + L \frac{di}{dt} \quad .$$

Práce neelektrických sil zdroje (energie  $dE$ , kterou za čas  $dt$  musí nyní „dodat“ zdroj do obvodu), bude v tomto případě rovna

$$U_e i dt = R i^2 dt + L i \frac{di}{dt} dt = R i^2 dt + L i di \quad . \quad (11.24)$$

Porovnáme-li rovnici (11.24) s rovnicí (11.23), vidíme, že poslední člen  $L i di$  představuje infinitesimální (nekonečně malou) hodnotu práce  $dW$ , kterou zdroj vykoná za čas  $dt$  při vytváření magnetického pole. Na úplné vytvoření magnetického pole (a tedy na dosažení proudu  $I$  z původní nulové hodnoty) pak musí zdroj vykonat práci, kterou spočítáme integrací

$$W = \int_{i=0}^{i=I} L i di = \frac{1}{2} L I^2 \quad . \quad (11.25)$$

Tuto práci pak podle známé definice fyzikální veličiny energie ztotožníme s přírůstkem energie magnetického pole vytvářeného daným vodičem (např. cívkou). A protože při počáteční nulové hodnotě proudu neexistovalo v okolí vodiče ani magnetické pole, přiřadíme právě tomuto stavu nulovou energii. Konečný stav, kdy vodičem protéká proud  $I$ , tak bude charakterizovat energie magnetického pole

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} L I^2} \quad . \quad (11.26)$$

Tuto energii, skutečně **přísluší právě danému magnetickému poli**, jež existuje v dané oblasti prostoru o objemu  $V$ , a proto ji nazýváme **energií magnetického pole**. Bude-li proud ve vodiči klesat, bude se energie jím buzeného magnetického pole zase postupně zmenšovat. Vypneme-li proud v obvodu, magnetické pole postupně (v kratším či delším čase) zcela vymizí a energie tohoto pole se bude rovnat energii doznívajícího elektrického proudu (v obvodu dochází k tzv. přechodným stavům), a ta se pak dále bude rovnat vyvinutému Joulovu teplu.

**Pozn.:** Vztah (11.26) umožňuje určit indukčnost  $L$  vodiče v takových případech, kdy dost dobře nelze aplikovat definiční vztah této veličiny (11.11). Týká se to zejména masivních vodičů nezanedbatelné tloušťky, u nichž obvykle není možné jednoznačně definovat plochu obepnutou takovým vodičem pro výpočet příslušného magnetického indukčního toku.

Vyjádřeme na závěr energii  $E_m$  magnetického pole, jež vzniká průchodem proudu v dutině dostatečně dlouhého solenoidu délky  $\ell$ , plošného průřezu  $S$ , s počtem  $N$  závitů, přičemž dutinu solenoidu vyplňuje izotropní prostředí o relativní permeabilitě  $\mu_r$ .

Dosaďme do výrazu (11.26) pro energii magnetického pole za indukčnost  $L$  ze vztahu (11.13)

$$L = \frac{\mu_o \cdot \mu_r \cdot N^2 \cdot S}{\ell} .$$

Dostáváme tak

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot \mu_o \cdot \mu_r \cdot \frac{N^2 \cdot S}{\ell} \cdot I^2 .$$

Protože se magnetické pole (jež je navíc v tomto případě homogenní) prakticky omezuje jen na vnitřní prostor solenoidu, jehož objem  $V = S \cdot \ell$ , můžeme snadno definovat **hustotu energie magnetického pole** solenoidu vztahem

$$w_m = \frac{E_m}{V} = \frac{E_m}{S \cdot \ell} = \frac{1}{2} \cdot \mu_o \cdot \mu_r \cdot \frac{N^2}{\ell^2} \cdot I^2 .$$

Uvědomíme-li si, že výraz  $\mu_o \cdot \mu_r \cdot \frac{N \cdot I}{\ell}$  udává velikost  $B$  magnetické indukce v dutině solenoidu, můžeme provést poslední úpravu a získat tak konečné vyjádření hustoty energie magnetického pole v dutině dostatečně dlouhé válcové cívky v ekvivalentních zápisech

$$\boxed{w_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu_o \cdot \mu_r} = \frac{1}{2} \cdot B \cdot H = \frac{1}{2} \cdot \mu_o \cdot \mu_r \cdot H^2} , \quad (11.27)$$

kde  $H$  je velikost intenzity magnetického pole v dutině solenoidu.

Vztah (11.27) platí nejen pro magnetické pole válcové cívky, lze dokázat, že jeho platnost je obecná a vyjadřuje **hustotu energie libovolného magnetického pole v určitém bodě prostoru**. Pouze v případě, že směry vektorů magnetické indukce  $B$  a intenzity  $H$  magnetického pole jsou různé, je třeba hustotu magnetické energie vyjádřit pomocí skalárního součinu

$$\boxed{w_m = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}} . \quad (11.28)$$

Naopak, budeme-li znát rozložení hustoty  $w_m$  energie magnetického pole v prostoru, můžeme pak zpětně určit magnetickou energii  $E_m$ , jež přísluší magnetickému poli v dané oblasti prostoru o objemu  $V$  integrací. Platí

$$\boxed{E_m = \int_V w_m \, dV} . \quad (11.29)$$

## 11.2 STŘÍDAVÝ ELEKTRICKÝ PROUD

### 11.2.1 Charakteristika střídavého proudu a jeho vznik

V minulém semestru jsme svůj výklad zaměřili na ustálené elektrické proudy (formálně označované velkým  $I$ ) a na mechanismus jejich vzniku v pevných kovových vodičích (tedy jistých rezistorech o odporu  $R$ ). V této kapitole budou objektem našeho zkoumání časově proměnné proudy (ty navenek „prozradí“ malé  $i$  jako symbol fyzikální veličiny), konkrétně pak proudy střídavé. Kromě chování odporů nás bude zajímat i to, co se z fyzikálního hlediska děje v obvodech střídavých proudů, v nichž jsou zapojeny prvky s jistou indukčností  $L$  a kapacitou  $C$ .

Pozor na to, že ne každý časově proměnný elektrický proud je proudem střídavým.

**Střídavý elektrický proud** je pouze takový proud, jenž splňuje dvě základní charakteristiky:

→ 1) **periodicky** mění svou velikost a směr, přičemž

→ 2) jeho **střední** (tedy průměrná) **hodnota  $I_p$  za jednu periodu je rovna nule**

$$I_p = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} i \, dt = 0 \text{ A} \quad . \quad (11.30)$$

Časový průběh okamžité hodnoty obecného střídavého proudu může být přitom popsán libovolnou periodickou funkcí

$$i(t) = i(t + k.T) \quad , \quad (11.31)$$

kde  $T$  je **perioda střídavého proudu** a  $k$  libovolné celé číslo.

Protože je možné (jak potvrzuje matematická teorie) libovolnou omezenou periodickou funkci vyjádřit Fourierovou řadou harmonických funkcí, znamená to z fyzikálního hlediska, že obecně lze pokládat každý střídavý proud za superpozici harmonických střídavých proudů. A proto se také v dalším výkladu zaměříme pouze na vyšetřování vlastností jednoduchého harmonického střídavého proudu, jehož okamžitá hodnota  $i$  je v libovolném čase  $t$  vyjádřena harmonickou funkcí lineárního argumentu

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi) \quad , \quad (11.32)$$

v níž  $I_m$ ,  $\omega$  a  $\varphi$  jsou konstanty, jež představují:

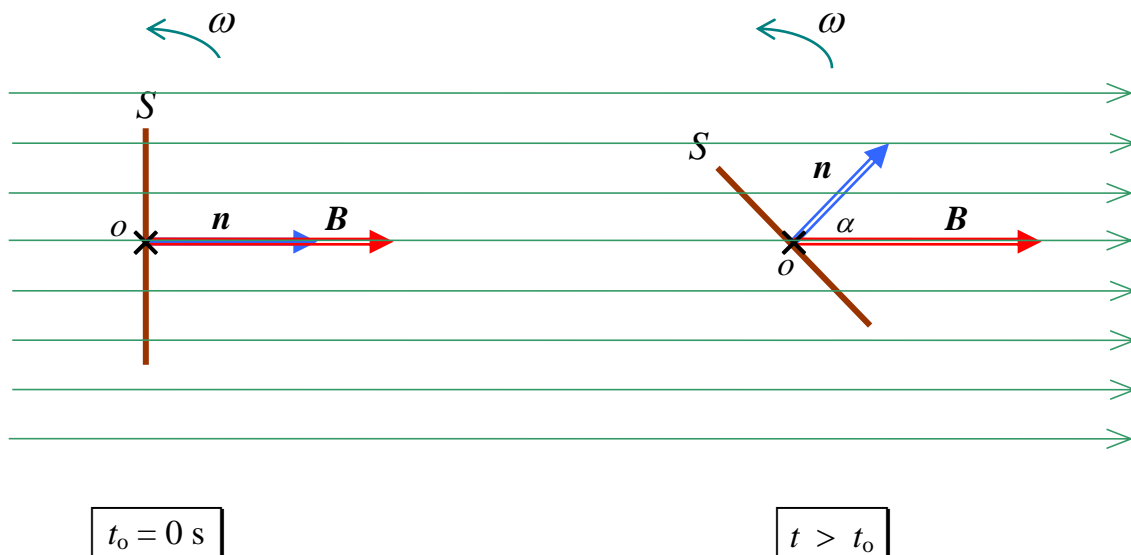
$I_m$  → maximální hodnotu (neboli **amplitudu**) harmonického střídavého proudu;

$\omega$  → jeho **úhlovou frekvenci**, pro níž platí  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  ;

Výraz  $\omega t + \varphi$  pak označuje tzv. **fázi**, přičemž  $\varphi$  je **počáteční fáze** v čase  $t_0 = 0$  s .

Typickým případem harmonického střídavého proudu je elektrický proud vznikající vlastní indukci při rovnoměrné rotaci závitu (nebo cívky) v homogenním magnetickém poli.

Mějme takový jeden rovinný závit o plošném obsahu  $S$ , jenž se otáčí kolem osy  $o$  ležící v rovině závitu stálou úhlovou rychlostí o velikosti  $\omega = konst.$ . Závit se nachází v homogenním magnetickém poli o indukci  $\mathbf{B} = konst.$ , přičemž vektor magnetické indukce je k rotační ose kolmý (viz obr. 11.7). Na tomto obrázku leží vektor magnetické indukce  $\mathbf{B}$  v rovině papíru a osa  $o$  je k papíru kolmá; proto je vyznačena jen jako bod.



Obr. 11.7 – vznik harmonického střídavého proudu

Nechť je vektor indukce  $\mathbf{B}$  magnetického pole v čase  $t_0 = 0$  s rovnoběžný s normálou  $\mathbf{n}$  plochy  $S$ . V čase  $t_0$  je tedy magnetický indukční tok plochou  $S$  největší a je dán výrazem

$$\Phi_0 = B \cdot S \quad .$$

V libovolném čase  $t$ , kdy normála  $\mathbf{n}$  a vektor indukce  $\mathbf{B}$  spolu svírají úhel  $\alpha = \omega \cdot t$ , bude hodnota magnetického indukčního toku

$$\Phi(t) = B \cdot S \cdot \cos \alpha = B \cdot S \cdot \cos \omega t \quad . \quad (11.33)$$

Během rotace závitu se tedy magnetický indukční tok periodicky mění s časem a podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce se v něm indukuje elektromotorické napětí

$$u_i = - \frac{d\Phi}{dt} = B \cdot S \cdot \omega \cdot \sin \omega t \quad , \quad (11.34)$$

jež má periodický (a navíc harmonický) průběh. Toto indukované elektromotorické napětí nazýváme **okamžitou hodnotou střídavého napětí** a budeme je nadále označovat (stejně jako ostatní okamžité hodnoty časově proměnných veličin) malým písmenem, tedy  $u$ .

Kdybychom místo jednoho jediného závitu nechali za naprosto stejných podmínek rotovat v homogenním magnetickém poli cívku tvořenou  $N$  závity, byla by okamžitá hodnota střídavého napětí logicky  $N$ -krát větší, tedy

$$u = N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \sin \omega t \quad . \quad (11.35)$$

V okamžiku, kdy je rovina závitů kolmá k magnetickým indukčním čarám (a kdy tudíž platí  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{B}$  !!), je okamžitá hodnota střídavého napětí nulová, naopak své maximální hodnoty (neboli amplitudy)  $U_m$  dosahuje právě v okamžiku, kdy rovina závitů splývá se směrem indukčních čar (kdy zase  $\mathbf{n} \perp \mathbf{B}$  !!). Ze vztahu (11.35) je na první pohled patrné, že tuto amplitudu napětí udává výraz

$$U_m = N \cdot B \cdot S \cdot \omega \quad (11.36)$$

a že při dané úhlové rychlosti  $\omega$ , s níž se závit otáčí v homogenním magnetickém poli indukce dané velikosti  $B$ , lze hodnotu této amplitudy ovlivnit pouze plošným obsahem závitů a zejména pak jejich počtem.

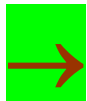
Okamžitou hodnotu harmonického střídavého napětí pak můžeme psát ve tvaru

$$u = U_m \cdot \sin \omega t \quad , \quad (11.37)$$

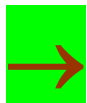
přičemž úhlová frekvence tohoto napětí  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  je číselně rovna úhlové rychlosti  $\omega$ , s níž se cívka (nebo závit) v magnetickém poli otáčí.

Současně s tím, jak se indukuje v cívce harmonické střídavé napětí (11.37), začne tímto obvodem procházet indukovaný **harmonický střídavý proud**. Tento střídavý proud má stejnou periodu  $T$  (a též frekvenci  $f$  i úhlovou frekvenci  $\omega$ ), jako příslušné harmonické střídavé napětí, ale může být vůči němu určitým způsobem fázově posunut o jistou hodnotu  $\varphi$ . Říkáme, že mezi napětím a proudem vzniká **fázový rozdíl** (fázový posun)  $\varphi$ . Okamžitá hodnota  $i$  harmonického střídavého proudu je tedy v libovolném čase  $t$  vyjádřena již jednou uvedenou funkcí

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad . \quad (11.32)$$



Je-li přitom hodnota fázového rozdílu  $\varphi$  **kladná**, znamená to, že se **proud předchází fázově před napětím**,



bude-li naopak  $\varphi$  **záporné**, bude se **proud za napětím fázově zpožd'ovat**. Vznik fázových rozdílů bude podrobně vysvětlen později v článcích **11.2.4 – 6**.

## 11.2.2 Zavedení fyzikálních veličin střední a efektivní hodnota střídavého proudu a napětí

Jelikož se střídavý proud s časem periodicky mění, zavádějí se určité **konstantní** veličiny, jež jistým způsobem daný střídavý proud charakterizují a porovnávají jeho účinky s účinky ustáleného stejnosměrného proudu.

## a) Střední hodnota střídavého proudu $I_p$

Střední hodnota každé proměnné veličiny představuje vlastně hodnotu průměrnou, v případě elektrického proudu je to pak průměrná hodnota za určitý časový interval. Fyzikální význam takové střední hodnoty  $I_p$  časově proměnného proudu  $i$  je následující:

**Střední hodnota** časově proměnného proudu  $i$  v časovém intervalu  $\langle t_1 ; t_2 \rangle$  je rovna ustálenému (tedy *stejnoseměrnému*) proudu  $I_p$ , jímž se za dobu  $t_2 - t_1$  přenese naprosto stejný náboj  $Q$  jako uvažovaným proměnným proudem  $i$ .

Pro tuto střední hodnotu tak musí platit vztah

$$I_p = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt \quad . \quad (11.38)$$

Jak již bylo řečeno v samém úvodu v definici střídavého elektrického proudu, je jeho střední hodnota  $I_p$  za jednu periodu (a pochopitelně i za jakýkoli celočíselný násobek periody  $k \cdot T$ ) vždy rovna nule (11.30). Proto má smysl počítat tuto veličinu pouze v kratším časovém intervalu, např. za první půlperiodu. V tom případě musí tedy podle (11.38) platit

$$I_p = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} i(t) dt \quad .$$

U harmonického střídavého proudu, jehož okamžitou hodnotu  $i$  v libovolném čase  $t$  vyjadřuje funkce

$$i = I_m \sin \omega t \quad ,$$

pak dostáváme

$$I_p = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t dt = \frac{2}{T} \cdot \frac{I_m}{\omega} \cdot [-\cos \omega t]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2}{T} \cdot \frac{I_m \cdot T}{2\pi} \cdot \left[ -\cos \frac{2\pi}{T} \cdot t \right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{I_m}{\pi} \cdot (1 + 1) \quad .$$

Střední hodnota harmonického střídavého proudu za jednu půlperiodu je tedy

$$I_p = \frac{2}{\pi} \cdot I_m \doteq 0,637 I_m \quad . \quad (11.39)$$

**Pozn.:** Při jiném průběhu střídavého proudu, než je průběh harmonický, dostaneme logicky i jiný výraz pro jeho střední hodnotu  $I_p$ .



## b) Efektivní hodnota střídavého proudu $I$

Efektivní hodnota časově proměnného proudu (nebo též stručně efektivní proud) je veličinou, jejíž definice je založena na tepelných účincích tohoto proudu. V případě periodicky proměnného proudu  $i$  vychází definice této veličiny z tepelných účinků proudu za dobu jedné periody. Platí:

**Efektivní hodnota** periodicky proměnného proudu  $i$  je rovna ustálenému (*stejnoseměrnému*) proudu  $I$ , jenž v rezistoru o odporu  $R$  vyvine za dobu jedné periody  $T$  stejné teplo jako uvažovaný proud  $i$ .

Z této definice vyplývá, že efektivní hodnota  $I$  musí splňovat rovnost

$$R I^2 T = R \cdot \int_0^T i^2(t) dt \quad ,$$

odkud po jednoduché úpravě vyplývá, že

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2(t) dt} \quad . \quad (11.40)$$

Při harmonickém průběhu střídavého proudu  $i = I_m \sin \omega t$  lze spočítat jeho efektivní hodnotu  $I$  následovně:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = I_m \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \sin^2 \omega t dt} \quad . \quad (11.41)$$

Při výpočtu integrálu  $\int_0^T \sin^2 \omega t dt$  lze buď použít metody „per partes“, nebo vyjít ze vztahu mezi goniometrickými funkcemi, což dává stejný výsledek

$$\int_0^T \sin^2 \omega t dt = \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt = \frac{T}{2} \quad .$$

Podrobný výpočet si proveďte sami.

Po dosazení hodnoty integrálu do výrazu (11.41) dostáváme, že efektivní hodnota harmonického střídavého proudu je

$$I = I_m \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{T}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad , \text{ a tedy}$$

$$I = I_m \frac{\sqrt{2}}{2} \quad . \quad (11.42)$$

## c) Střední a efektivní hodnota střídavého napětí

Podobně jako u časově proměnného proudu  $i$  lze definovat ekvivalentními definicemi též střední a efektivní hodnoty časově proměnného napětí  $u$ .

Pro harmonicky časově proměnné napětí  $u = U_m \cdot \sin \omega t$  tak dostaneme, že toto napětí má v intervalu jedné periody  $T = t_2 - t_1$  střední hodnotu nulovou ( $U_p = 0$  V), v době jedné kladné půlperiody  $\frac{T}{2} = t_2 - t_1$  má pak střední hodnotu  $U_p = \frac{2}{\pi} \cdot U_m$ .

Efektivní hodnota harmonického střídavého napětí je potom  $U = U_m \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

### 11.2.3 Elektrické obvody střídavého proudu

Elektrické obvody střídavého proudu jsou obvody, v nichž je zapojen zdroj (nebo zdroje) střídavého elektromotorického napětí. Pro snažší pochopení následujících článků si uvedme definici některých základních pojmů používaných v této oblasti fyziky.

Každý (a nejen) střídavý obvod je sestaven z určitých **prvků**, což jsou vždy části obvodu mezi dvěma svorkami, jako např. zdroje napětí, rezistory, cívky, kondenzátory. Elektrické a magnetické vlastnosti prvků elektrického obvodu pak charakterizují fyzikální veličiny, jež se označují jako **parametry** daného **prvku** (je to např. elektromotorické napětí zdroje, odpor rezistoru, kapacita kondenzátoru, indukčnost vodiče).

V reálných obvodech se setkáváme s **reálnými prvky obvodu**. Je pro ně typické, že kromě nenulové hodnoty svého základního parametru mají nenulové hodnoty i dalších vedlejších parametrů – reálná cívka má kromě určité indukčnosti též nenulový odpor, kondenzátor má jistou kapacitu, ale také nenulový svodový odpor, apod. Z těchto důvodů jsou definovány tzv. **ideální prvky elektrického obvodu**, jež charakterizuje rovněž nenulová hodnota jejich základního parametru, ale na rozdíl od reálných prvků mají hodnoty ostatních parametrů nenulové, případně nekonečně velké – ideální cívka má nenulovou indukčnost, ale nulový odpor a nulovou kapacitu, ideální kondenzátor zase nenulovou kapacitu, ale nulovou indukčnost a nekonečně velký svodový odpor, atd.

Podle funkce, jež prvky v obvodech vykonávají, je pak rozdělujeme do dvou základních skupin – na prvky **aktivní** a **pasivní**:

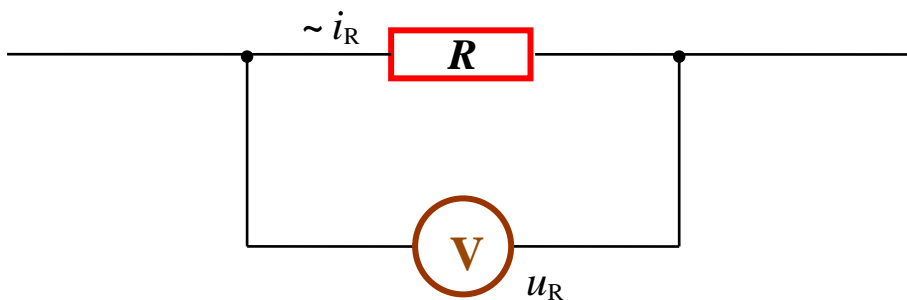
→ pojmem **aktivní prvek elektrického obvodu** označujeme takový prvek, jenž **je trvalým zdrojem elektrické energie**. V ideálních elektrických obvodech to jsou **ideální zdroje napětí**, jejichž jediným nenulovým parametrem je příslušné elektromotorické napětí, nebo **ideální zdroje proudu**, jejichž jediným nenulovým parametrem je do obvodu dodávaný elektrický proud.

→ **pasívním prvkem elektrického obvodu** je naopak ten prvek, jenž *nemůže být trvalým zdrojem elektrické energie* (např. rezistor, cívka, kondenzátor). Okamžitá hodnota napětí, jež naměříme mezi svorkami takového prvku při průchodu elektrického proudu tímto prvkem, se nazývá **svorkové napětí na pasívním prvku**.

V ideálních elektrických obvodech se tak setkáváme s **ideálními rezistory** charakterizovanými jediným parametrem – elektrickým odporem  $R$ , **ideálními cívkami**, jež charakterizuje jediný parametr – indukčnost  $L$ , a **ideálními kondenzátory**, jež jako jediný parametr charakterizuje jejich kapacita  $C$ .

### 11.2.4 Jednoduchý obvod střídavého proudu s odporem

Tento obvod je nejjednodušším typem střídavého obvodu, v němž nedochází k žádnému fázovému posunu mezi proudem  $i_R$  a napětím  $u_R$ . Příklad tohoto zapojení je na následujícím obr. 11.8. Ideálním rezistorem o odporu  $R$  protéká střídavý proud  $i_R$  a na svorkách rezistoru pak měříme příslušné napětí  $u_R$ .



Obr. 11.8 – jednoduchý obvod střídavého proudu s ideálním rezistorem

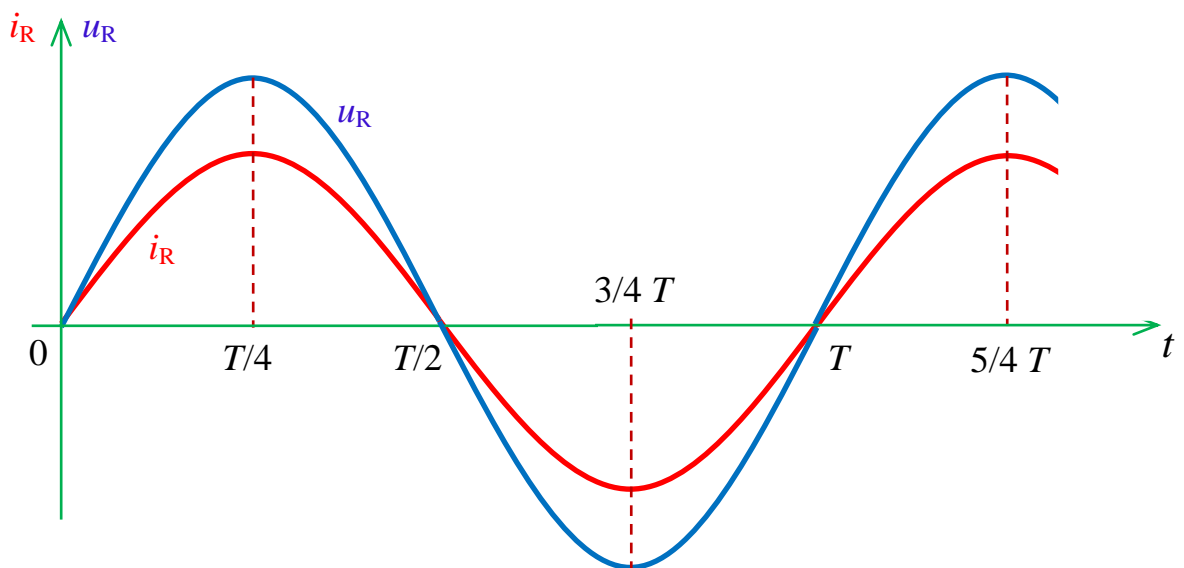
Prochází-li obvodem, v němž je zapojen jen ideální rezistor, střídavý proud harmonického průběhu  $i_R = I_{Rm} \sin \omega t$ , bude okamžitá hodnota  $u_R$  svorkového napětí na rezistoru dána Ohmovým zákonem

$$u_R = R \cdot i_R = R \cdot I_{Rm} \sin \omega t \quad . \quad (11.43)$$

Jak je ze vztahu (11.43) patrné, napětí  $u_R$  na rezistoru je skutečně ve fázi s proudem (mezi oběma veličinami nevzniká žádný fázový rozdíl  $\rightarrow \varphi = 0$ ) a amplituda svorkového napětí na ideálním rezistoru  $U_{Rm} = R \cdot I_{Rm}$  **nijak nezávisí na frekvenci střídavého proudu**. Ideální rezistor mající odpor  $R$  se chová stejně jako v obvodu stejnosměrného proudu, elektrická energie střídavého proudu se při jeho průchodu rezistorem rovná vyvíjenému Joulovu teplu.



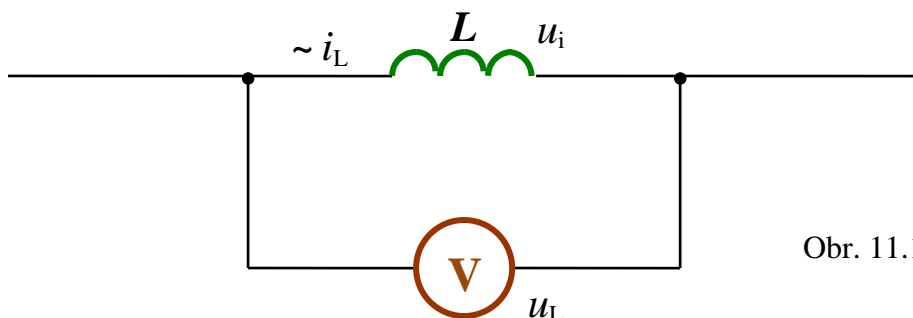
Na následujícím obr. 11.9 je pak znázorněn časový průběh harmonického střídavého proudu  $i_R$  (**červená** závislost) a současně i příslušného svorkového napětí  $u_R$  (**modrá** závislost) v obvodu s ideálním rezistorem.



Obr. 11.9 – časová závislost harmonického střídavého proudu a napětí v obvodu s ideálním rezistorem

### 11.2.5 Jednoduchý obvod střídavého proudu s indukčností

Příkladem takového jednoduchého střídavého obvodu s ideální indukčností může být například obvod, v němž je zapojena cívka, jejíž odpor  $R$  je nulový a nemusíme jej proto uvažovat. Na obrázku 11.10 máme zapojení takové ideální indukčnosti  $L$ . Protéká jí střídavý proud  $i_L$  a na jejích svorkách pak měříme příslušné napětí  $u_L$ .



Obr. 11.10 – jednoduchý obvod střídavého proudu s ideální indukčností

Předpokládejme, že ideální indukčností  $L$  bude procházet střídavý proud harmonického průběhu. Jelikož je tento proud časově proměnný, bude se v indukčnosti v důsledku jevu **vlastní indukce** indukovat elektromotorické napětí, jež je podle Faradayova zákona dáno známým výrazem

$$u_i = -L \frac{d i_L}{d t} \quad . \quad (11.15)$$

Protože v ideálním obvodu na obrázku není (a ani nemůže být) zapojen žádný odpor  $R$ , musí podle pro napětí ve smyčce platit rovnost (vlastně II. Kirchhoffův zákon)

$$u_L + u_i = 0 \quad ,$$

z níž vyplývá vztah pro okamžitou hodnotu svorkového napětí  $u_L$  na indukčnosti

$$u_L = L \frac{d i_L}{d t} \quad . \quad (11.44)$$

Jak bylo řečeno výše, našim jednoduchým obvodem s ideální indukčností prochází střídavý proud mající harmonický průběh  $i_L = I_{Lm} \sin \omega t$ . Časový průběh napětí na indukčnosti tak snadno získáme snadno z posledního vztahu (11.44):

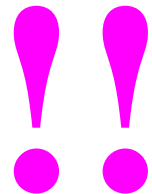
$$u_L = L \frac{d i_L}{d t} = L \omega I_{Lm} \cos \omega t \quad ,$$

což lze dále upravit pomocí známých vztahů platících mezi goniometrickými funkcemi do tvaru

$$u_L = \omega L \cdot I_{Lm} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = U_{Lm} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad . \quad (11.45)$$

Vidíme, že v jednoduchém obvodu střídavého proudu s ideální indukčností  $L$  dochází mezi napětím na indukčnosti a proudem jí protékajícím **k fázovému posunu  $\pi/2$  ve prospěch napětí** (tento fázový rozdíl  $\varphi$  odpovídá časovému posunu mezi napětím a proudem právě o jednu čtvrtinu periody, tedy  $t = T/4$ ).

Zpoždění proudu vůči svorkovému napětí v obvodu s ideální indukčností je právě důsledkem jevu vlastní indukce  $\rightarrow$  podle Lenzova zákona totiž indukované elektromotorické napětí  $u_i$  působí vždy svými účinky proti příčinám, jež vznik tohoto napětí vyvolaly, a onou příčinou byl v tomto studovaném případě právě průchod proměnného střídavého proudu obvodem s ideální indukčností.



Z výrazu (11.45) navíc vyplývá, že mezi amplitudou  $U_{Lm}$  střídavého napětí na ideální indukčnosti a amplitudou  $I_{Lm}$  střídavého proudu v tomto obvodu platí jednoduchý vztah

$$U_{Lm} = \omega L \cdot I_{Lm} \quad , \quad (11.46)$$

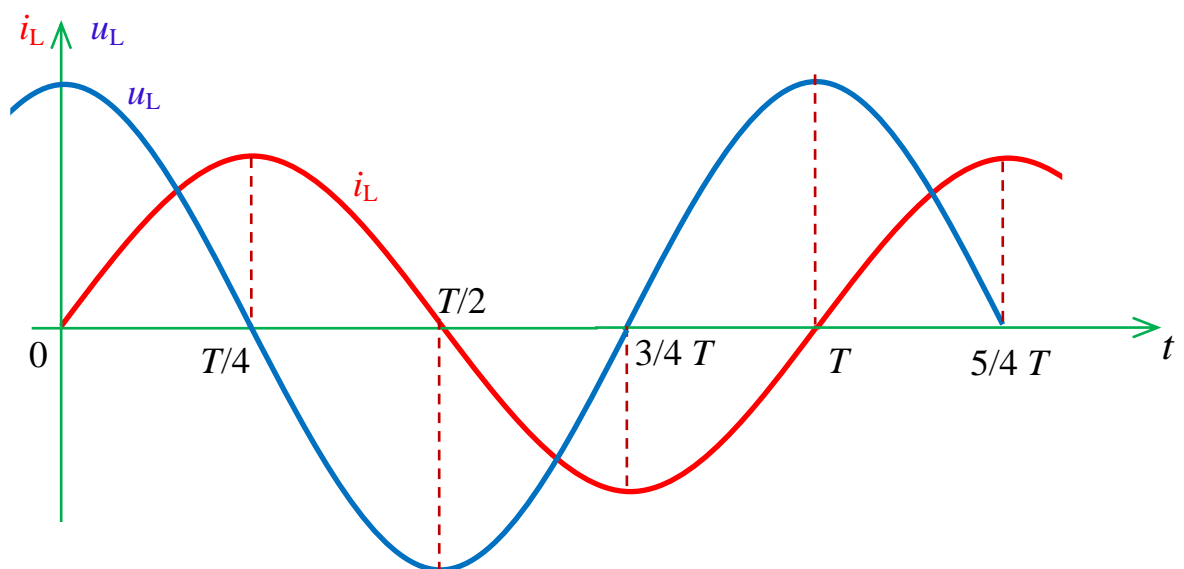
jenž je vlastně Ohmovým zákonem pro tento jednoduchý střídavý obvod. Veličina

$$X_L = \frac{U_{Lm}}{I_{Lm}} = \omega L \quad (11.47)$$

přitom představuje „překážku“, jež stojí střídavému proudu v tomto případě v cestě. Její číselná hodnota – na rozdíl od předcházejícího případu obvodu s ideálním odporem – **je na frekvenci střídavého proudu závislá**, a to **přímo úměrně**. Tato fyzikální veličina se nazývá **induktance** (též **indukční reaktance**) a její fyzikální jednotkou je ohm ( $\Omega$ ).

Ideální indukčnost se tedy v obvodu střídavého proudu chová jako odpor. Na rozdíl od „klasického“ odporu  $R$  však v ideální indukčnosti nedochází k „přeměně“ energie elektrického proudu v Joulovo teplo, ale pokles této energie v jedné čtvrtině periody je přesně roven nárůstu energie magnetického pole (např. magnetického pole cívky s indukčností  $L$ ), a ta se v následující čtvrtině periody zpětně beze ztrát „přemění“ v energii protékajícího střídavého elektrického proudu.

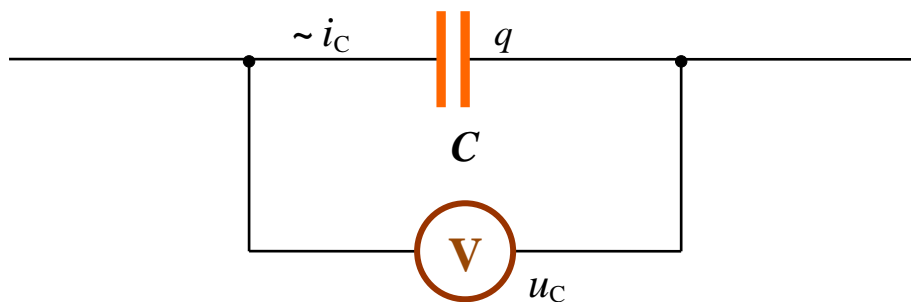
Na následujícím obr. 11.11 je pak znázorněn časový průběh harmonického střídavého proudu  $i_L$  (**červeně**) a příslušného svorkového napětí  $u_L$  (**modře**) v obvodu s ideální indukčností.



Obr. 11.11 – časová závislost harmonického střídavého proudu a napětí v obvodu s ideální indukčností

### 11.2.6 Jednoduchý obvod střídavého proudu s kapacitou

Na spodním obr. 11.12 je schéma tohoto střídavého obvodu, v němž je zapojena ideální kapacita  $C$  (např. kondenzátor s nekonečně velkým svodovým odporem a nulovou indukčností). Obvodem, i když je vlastně kapacitou přerušen, však střídavý proud  $i$  protékat bude. Kapacita se totiž tímto proudem postupně **periodicky nabíjí a vybíjí** a na jejích svorkách je příslušné svorkové napětí  $u_C$ .



Obr. 11.12 – jednoduchý obvod střídavého proudu s ideální kapacitou

Předpokládejme, že v obvodu s ideální kapacitou  $C$  je zapojen zdroj střídavého napětí harmonického průběhu  $u_C = U_{Cm} \sin \omega t$ . Toto napětí je ale současně i „nabíjecím“ napětím na svorkách naší ideální kapacity  $C$ .

Svoji nejvyšší hodnoty (amplitudy)  $I_{Cm}$  bude proud dosahovat právě v okamžiku, kdy je na svorkách kapacity nulové napětí a na jejích elektrodách není žádný náboj  $q$ . Jak se bude postupně svorkové napětí  $u_C$  zvyšovat (a jak tím pádem bude náboj  $q$  na kapacitě narůstat), bude „nabíjecí“ proud  $i_C$  v obvodu s kapacitou  $C$  naopak klesat.

V okamžiku, kdy napětí dosáhne své maximální hodnoty – amplitudy –  $U_{Cm}$ , bude proud  $i_C$  v obvodu právě nulový (další náboj už není třeba na desky kondenzátoru přivádět). Okamžitě po dosažení vrcholové hodnoty napětí se kapacita začne vybíjet, napětí  $u_C$  postupně klesá, ale proud už prochází obvodem opačným směrem a současně vzrůstá až do své dolní amplitudy.

Po úplném vybití kapacity se tento prvek začne znovu nabíjet, ale tentokrát s opačnou polaritou napětí, pak znovu vybíjet, a tak se celý děj bude stále periodicky opakovat. Z uvedeného je patrné, že se střídavý proud  $i_C$  v obvodu s kapacitou musí fázově předbíhat před svorkovým napětím  $u_C$ . Zbývá už jen dokázat o kolik.

Časový průběh harmonického střídavého proudu  $i_C$  získáme krátkým výpočtem pomocí dvou dobře známých vztahů – prvním je závislost mezi nábojem a napětím na kapacitě  $C$  a druhým základní definice elektrického proudu. Z dřívějšího výkladu v minulém semestru víme, že platí

$$q = C \cdot u_C \quad \& \quad i_C = \frac{dq}{dt} \quad ,$$

kde  $q$  je náboj na elektrodách kondenzátoru s kapacitou  $C$  v okamžiku, kdy napětí mezi elektrodami dosáhne hodnotu  $u_C$ , a  $i_C$  okamžitá hodnota střídavého proudu v obvodu. Tedy

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C \cdot u_C)}{dt} = \frac{C \cdot d(U_{Cm} \sin \omega t)}{dt} = C \cdot \omega \cdot U_{Cm} \cos \omega t \quad . \quad (11.48)$$

Výraz (11.48) lze dále snadno upravit na základě vztahů mezi goniometrickými funkcemi na konečný tvar

$$i_C = \omega C \cdot U_{Cm} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = I_{Cm} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad . \quad (11.49)$$

Z posledního vzorce je dobře patrné, že v jednoduchém obvodu střídavého proudu s ideální kapacitou  $C$  dochází mezi svorkovým napětím na kapacitě a proudem v obvodu **k fázovému posunu  $\pi/2$  ve prospěch proudu  $i_C$** . Tento fázový rozdíl  $\varphi = \pi/2$  odpovídá časovému posunu právě o jednu čtvrtinu periody, tedy o  $t = T/4$ .



Z výrazu (11.49) navíc vyplývá jednoduchý vztah (vlastně Ohmův zákon pro tento ideální obvod) mezi amplitudou  $U_{Cm}$  střídavého napětí na ideální kapacitě a amplitudou  $I_{Cm}$  střídavého proudu v tomto. Platí

$$U_{Cm} = \frac{1}{\omega C} \cdot I_{Cm} \quad . \quad (11.50)$$

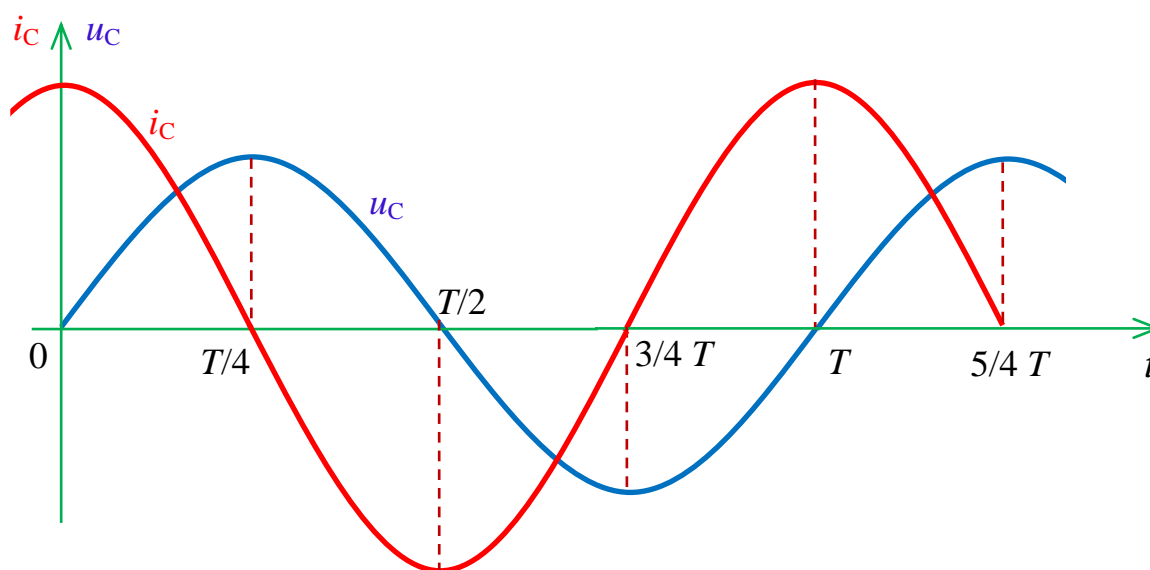
Veličina

$$X_C = \frac{U_{Cm}}{I_{Cm}} = \frac{1}{\omega C} \quad (11.51)$$

charakterizuje výšku „překážky“, jež stojí střídavému proudu při nabíjení a vybíjení kapacity  $C$  v tomto obvodu v cestě. Její číselná hodnota je – stejně jako v obvodu s ideální indukčností – **na frekvenci střídavého proudu závislá**, ale tentokrát **nepřímo úměrně**. Tato fyzikální veličina se nazývá **kapacitance** (používá se též termínu **kapacitní reaktance**) a její fyzikální jednotkou je pochopitelně opět ohm ( $\Omega$ ).

Ale ani v tomto případě se nejedná o „klasický“ odpor – na ideální kapacitě opět nedochází k přeměně elektrické energie v teplo. V jedné čtvrtině periody (při nabíjení kapacity) se totiž energie elektrického proudu v obvodu postupně „přeměňuje“ beze zbytku v energii elektrického pole (jež vzniká v prostoru mezi elektrodami nabíjeného kondenzátoru). Tato energie elektrického pole se pak v následující čtvrtině periody při vybíjení kondenzátoru zase zmenšuje a beze ztrát se „vrací zpět“ protékajícímu elektrickému proudu.

Na následujícím obr. 11.13 je pak znázorněn časový průběh harmonického střídavého proudu  $i_C$  (**červená** závislost) a příslušného svorkového napětí  $u_C$  (**modrá** závislost) v obvodu s ideální kapacitou.



Obr. 11.13 – časová závislost harmonického střídavého proudu a napětí v obvodu s ideální kapacitou

### 11.2.7 Vektorová symbolika při popisu skalárních veličin střídavého proudu

Jak je patrné z předcházejícího výkladu, bude řešení obvodů střídavého proudu mnohem složitější než řešení obvodů ustálených stejnosměrných proudů. Nejen, že se proud a napětí neustále periodicky mění, ale dochází mezi nimi k různým fázovým posuvům podle toho, jaké prvky jsou ve střídavém obvodu zapojeny.



Proto je dobré mít k dispozici poměrně jednoduchý matematický model, v němž by bylo možno výstižně a jednoznačně jak stránku „velikostní“, tak i „fázovou“ spojit v jednom jediném vyjádření příslušné střídavé veličiny. To lze v zásadě provést několika různými způsoby. Jednou z možností – domnívám se, že i poměrně názornou – je použití tzv. **geometrických fázorů**.

Geometrický fázor je vlastně orientovaná úsečka (čili „klasický“ geometrický vektor). Jeho velikost (délka) představuje velikost příslušné fyzikální veličiny s danou jednotkou, argument  $\varphi$  pak charakterizuje fázový posun vůči veličinám jiným.

V takto zavedené symbolice se pak k vyjádření vzájemných vztahů mezi jednotlivými geometrickými fázory používá tzv. **fázorových diagramů**. V těchto diagramech jsou jednotlivé geometrické fázory představující příslušná elektrická napětí či proudy v obvodech vynášeny jako dvourozměrné vektory v rovině  $\mathbf{R}^2$ . Příklady fázorových diagramů jednoduchých obvodů střídavého proudu jsou uvedeny v následující tabulce 11.1.

Tabulka 11.1 – fázorové diagramy jednoduchých obvodů střídavého proudu

Typ obvodu	Fázorový diagram
$R$	
$L$	
$C$	

### 11.2.8 Složené obvody střídavého proudu

Složené obvody vznikají spojením několika prvků s odlišnými parametry (odporů  $R$ , indukčností  $L$ , kapacit  $C$ ) do různých kombinací. Řešení těchto obvodů nejčastěji spočívá v určení efektivních hodnot proudů protékajících jednotlivými větvemi daného zapojení, případně celkového proudu tekoucího od zdroje ke kombinaci a rovněž se snažíme určit výsledný fázový posun  $\varphi$  mezi napětím a proudem.

Základní úlohou je přitom obvykle výpočet celkové **impedance obvodu** (tj. celkové překážky, kterou daný obvod střídavému proudu „staví do cesty“). Tato fyzikální veličina, označovaná písmenem  $Z$  je přitom rovna podílu efektivních hodnot napětí připojeného k obvodu (případně k jeho části) a proudu do obvodu (resp. do příslušné části obvodu) tekoucího.

Platí

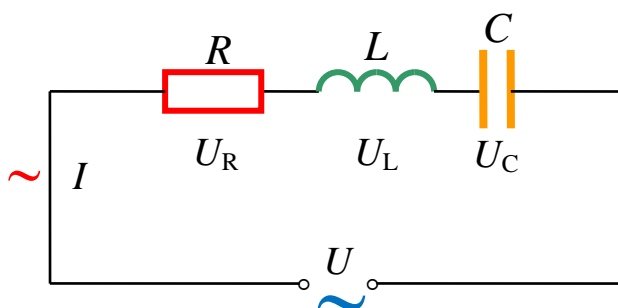
$$\boxed{Z = \frac{U}{I}} \quad (11.52)$$

Její fyzikální jednotkou namůže být nic jiného než jeden **ohm** ( $\Omega$ ).

Při výpočtu impedance části nebo celého obvodu lze výhodně využít právě matematického modelu zmíněného v předcházejícím článku. Ukažme si nyní jeho aplikaci na dvou základních (a navíc i nejjednodušších) případech složených obvodů střídavého proudu.

### A) Sériové zapojení $RLC$

Schéma tohoto obvodu je na vedlejším obrázku 11.14. Jelikož jsou všechny tři prvky zapojeny za sebou v jedné větvi, protéká všemi v daném čase  $t$  stejný okamžitý proud  $i$ , a stejná bude též velikost efektivního proudu  $I$  v celém obvodu. Různé však budou efektivní hodnoty svorkových napětí  $U_R$ ,  $U_L$  a  $U_C$  na těchto třech prvcích a různá budou i jejich fázová posunutí vůči proudu  $I$ .

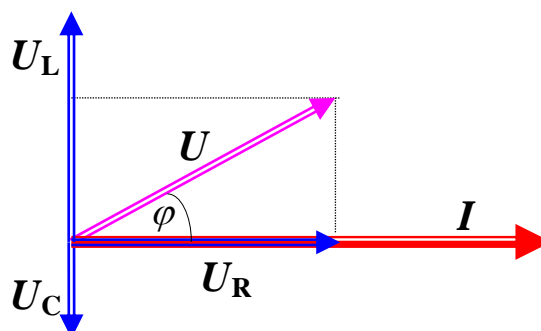


Obr. 11.14 – sériový  $RLC$  obvod střídavého proudu

Sériová kombinace představuje vždy **napět'ový dělič**, ale pro celkové napětí  $U$  na kombinaci nebude v tomto případě platit prostý součet tak, jak tomu bylo například v obvodech ustáleného proudu stejnosměrného, kde byly zapojeny jen různě velké odpory. Ve střídavých obvodech jsou u různých prvků různé fázové posuny, a proto se dělení napětí řídí jinou metrikou než prostým součtem.



Sestrojme si tedy fázorový diagram efektivních hodnot napětí a proudu tohoto typu zapojení střídavého obvodu. Je uveden na následujícím obr. 11.15. Za základ bereme efektivní proud  $I$  a vzhledem k němu pak vynášíme jednotlivé fázory napětí s ohledem na známá fázová posunutí těchto veličin právě vůči proudu.



Obr. 11.15 – fázorový diagram sériového  $RLC$  obvodu střídavého proudu

Efektivní hodnotu proudu klademe na  $x$ -ovou osu a vzhledem k této veličině pak vynášíme jednotlivá svorková napětí s příslušnými fázovými posuny ( $U_R$  opět na  $x$ -ovou osu,  $U_L$  a  $U_C$  pak na osu  $y$ -ovou).

Složením jednotlivých svorkových napětí pak získáme napětí výsledné a následujícím postupem i celkovou impedanci  $Z$  tohoto zapojení a výsledný fázový posun  $\varphi$  napětí vůči proudu. Vzhledem k zavedené symbolice uplatníme pravidlo o sčítání (neboli skládání) vektorů pomocí vektorového rovnoběžníka – v našem případě se jedná dokonce o vektorový obdélník.

$$U = U_R + U_L + U_C \quad .$$

Pro velikosti pak platí

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} \quad / : I$$

Po krátké početní úpravě dostaneme, že výsledná impedance  $Z$  sériového zapojení  $RLC$  je dána výrazem

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad . \quad (11.53)$$

Podmínkou pro fázové posunutí napětí vůči proudu v obvodu jsou pak ekvivalentní vztahy

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad , \text{ resp. } \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z} \quad . \quad (11.54)$$

Vidíme, že fázové posunutí napětí vůči proudu závisí na indukčnosti a kapacitanci obvodu. Podle toho, která z obou hodnot je větší, se celkové napětí  $U$  buď předchází ( $X_L > X_C$ ), nebo zpožďuje ( $X_L < X_C$ ) za proudem  $I$ .

Při jistých hodnotách  $L$ ,  $C$  a  $\omega$  může dojít v obvodu k situaci, kdy se indukčnost rovná kapacitanci ( $X_L = X_C$ ). Tato situace se nazývá **rezonance** (v případě sériového obvodu též **rezonance napěťová**). Pasívní část obvodu se chová jako samotný rezistor, celkové napětí je ve fázi s proudem a zdroj – jak si ukážeme v závěrečném článku – dodává do obvodu jen činný výkon. Svorková napětí  $u_L$  na indukčnosti a  $u_C$  na kapacitě jsou v každém časovém okamžiku  $t$  stejně velká, ale mají vždy opačnou polaritu, stejně velké jsou i jejich efektivní hodnoty

$$U_L = U_C \quad .$$

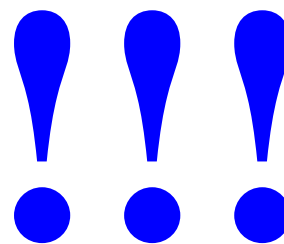
Z rovnosti  $X_L = X_C$  pak dostáváme podmínku pro rezonanční úhlovou frekvenci střídavého proudu

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11.55)$$

a dále příslušný vztah (nazývaný též vztah **Thomsonův**) pro periodu střídavého proudu

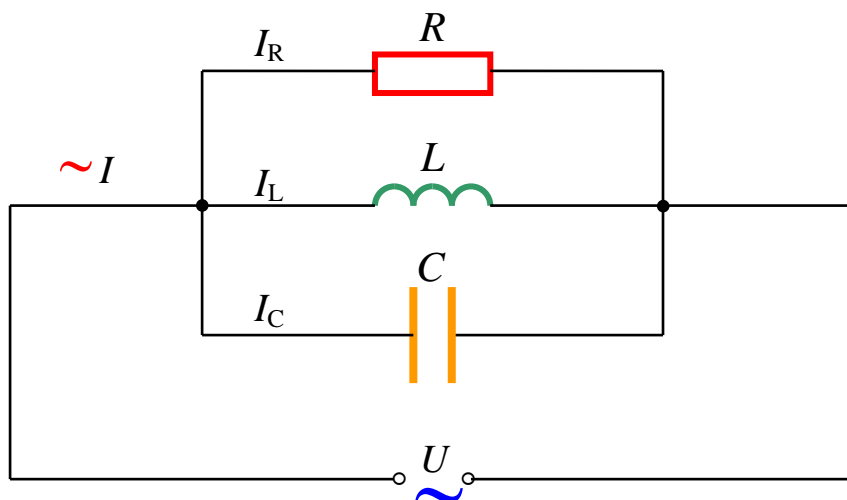
$$T = 2\pi \sqrt{LC} \quad . \quad (11.56)$$

Z faktu, že při rezonanci je celková impedance  $Z$  minimální (a rovna pouze odporu obvodu  $R$ ), rovněž vyplývá, že při rezonanci protéká sériovým obvodem  $RLC$  **největší proud**. To ovšem může znamenat (při dostatečně malých hodnotách odporu  $R$  a relativně velkých hodnotách indukčnosti  $X_L$  a kapacity  $X_C$ ), že napětí na indukčnosti a kapacitě dosáhne velkých hodnot, jež mohou dosáhnout i mnohonásobek napětí zdroje.



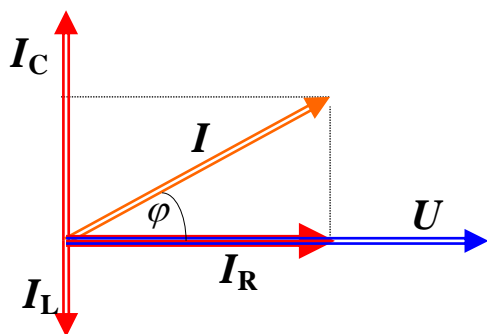
## B) Paralelní zapojení $RLC$

Schéma paralelního  $RLC$  obvodu střídavého proudu je na obr. 11.16. Od zdroje teče efektivní proud hodnoty  $I$ , jenž se poté v uzlu dělí na proudy  $I_R$ ,  $I_L$  a  $I_C$  protékající jednotlivými větvemi paralelního zapojení. V tomto případě bude na všech třech prvcích v každém čase  $t$  stejné okamžité napětí  $u$ , a stejná bude i jeho efektivní hodnota  $U$ . Rozdílné však budou efektivní hodnoty proudů  $I_R$ ,  $I_L$  a  $I_C$  v jednotlivých větvích a navíc každý bude jinak fázově posunut vůči napětí  $U$ .



Obr. 11.16 – paralelní  $RLC$  obvod střídavého proudu

Na obr. 11.17 je pak znázorněn fázorový diagram efektivních hodnot proudů a napětí paralelního  $RLC$  obvodu střídavého proudu. Na  $x$ -ovou osu tentokrát klademe efektivní hodnotu napětí na paralelní kombinaci (je na všech větvích stejné !!!) a vzhledem k této veličině pak vynášíme do diagramů proudy v jednotlivých větvích s ohledem na příslušná fázová posunutí (proud odporem  $I_R$  umístíme na  $x$ -ovou osu, proudy  $I_L$  a  $I_C$  pak na osu  $y$ -ovou).



**Pozor !!!** Fázová posunutí v tomto případě vždy znamenají posunutí **proudu vůči napětí !!!**

Obr. 11.17 – fázorový diagram paralelního  $RLC$  obvodu střídavého proudu

Pro proudy v jednotlivých větvích obvodu musí vlastně platit I. Kirchhoffův zákon pro uzly, což s ohledem na fázová posunutí jednotlivých proudů vůči napětí  $U$  lze vyjádřit vztahem

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_C \quad ,$$

jenž vychází ze zavedené symboliky geometrických fázorů (vektorů). Pro velikosti proudů pak platí

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} \quad / : U \quad .$$

Následnou velmi jednoduchou úpravou pak dostáváme, že pro celkovou impedanci  $Z$  paralelního zapojení  $RLC$  obvodu střídavého proudu platí

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \quad . \quad (11.57)$$

Pro fázové posunutí  $\varphi$  **proudu vůči napětí** pak dostáváme následující ekvivalentní podmínky

$$\operatorname{tg} \varphi = R \cdot \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad , \text{ resp. } \cos \varphi = \frac{Z}{R} \quad . \quad (11.58)$$

Rovněž v paralelním  $RLC$  obvodu střídavého proudu závisí výsledné fázové posunutí proudu vůči napětí na vzájemném vztahu mezi induktancí a kapacitancí obvodu. Je-li  $X_L > X_C$ , bude proud  $I_L < I_C$  a celkový proud  $I$  se bude předbíhat **před** napětím  $U$ . Nastane-li naopak případ, že  $X_L < X_C$ , bude indukčností protékat větší proud než kapacitou ( $I_L > I_C$ ) a celkový proud bude fázově opožděn **za** napětím.

I v paralelním obvodu tak může za určitých podmínek dojít k **rezonanci** (v případě paralelního obvodu hovoříme o **rezonanci proudové**). Opět nastává v situaci, kdy se induktance obvodu rovná kapacitanci ( $X_L = X_C$ ). V tomto případě se pasivní část obvodu znovu chová jen jako rezistor, proud je ve fázi s napětím a zdroj dodává do obvodu pouze činný výkon. Proud  $I_L$  ve větvi s indukčností a proud  $I_C$  ve větvi s kapacitou jsou v každém časovém okamžiku  $t$  stejně velké, ale mají vždy opačný směr; stejně velké jsou též efektivní hodnoty obou proudů

$$I_L = I_C \quad .$$

Podmínka pro rezonanční úhlovou frekvenci střídavého proudu v paralelním  $RLC$  obvodu je naprosto stejná jako v obvodu sériovém. Platí

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad . \quad (11.59)$$

Na rozdíl od sériového  $RLC$  obvodu střídavého proudu je však při paralelní rezonanci celková impedance obvodu  $Z$  maximální a od zdroje ke kombinaci protéká **nejmenší proud**.

**Pozn.:** Postup, jenž jsme prováděli při řešení  $RLC$  obvodů střídavého proudu, lze zopakovat i při zapojení obvodů jednodušších (kombinace  $RL$ ,  $RC$  nebo  $LC$ ). Vztahy, jež platí pro taková zapojení, však snadno dostaneme i pouhým vynecháním symbolu „nepřítomné“ veličiny v příslušném vzorci.



## 11.2.9 Výkon střídavého proudu

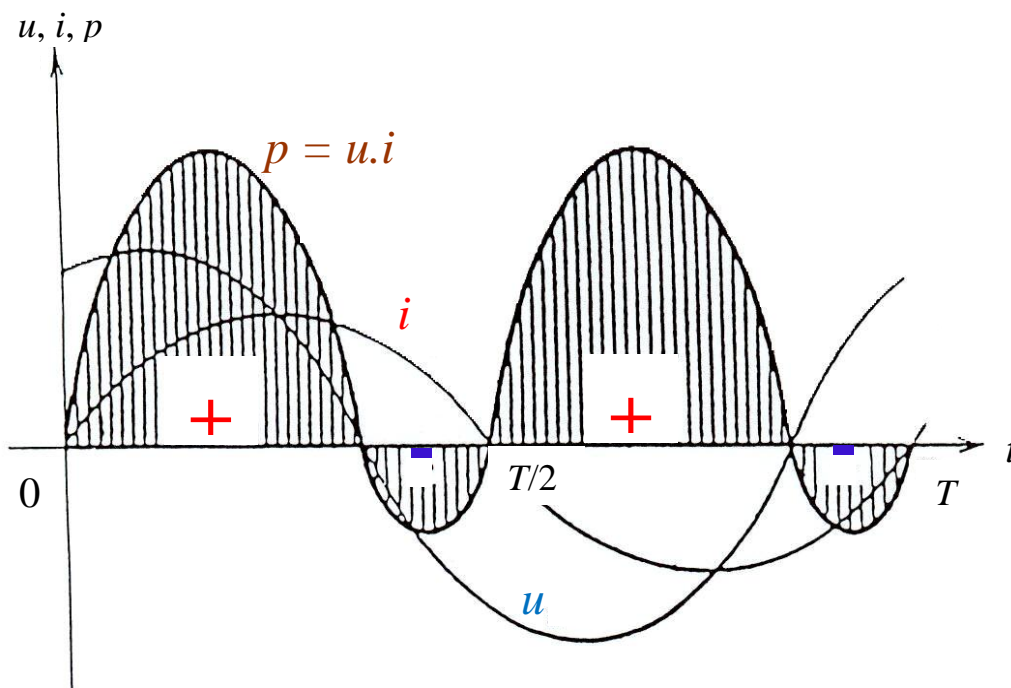
Jestliže v daném čase  $t$  dodává zdroj o okamžitém napětí  $u(t)$  do obvodu proud okamžité hodnoty  $i(t)$ , koná práci, jíž odpovídá **okamžitý výkon**

$$p = u \cdot i \quad . \quad (11.60)$$

U střídavého proudu je tato veličina periodickou funkcí času, jejíž průběh závisí nejen na amplitudách proudu  $I_m$  a napětí  $U_m$ , ale i na fázovém posunu  $\varphi$  mezi napětím a proudem. Dosadíme-li v případě harmonického střídavého napětí a proudu ze vztahů (11.37) a (11.32), dostáváme pro okamžitý výkon výraz

$$p = U_m \cdot I_m \cdot \sin \omega t \cdot \sin (\omega t + \varphi) \quad . \quad (11.61)$$

Graficky je pak tato závislost znázorněna na následujícím obrázku 11.18. Jak je z něj dobře patrné, v některých částech periody má okamžitý výkon kladnou hodnotu, v některých pak hodnotu zápornou. To souvisí právě s přítomností prvků majících určitou kapacitu  $C$  resp. indukčnost  $L$ .



Obr. 11.18 – závislost okamžitého výkonu harmonického střídavého proudu během jedné periody

„Záporný“ výkon totiž odpovídá právě těm situacím, kdy dochází ke zpětné „přeměně“ energie elektrického pole (např. mezi deskami kondenzátoru s kapacitou  $C$ ) resp. energie magnetického pole (např. v dutině cívky s indukčností  $L$ ) v energii střídavého elektrického proudu v obvodu (viz jednoduché obvody střídavého proudu s kapacitou resp. indukčností).

Vztah (11.61) pro okamžitý výkon  $p$  harmonického střídavého proudu lze ale dále upravit. Na součin dvou goniometrických funkcí  $\sin \omega t \cdot \sin (\omega t + \varphi)$  budeme aplikovat známý součtový vzorec

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)] ,$$

v němž dosadíme za argument  $\alpha = \omega t$  a argument  $\beta = \omega t + \varphi$ . Po této úpravě přejde rovnice (11.61) do tvaru

$$p = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot [\cos \varphi - \cos (2\omega t + \varphi)] .$$

Nahradíme-li ještě amplitudy napětí a proudu efektivními hodnotami  $U$  a  $I$  těchto veličin, dostaneme pro okamžitý výkon vztah

$$p = U \cdot I \cdot \cos \varphi - U \cdot I \cdot \cos (2\omega t + \varphi) . \quad (11.62)$$

Pro praxi je důležité, jaká je hodnota průměrného (středního) výkonu, jenž zdroj do obvodu dodává. Za dobu průměrování volíme jednu periodu, neboť právě v této době proběhne okamžitě napětí a okamžitý proud všemi možnými hodnotami. Tato průměrná hodnota se nazývá **činný výkon**, označuje se symbolem  $P$  a lze ji vypočítat ze známého vztahu pro střední hodnotu

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t) dt . \quad (11.63)$$

Pro harmonický střídavý proud a harmonické střídavé napětí určíme činný výkon po dosazení výrazu (11.62) do integrálu (11.63). Platí

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T (U \cdot I \cdot \cos \varphi - U \cdot I \cdot \cos (2\omega t + \varphi)) dt = \frac{U \cdot I \cdot \cos \varphi}{T} \cdot \int_0^T dt + \frac{U \cdot I}{T} \cdot \int_0^T \cos (2\omega t + \varphi) dt .$$

Vzhledem k tomu, že funkce  $\cos (2\omega t + \varphi)$  je periodická s periodou  $T/2$ , bude její integrál v mezích od nuly do  $T$  roven pochopitelně nule. Po krátkém výpočtu prvního integrálu a následné jednoduché úpravě dostáváme, že činný výkon harmonického střídavého proudu

$$\boxed{P = U \cdot I \cdot \cos \varphi} . \quad (11.64)$$

Činný výkon střídavého proudu je mírou elektromagnetické energie, která se v pasívním prvku (nějakém spotřebiči) **nevratně** „mění“ na jiné druhy energie (např. na energii mechanickou nebo tepelnou).

Součin efektivních hodnot proudu a napětí je označován jako tzv. **zdánlivý výkon**

$$P_s = U \cdot I . \quad (11.65)$$

Poměr činného a zdánlivého výkonu -  $\cos \varphi$  - se nazývá **účinník**. Platí

$$\cos \varphi = \frac{P}{P_s} = \frac{P}{U \cdot I} \quad . \quad (11.66)$$

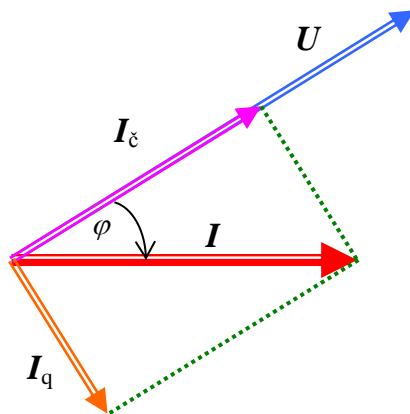
Kromě výkonu činného je též definována veličina **jalový výkon**. Označuje se symbolem  $P_q$ , a je naopak mírou té elektromagnetické energie, jež se „vyměňuje“ **vratně** mezi pasivním prvkem (indukčností nebo kapacitou) a elektrickým zdrojem v obvodu. Pro harmonický střídavý proud platí pro jalový výkon

$$P_q = U \cdot I \cdot \sin \varphi \quad . \quad (11.67)$$

Z uvedených vztahů je patrné, že v obvodech **čistě rezistančních** (tj. v obvodech, jejichž impedance  $Z$  je rovna pouze odporu  $R$  a jejichž reaktance  $X = \omega L - 1/\omega C = 0 \Omega$ ), je účinník  $\cos \varphi = 1$ . Potom veškerá elektrická energie dodávaná ze zdroje do obvodu se „přeměňuje“ nevratně na jiné druhy energie a výraz pro střední výkon je formálně stejný jako vztah pro výkon ustáleného stejnosměrného proudu.

Naopak v obvodech **čistě reaktančních** (jejichž odpor  $R = 0 \Omega$ ), je účinník  $\cos \varphi = 0$ . Potom zdroj **v průměru** žádný výkon do obvodu nedodává. V takovém případě se veškerá elektrická energie dodávaná ze zdroje do obvodu v jedné čtvrtině periody „přemění“ buď na elektrickou energii nabitého kondenzátoru, nebo na magnetickou energii cívky, a v další čtvrtperiodě se tyto formy energie vratně „přemění“ na energii protékajícího proudu  $\rightarrow$  energie se tak „vrací“ z obvodu do zdroje.

Na základě uvedených skutečností a v souladu se vztahy (11.64) a (11.67) pro činný a jalový výkon je možné rozložit efektivní hodnotu proudu v obvodu na dvě složky:



$$\begin{aligned} \rightarrow \text{činnou} & \quad I_c = I \cdot \cos \varphi \quad \text{a} \\ \rightarrow \text{jalovou} & \quad I_q = I \cdot \sin \varphi \quad . \end{aligned}$$

Na vedlejším obr. 11.19 je pak znázorněn příslušný fázorový diagram. Je z něj snad dobře patrné, že při větším fázovém posunu  $\varphi$  mezi napětím  $U$  a proudem  $I$  se daný činný výkon musí přenést větším proudem (neboť se využívá jen činné složky  $I_c$ ). Zdroj i vedení elektrického proudu však musí být dimenzovány na zdánlivý výkon

$$P_s = U \cdot I \quad ,$$

neboť obvodem vždy při určitém napětí  $U$  prochází „celý“ proud  $I$ .

Obr. 11.19 – k výkonu střídavého proudu



# 12. ZÁKLADY TERMODYNAMIKY

## 12.1 TERMIKA

Termika – dříve byla tato disciplína označována jako „*Nauka o teple*“ – je tou oblastí fyziky, jež se zabývá studiem nejrůznějších dějů v látkách, jež nějakým způsobem souvisejí s teplem, teplotou a jejími změnami. Zabývá se rovněž měřením teploty, šířením tepla a také jeho „přeměňováním“ v jiné formy energie. Jejimi teoretickými základy jsou **termodynamika** a **statistická fyzika**.

### 12.1.1 Teplota, teplotní roztažnost látek

**Teplota** je typická skalární fyzikální veličina určitým způsobem přiřazená rovnovážnému stavu daného tělesa. Na teplotě tělesa závisí, zda bude při tepelné výměně mezi dvěma tělesy jedno těleso druhému teplo odevzdávat (to bude v případě, když bude mít teplotu vyšší), či naopak od druhého tělesa teplo přijímat (v případě, že bude chladnější – když bude mít teplotu nižší). Nedochozí-li při dotyku obou těles k tepelné výměně, musí mít obě tělesa teplotu naprosto stejnou.

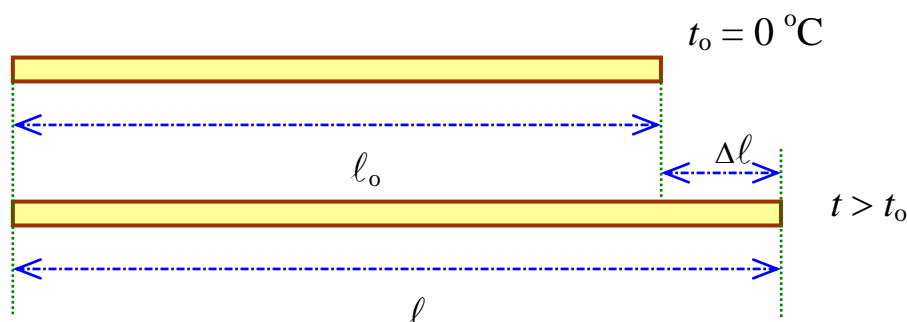
Přiřazováním různých číselných hodnot rozdílným teplotám pak vytváříme určitou **teplotní stupnici**. Ta má jistým způsobem definované pevné základní body (např. teplota tání ledu, teplota varu vody při určitém tlaku, apod.) a dále musí mít zvolenou fyzikální jednotku teploty – tou je **teplotní stupeň**.

Teploměry, jež slouží k měření teploty, pak využívají změn fyzikálních vlastností určitého tělesa právě s měnicí se teplotou (např. změny délky, změny objemu, změny elektrického odporu, a řady dalších). Podívejme se nyní trochu podrobněji právě na teplotní roztažnost

### Teplotní roztažnost látek

Tento fyzikální jev spočívá ve změně rozměrů tělesa při změnách jeho teploty. S měnicí se teplotou totiž tělesa mění svůj objem, u pevných látek s jedním převažujícím rozměrem jako jsou například tyče, dráty, elektrická vedení, trubky, kolejnice, apod., nás pak zajímá především **délková teplotní roztažnost**.

## A) Délková roztažnost látek pevných



Obr. 12.1 – délková teplotní roztažnost pevných látek

Je-li  $l_0$  délka předmětu z určitého materiálu při teplotě  $t_0 = 0 \text{ °C}$  (viz obr. 12.1), pak se při vyšší teplotě  $t$  předmět prodlouží o délku  $\Delta l = l_0 \alpha t$ , a jeho celková délka  $l$  pak bude vyjádřena lineární funkcí

$$\boxed{l = l_0(1 + \alpha \cdot t)} \quad , \quad (12.1)$$

kde veličina  $\alpha$  je tzv. **teplotní součinitel** (teplotní koeficient) **délkové roztažnosti** daného materiálu. Hodnota této fyzikální veličiny je pro každou látku charakteristickým parametrem; teplotní součinitele délkové roztažnosti různých materiálů najdeme ve fyzikálních tabulkách. Fyzikální jednotkou teplotního součinitele délkové roztažnosti je jeden  $\text{K}^{-1}$ . U kovů se hodnota teplotního součinitele délkové roztažnosti pohybuje v řádu  $10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , ale např. u křemene je o celé dva řády nižší.

**Pozn.:** Při větším rozsahu teplot je třeba nahradit lineární závislost (12.1) přesnější závislostí kvadratickou

$$\boxed{l = l_0(1 + \alpha_1 \cdot t + \alpha_2 \cdot t^2)} \quad . \quad (12.2)$$

Kvadratický koeficient  $\alpha_2$  přitom bývá zhruba o tři řády menší než koeficient lineární.

### Příklad:

Měděný drát délky 100 m se prodlouží při zahřátí z  $0 \text{ °C}$  na  $100 \text{ °C}$  o 17 cm. Určete hodnotu teplotního součinitele délkové roztažnosti mědi.

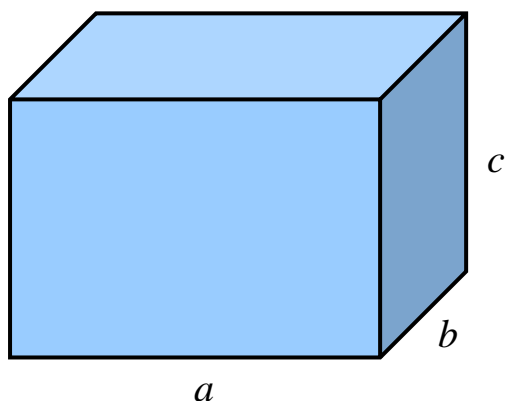
Známe původní délku drátu  $l_0 = 100 \text{ m}$  při teplotě  $t_0 = 0 \text{ °C}$  a rovněž přírůstek délky  $\Delta l = 0,17 \text{ m}$ , jež odpovídá zahřátí materiálu na teplotu  $t = 100 \text{ °C}$ . Součinitel délkové roztažnosti mědi vyjádříme ze vztahu popisujícího nárůst délky drátu s rostoucí teplotou

$$\Delta l = l_0 \alpha_{\text{Cu}} t \Rightarrow \alpha_{\text{Cu}} = \frac{1}{t} \cdot \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{100} \cdot \frac{0,17}{100} \text{ K}^{-1} = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

Teplotní součinitel délkové roztažnosti mědi má tedy hodnotu  $1,7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ .

## B) Objemová roztažnost látek pevných

U **láték izotropních** dochází ke stejné změně rozměrů ve všech směrech (tuto „vlastnost“ ale nemají zdaleka všechny materiály – anizotropii vykazuje třeba dřevo a jiné látky). Vezměme si kvádr z izotropního materiálu (viz obr. 12.2.) o rozměrech  $a$  (délka),  $b$  (šířka),  $c$  (výška).



Obr. 12.2 – objemová teplotní roztažnost pevných látek

Jsou-li rozměry kvádrů při teplotě  $t_0 = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$   $a_0, b_0, c_0$ , pak pro rozměry  $a, b, c$  při vyšší teplotě  $t$  musí platit:

$$\begin{aligned} a &= a_0(1 + \alpha \cdot t) & , \\ b &= b_0(1 + \alpha \cdot t) & , \\ c &= c_0(1 + \alpha \cdot t) & . \end{aligned}$$

Objem  $V$  kvádrů při teplotě  $t$  tak bude

$$V = abc = a_0 b_0 c_0 (1 + \alpha \cdot t)^3 = V_0(1 + 3\alpha \cdot t + 3\alpha^2 \cdot t^2 + \alpha^3 \cdot t^3) \quad .$$

Poslední dva členy v závorce lze zanedbat (jsou prakticky nulové), a tak dostáváme pro objemovou roztažnost izotropních pevných látek výraz

$$\boxed{V = V_0(1 + 3\alpha \cdot t)} \quad , \quad (12.3)$$

v němž obvykle trojnásobek koeficientu délkové roztažnosti nahrazujeme teplotním **koeficientem objemové roztažnosti**  $\beta$  ( $\beta = 3\alpha$ ). Z toho také vyplývá závěr, že změna (nárůst) objemu s rostoucí teplotou je u izotropních materiálů třikrát výraznější než změna (nárůst) každého z jeho jednotlivých rozměrů. A podobně jako u délkové roztažnosti je i u objemové při větším rozsahu teplotních změn třeba lineární závislost (12.3) nahradit závislostí kvadratickou.

Se změnou objemu pak souvisí i změna hustoty materiálu. Je-li  $V$  objem kvádrů při teplotě  $t$ , pak příslušná hustota při této teplotě bude dána

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0(1 + \beta t)} \doteq \frac{m}{V_0} (1 - \beta \cdot t) \quad ,$$

tedy

$$\boxed{\rho = \rho_0(1 - \beta \cdot t)} \quad , \quad (12.4)$$

přičemž  $\rho_0$  je hustota materiálu při teplotě  $t_0 = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

## C) Objemová roztažnost látek kapalných

U kapalin se uplatňuje prakticky jen objemová roztažnost. Pro změnu objemu kapalin tak platí naprosto stejný vztah jako pro objemovou roztažnost látek pevných

$$V = V_0(1 + \beta \cdot t) \quad , \quad (12.3)$$

ale  :

- objemová roztažnost kapalin je mnohem výraznější než u látek pevných – zhruba o dva řády je vyšší i koeficient objemové roztažnosti kapalin ( $\beta_{\text{kap}} \approx 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ );
- koeficient objemové roztažnosti kapalin závisí podstatně více než u látek pevných na teplotě, proto lineární závislost (12.3) platí s daleko menší přesností než u látek pevných. K vyjádření závislosti objemu nebo hustoty určité kapaliny na teplotě pak často nestačí ani kvadratická funkce – v takovém případě je nutné vztahy (12.3) a (12.4) nahradit mocninnou funkcí vyšších stupňů. Klasickým příkladem je třeba destilovaná voda  $\text{H}_2\text{O}$ , u níž hustotu v intervalu od  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  do  $100 \text{ }^\circ\text{C}$  vyjadřuje dokonce polynom pátého stupně.

## D) Teplotní rozpínavost plynů

Zatímco u kapalin a pevných látek je vliv okolního tlaku na námi právě studovaný jev velmi malý (dá se říci, že téměř zanedbatelný), pak u látek v plynném skupenství je naopak výrazný a nepominutelný. Se změnou teploty dochází jak ke změně objemu, tak i tlaku plynu.

Budeme-li zachovávat stále stejný tlak plynu (půjde tak vlastně o **ideální izobarický děj**), bude se současně zvětšovat i jeho objem podobně jako u pevných látek a kapalin a tuto závislost opět charakterizuje lineární funkce

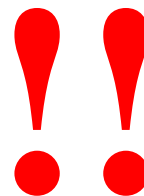
$$V = V_0(1 + \chi \cdot t) \quad . \quad (12.5)$$

Jsou zde však dva zásadní rozdíly:

→ první **kvantitativní** ..... objemová roztažnost plynů je totiž ještě výraznější než u kapalin,

→ druhý pak **kvalitativní** ..... všechny plyny bez rozdílu se rozpínají (zvětšují svůj objem) **absolutně stejně**, což potvrzuje i stejná hodnota koeficientu objemové roztažnosti plynů, jejíž hodnota je pro všechny plyny

$$\chi = \frac{1}{273,15} \text{ K}^{-1} \quad . \quad (12.6)$$

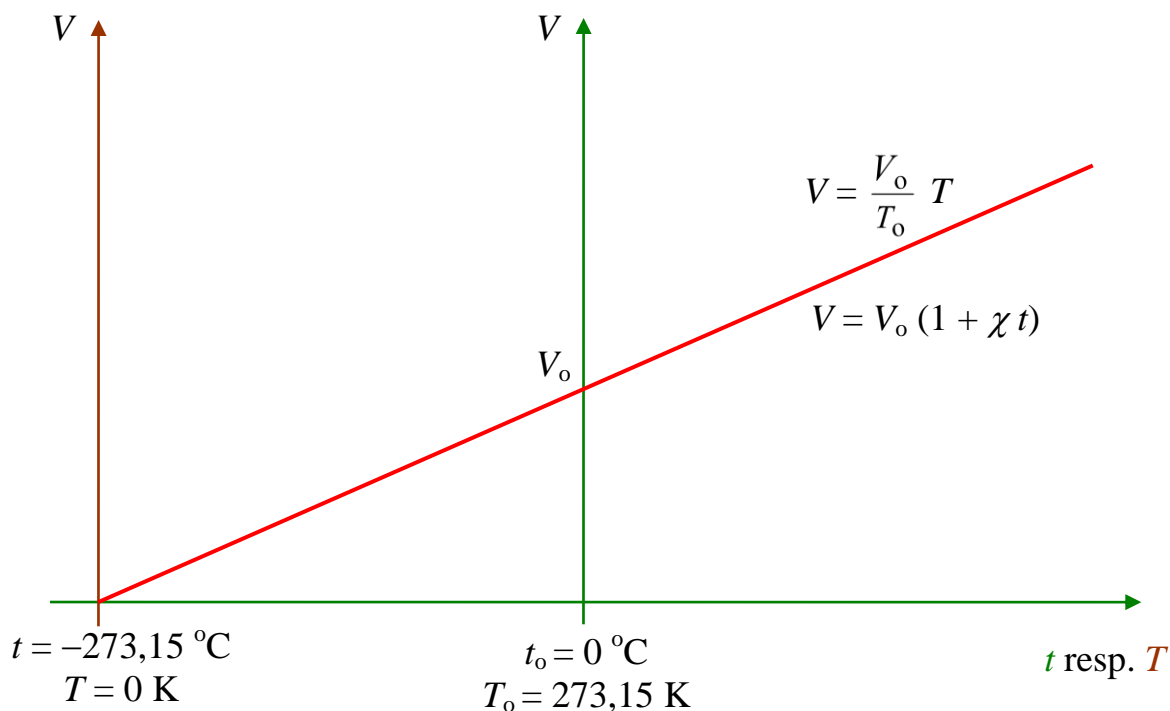


Tuto skutečnost lze pak využít ke konstrukci tzv. **absolutní teplotní stupnice**. Lineární závislost (12.5) nárůstu objemu plynu lze totiž jednoduše převést na přímou úměrnost určením teploty  $t$ , při níž by měl ideální plyn **teoreticky nulový objem**  $V$ .

Z uvedeného vztahu (12.5) okamžitě vyplývá, že to nastává při teplotě

$$t = -\frac{1}{\chi} = -\frac{1}{\frac{1}{273,15}} \text{ } ^\circ\text{C} = -273,15 \text{ } ^\circ\text{C} .$$

A právě při této teplotě ( $t = -273,15 \text{ } ^\circ\text{C}$ ) nazývané též **absolutní nula** by byl objem ideálního plynu nulový (viz následující obr. 12.3).



Obr. 12.3 – k objemové roztažnosti ideálního plynu

Nyní už jen stačí provést transformaci teploty a namísto teplotní stupnice Celsiovy zavést teplotní stupnici novou „posunutou o 273,15 stupně doleva“ – **absolutní teplotní stupnici**. Pro teplotu  $T$  vyjádřenou v této teplotní stupnici musí vzhledem k teplotě  $t$  v Celsiově stupnici platit číselný vztah

$$\{T\} = \{t\} + 273,15 . \quad (12.7)$$

Lineární závislost (12.5) pak snadno převedeme – jak ostatně potvrzuje i obr. 12.3 – na přímou úměrnost mezi objemem  $V$  plynu a jeho absolutní teplotou  $T$

$$\boxed{V = \frac{V_0}{T_0} T} , \quad (12.8)$$

přičemž teplota

$$T_0 = \frac{1}{\chi} = \frac{1}{\frac{1}{273,15}} \text{ K} = 273,15 \text{ K} . \quad (12.9)$$

## 12.1.2 Tepelné děje v ideálním plynu

### a) Izobarický děj

Výše odvozený vztah (12.8) je vlastně základní rovnicí popisující děj probíhající v ideálním plynu stálého množství (stálé hmotnosti) při konstantním tlaku. Podle svého objevitele se nazývá **zákon Gay-Lussacův** (první polovina 18. stol.).

Izobarický děj je tedy dějem, při němž je tlak plynu stálý a mění se pouze jeho absolutní teplota  $T$  a objem  $V$ . Z rovnice (12.8) rovněž plyne, že má-li plyn původní objem  $V_1$  a teplotu  $T_1$  a dojde-li při izobarickém ději k jejich změně na hodnoty  $V_2$  a  $T_2$ , musí platit

$$\boxed{\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad , \quad \text{resp.} \quad \frac{V}{T} = \text{konst.}} \quad . \quad (12.10)$$

#### Příklad:

Ideální plyn má při teplotě  $20^\circ\text{C}$  objem  $V$ . Určete, při jaké teplotě bude jeho objem o 40 % menší, za předpokladu, že zachováme stále stejný tlak plynu.

---

Původní teplota plynu před izobarickým stlačením byla  $T_1 = (20 + 273,15) \text{ K} = 293,15 \text{ K}$ .

Původní objem  $V_1 = V$  se kompresí snížil na hodnotu  $V_2 = V - 0,4 V = 0,6 V$ .

Pro výslednou teplotu plynu po izobarické změně platí podle Gay-Lussacova zákona

$$T_2 = \frac{V_2}{V_1} \cdot T_1 = \frac{0,6 V}{V} \cdot 293,15 \text{ K} = 0,6 \cdot 293,15 \text{ K} = 175,9 \text{ K} .$$

Objem plynu bude o 40% menší při absolutní teplotě přibližně 176 K, což v Celsiově teplotní stupnici odpovídá přibližně hodnotě  $-97^\circ\text{C}$ .

### b) Izochorický děj

Je takovým dějem, při němž je objem plynu stálý a mění se pouze jeho teplota a tlak. Přitom závislost tlaku  $p$  na teplotě  $t$  je z matematického hlediska naprosto stejná jako závislost (12.5) popisující změny objemu plynu s měnící se teplotou při konstantním tlaku. Platí

$$\boxed{p = p_0(1 + \chi \cdot t)} \quad , \quad (12.11)$$

přičemž součinitel  $\chi$  je známý koeficient objemové roztažnosti plynů

$$\chi = \frac{1}{273,15} \text{ K}^{-1} . \quad (12.6)$$

Stejně jako v předcházejícím případě u izobarického děje proto můžeme snadno zavedením absolutní teplotní stupnice převést lineární závislost (12.11) na přímou úměrnost mezi tlakem  $p$  plynu a jeho absolutní teplotou  $T$ . Dostaneme tak vztah

$$p = \frac{p_0}{T_0} T \quad , \quad (12.12)$$

známý jako **Charlesův zákon** (konec 18. století) pro izochorický děj probíhající v ideálním plynu stálého množství (stále hmotnosti). Z této rovnice pak také vyplývá závěr, že je-li původní tlak plynu  $p_1$  a jeho absolutní teplota  $T_1$  a dojde-li při izochorickém ději k jejich změně na hodnoty  $p_2$  a  $T_2$ , musí nutně platit

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad , \quad \text{resp.} \quad \frac{p}{T} = \textit{konst.} \quad . \quad (12.13)$$

### Příklad:

Plyn v nádobě stálého objemu má při teplotě 15 °C tlak 0,4 MPa. Určete, při jaké teplotě v nádobě bude mít jeho tlak hodnotu  $5 \cdot 10^5$  Pa.

Hledanou teplotu plynu vypočítáme z Charlesova zákona, pozor však, že je třeba počítat s teplotou **absolutní !!!** Tedy původní teplota plynu byla  $T_1 = 288,15$  K **!!!**

Absolutní teplota  $T_2$  odpovídající tlaku  $p_2 = 5 \cdot 10^5$  Pa je dána

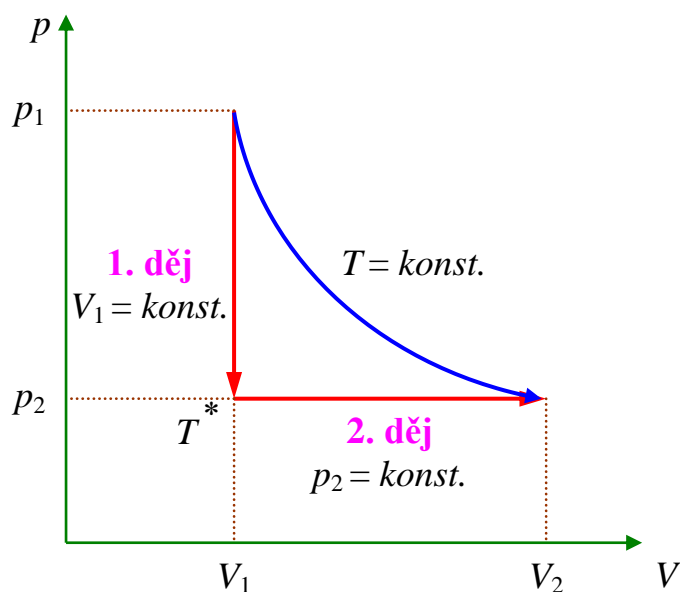
$$T_2 = \frac{p_2}{p_1} \cdot T_1 = \frac{5 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{4 \cdot 10^5 \text{ Pa}} \cdot 288,15 \text{ K} = 360,2 \text{ K} \quad .$$

Tlak  $5 \cdot 10^5$  Pa bude mít plyn při absolutní teplotě přibližně 360 K, což v Celsiově teplotní stupnici odpovídá přibližně hodnotě 87 °C.

### c) Izotermický děj

Je dějem, při němž je teplota plynu stálá a mění se pouze jeho objem  $V$  a tlak  $p$ . Vztah mezi těmito veličinami můžeme získat např. na základě následující úvahy.

Má-li se změnit při stálé teplotě  $T$  tlak z původní hodnoty  $p_1$  na konečnou  $p_2$  a podobně tak i objem z hodnoty  $V_1$  na konečnou  $V_2$ , musí být výsledek tohoto děje naprosto stejný, jako kdybychom nejprve tlak plynu izochoricky (při stálém počátečním objemu  $V_1$ ) zmenšili právě na hodnotu  $p_2$ , a pak nechali plyn izobaricky rozepnout (samozřejmě při „konečném“ tlaku  $p_2 = \textit{konst.}$ ) na konečný objem  $V_2$ . Naznačené děje jsou nejlépe patrné z připojeného  $p$ - $V$  diagramu (viz obr. 12.4 na následující straně)



Obr. 12.4 – k odvození zákonitosti izotermického děje v ideálním plynu

**1. děj** → zmenšením tlaku plynu při stálém objemu  $V_1$  se sníží i jeho absolutní teplota na hodnotu  $T^*$ , přičemž musí podle (12.13) platit

$$\frac{p_1}{T} = \frac{p_2}{T^*} \quad . \quad (12.14)$$

**2. děj** → zvětšením objemu plynu při stálém tlaku  $p_2$  se zvýší i jeho absolutní teplota zpátky na hodnotu  $T$ ; a opět – tentokrát v souladu s (12.10) – musí platit

$$\frac{V_1}{T^*} = \frac{V_2}{T} \quad . \quad (12.15)$$

Z obou posledních vztahů lze vyjádřit poměr

$$\frac{T}{T^*} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1} \quad ,$$

odkud už snadno dostaneme základní zákonitost mezi objemem a tlakem při izotermickém ději ve tvaru

$$\boxed{p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \quad , \quad \text{resp.} \quad p \cdot V = \text{konst.}} \quad . \quad (12.16)$$

Tento vztah je známý už od 17. století jako **Boyleův–Mariottův zákon** a platí pro izotermický děj probíhající v ideálním plynu stálého množství (stálé hmotnosti). Tlak  $p$  ideálního plynu a jeho objem  $V$  jsou si při tomto ději **nepřímo úměrné**.



### Příklad:

Když určitý objem plynu izotermicky stlačíme o 5 ℓ, stoupne jeho tlak trojnásobně. Jaký byl původní objem plynu?

Jelikož se jedná o izotermický děj musí mezi objemem a tlakem platit Boyleův–Mariottův zákon

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \quad .$$

Dále víme, že objem  $V_2$  je vůči původnímu objemu  $V_1$  o  $\Delta V = 5 \text{ ℓ}$  menší a tlak  $p_2 = 3 \cdot p_1$  .

Dosadíme za objem  $V_2$

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot (V_1 - \Delta V)$$

a po úpravě (kterou si proveďte sami !!) dostáváme vztah pro hledaný původní objem

$$V_1 = \frac{p_2}{p_2 - p_1} \cdot \Delta V = \frac{3p_1}{3p_1 - p_1} \cdot \Delta V = \frac{3}{2} \Delta V = 7,5 \text{ ℓ} \quad .$$

Původní objem plynu před izotermickou kompresí (stlačením) byl 7,5 ℓ.

## 12.1.3 Stavová rovnice ideálního plynu

**Stav** každé **termodynamické soustavy** (a tedy i ideálního plynu) je určen souhrnem hodnot všech nezávislých parametrů této soustavy. Veličiny, jež charakterizují stav termodynamické soustavy, se nazývají **stavové veličiny** (těmi mohou být např. právě teplota, tlak, objem, látkové množství, hmotnost, ...). Vztah mezi stavovými veličinami při daném rovnovážném stavu soustavy vyjadřuje tzv. **stavová rovnice**.

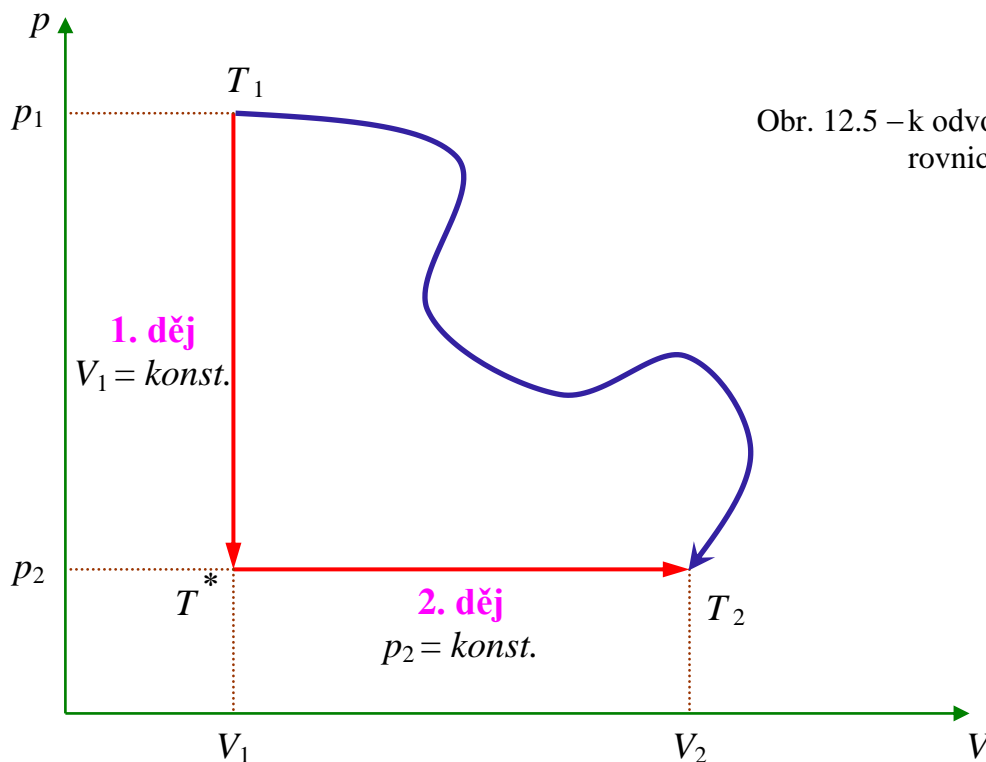
Stavovou rovnici ideálního plynu můžeme psát v různém tvaru. Předpokládejme, že máme stále stejné množství (tedy i stále stejnou hmotnost) ideálního plynu, jenž přejde **ze stavu 1** (v němž má absolutní teplotu  $T_1$ , tlak  $p_1$  a objem  $V_1$ ) **do stavu 2** (kde bude jeho absolutní teplota  $T_2$ , tlak  $p_2$  a objem  $V_2$ ). V  $p$ – $V$  diagramu na následujícím obr. 12.5 je tato změna stavu ideálního plynu naznačena modrou křivkou. Podobně jako při odvozování Boyleova–Mariottova zákona můžeme tuto změnu rozložit do dvou na sebe navazujících tepelných dějů (izochorického a izobarického).

**1. děj** → izochorickým ochlazením (z počáteční teploty  $T_1$  na jistou teplotu  $T^*$ ) při stálém objemu  $V_1$  zmenšíme tlak plynu na jeho konečnou hodnotu  $p_2$ . Přitom platí

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T^*} \quad . \quad (12.17)$$

**2. děj** → necháme plyn izobaricky expandovat při stálém tlaku  $p_2$  tak, že se jeho objem zvětší na konečnou hodnotu  $V_2$  a současně se přitom zvýší na konečnou hodnotu i absolutní teplota  $T_2$  plynu. Podle zákona Gay-Lussacova (12.10) musí platit

$$\frac{V_1}{T^*} = \frac{V_2}{T_2} \quad . \quad (12.18)$$



Obr. 12.5 – k odvození stavové rovnice ideálního plynu

Následnou úpravou – vyloučením teploty  $T^*$  z obou vztahů – dostaneme **stavovou rovnici ideálního plynu** (jehož je stálé množství) ve tvaru

$$\boxed{\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}}, \quad (12.19)$$

jenž vyjadřuje souvislost mezi stavovými veličinami tlakem  $p$  plynu, jeho objemem  $V$  a **absolutní teplotou**  $T$  při změně stavu plynu.

Ze stavové rovnice (12.19) však vyplývá ještě jeden důležitý závěr:

→ Poměr stavových veličin  $\frac{p \cdot V}{T}$  v ideálním plynu, jenž má **stálou hmotnost**, zůstává stále stejný .....  $\frac{p \cdot V}{T} = konst.$ , ať už ke změnám stavu plynu dochází nebo ne. Zbývá tak už jen vyřešit poslední otázku, čemu je rovna a na čem závisí konstanta (*konst.*) uváděná o dva řádky výše.



Odpověď je jednoduchá – závisí na látkovém množství daného plynu, jak ostatně vyplývá z **Avogadrova zákona**:

**Stejné objemy všech plynů za stejné teploty a stejného tlaku obsahují stejný počet molekul.**

**Látkové množství** je základní fyzikální veličina (její značka je  $n$ ) charakterizující počet elementárních jedinců určité soustavy (např. počet molekul ideálního plynu); fyzikální jednotkou této veličiny je jeden *mol*.

Jeden mol je takové látkové množství, jež obsahuje stejný počet elementárních jedinců, kolik je atomů v 0,012 kg uhlíku  $^{12}\text{C}$ . A těch je právě  $N_A \doteq 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ . Uvedená konstanta ( $N_A$ ) se nazývá **konstanta Avogadrova**.

Je-li tedy v určité soustavě  $N$  elementárních jedinců (např. právě molekul ideálního plynu), pak látkové množství snadno vyjádříme jako

$$n = \frac{N}{N_A} \quad . \quad (12.20)$$

Z Avogadrova zákona pak mimo jiné vyplývá i to, že 1 mol jakéhokoli ideálního plynu musí mít za stejných podmínek (teploty a tlaku) vždy naprosto stejný objem. Zvolíme-li tzv. „normální podmínky“, tj. absolutní teplotu  $T = 273,15 \text{ K}$  a tlak  $p = 131,325 \text{ kPa}$ , bude tento objem činit přibližně 22,4 litru. Přesně tuto hodnotu udává fyzikální veličina **normální molární objem**  $V_{m,n}$ , jež vztahuje tento objem právě k jednomu molu dané látky (a proto má také fyzikální jednotku  $\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ ). Platí

$$V_{m,n} = 0,022\,414 \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1} \quad .$$

Molární objem (obecně jakékoli látky) za jakýchkoli podmínek lze pak také charakterizovat jako poměr

$$V_m = \frac{V}{n} \quad . \quad (12.21)$$

kde  $V$  je objem dané látky (např. ideálního plynu) a  $n$  jemu příslušné látkové množství.

Vraťme se nyní ke stavové rovnici. Víme, že platí

$$\frac{p \cdot V}{T} = \textit{konst.} \quad . \quad (12.22)$$

Budeme-li mít jisté látkové množství  $n$  molů ideálního plynu při normálních podmínkách tlaku a teploty, dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{p \cdot V}{T} &= \frac{p \cdot n \cdot V_{m,n}}{T} = n \cdot \frac{1,013\,25 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0,022\,414 \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}}{273,15 \text{ K}} \doteq \\ &\doteq n \cdot 8,314 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = n \cdot 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = n \cdot R_m \quad , \end{aligned}$$

přičemž fyzikální veličina  $R_m \doteq 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  je tzv. **molární plynová konstanta** a její hodnota nezávisí na druhu ideálního plynu. Tím pádem se tak dostáváme k druhému možnému vyjádření stavové rovnice ideálního plynu daného látkového množství, a to

$$\boxed{\frac{p \cdot V}{T} = n \cdot R_m} \quad . \quad (12.23)$$

Známe-li pouze **hmotnost**  $m$  ideálního plynu, lze příslušné látkové množství (v molech) vyjádřit pomocí vztahu

$$n = \frac{m}{M_m} , \quad (12.24)$$

kde  $M_m$  je tzv. **molární hmotnost**, jež vlastně charakterizuje hmotnost jednoho molu dané látky. Její fyzikální jednotkou je  $\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ . U chemicky homogenních látek lze **číselnou hodnotu** této veličiny snadno určit na základě známých hodnot relativních atomových hmotností jednotlivých prvků tvořících každou molekulu dané látky. Platí **následující** jednoduché **pravidlo**:

- !! sečteme relativní atomové hmotnosti jednotlivých prvků v molekule dané látky a číselnou
- hodnotu molární hmotnosti pak vyjádříme jako tisícinu tohoto výsledku.

**Např.:** Fosgen má chemický vzorec  $\text{COCl}_2$ . Relativní atomové hmotnosti jednotlivých prvků jsou:

- uhlík ..... 12 ,
- kyslík ..... 16 ,
- chlór ..... 35,5 .

Molární hmotnost fosgenu tedy bude

$$M_m = (12 + 16 + 2 \cdot 35,5) \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1} = 99 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1} .$$

## 12.1.4 Tepelná výměna, teplo

Pod pojmem **tepelná výměna** rozumíme takový fyzikální děj, při němž se mezi dvěma tělesy „předává“ energie jiným způsobem než konáním práce nebo výměnou látky. Tento děj se uskutečňuje náhodnými srážkami částic (t.j. atomů nebo molekul obou látek) na rozhraní těchto dvou těles. Tepelná výměna je však možná i mezi tělesy, jež nejsou v bezprostředním kontaktu (např. zářením).

**Teplo**  $Q$  je pak skalární fyzikální veličina určená energií  $E$ , kterou při tepelné výměně „předá“ těleso s vyšší teplotou tělesu chladnějšímu (s menší teplotou). Fyzikální jednotkou tepla je stejně jako u energie **joule** (J).

Přijme-li látka při tepelné výměně teplo  $Q$  a **nedojde-li ke změně skupenství**, zvýší se teplota látky o určitou hodnotu  $\Delta t$ . Poměr dodaného tepla  $Q$  a odpovídajícího přírůstku teploty  $\Delta t$  pak definuje skalární fyzikální veličinu **tepelná kapacita tělesa**  $C$ . Musí platit

$$C = \frac{Q}{\Delta t} . \quad (12.25)$$

Fyzikální jednotkou tepelné kapacity je  $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$ . Číselná hodnota této veličiny pak vlastně udává, jaké teplo je třeba dodat danému tělesu, aby se jeho teplota zvýšila právě o jeden jediný teplotní stupeň.

U homogenních látek lze pak navíc definovat jejich **měrnou tepelnou kapacitu**. Má-li stejnorodé těleso hmotnost  $m$ , lze jeho měrnou tepelnou kapacitu  $c$  vyjádřit vztahem

$$c = \frac{C}{m} = \frac{Q}{m \cdot \Delta t} \quad . \quad (12.26)$$

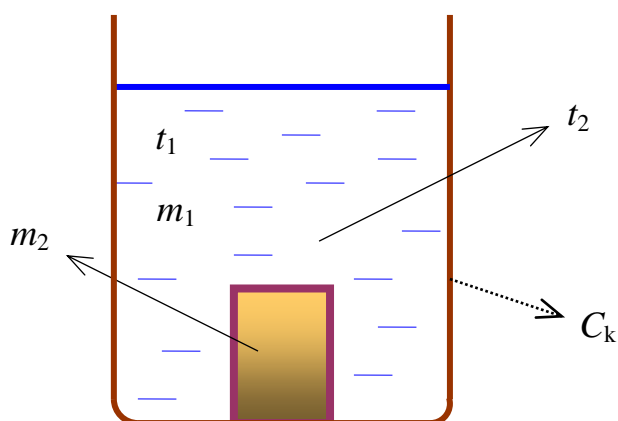
Fyzikální jednotkou měrné tepelné kapacity je  $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  a je to hodnota, která bývá pro nejrůznější látky tabelována. Její číselná hodnota je vlastně rovna množství tepla, jež přijme 1 kg homogenní látky při zvýšení své teploty právě o jeden jediný teplotní stupeň.

Ze vztahu (12.26) pro měrnou tepelnou kapacitu pak vyplývá, že teplo, jež přijme homogenní látka na zvýšení své teploty, je přímo úměrné hmotnosti látky  $m$  a nárůstu teploty  $\Delta t$ , neboť

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t \quad . \quad (12.27)$$

### 12.1.5 Kalorimetrie

Kalorimetrie je jednou z částí experimentální fyziky. Zabývá se stanovením měrných tepelných kapacit látek a měřením tepel při různých dějích spojených s tepelnou výměnou. Při těchto měřeních se používá nástrojů nazývaných **kalorimetry**.



Obr. 12.6 – tepelná výměna ve směšovací kalorigmetru

Předpokládejme, že v nádobě na vedlejším obrázku 12.6 jsou dvě látky, jejichž hmotnosti jsou  $m_1$  a  $m_2$ . Měrné tepelné kapacity obou látek jsou  $c_1$  a  $c_2$ . Necht' původní teplota první látky  $t_1$  je nižší než teplota  $t_2$  látky druhé ( $t_1 < t_2$ ). Mezi oběma látkami bude proto docházet tepelné výměně, o níž budeme předpokládat, že je ideální (tedy bez jakéhokoli předávání tepla do okolí). Výměna bude probíhat tak dlouho, než nastane rovnovážný stav, při němž se teploty obou látek vyrovnají na výsledné teplotě  $t$ . Pro tuto teplotu musí logicky platit nerovnost  $t_1 < t < t_2$ .

V souladu se zákonem zachování energie musí platit, že teplo  $Q_2 = m_2 \cdot c_2 \cdot (t_2 - t)$ , jež vydá látka mající původně vyšší teplotu, se musí rovnat teplu  $Q_1 = m_1 \cdot c_1 \cdot (t - t_1)$ , jež naopak přijme látka, jež měla původně teplotu nižší. Tuto skutečnost vyjadřuje tzv. **kalorimetrická rovnice** ve tvaru

$$m_2 \cdot c_2 \cdot (t_2 - t) = m_1 \cdot c_1 \cdot (t - t_1) \quad . \quad (12.28)$$

Látkou s nižší teplotou (látkou „chladnější“) v kalorimetru bývá obvykle voda (jejíž měrná tepelná kapacita je dobře známa .....  $c_{\text{vody}} \doteq 4\,200 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ). Po vložení tělesa vyšší teploty  $t_2$  se však začne s vodou ohřívat i sám kalorimetr – a stejně jako voda rovněž z teploty  $t_1$  na výslednou teplotu  $t$ . Je-li kapacita kalorimetru  $C_k$ , přejde kalorimetrická rovnice (12.28) do přesnějšího tvaru

$$m_2 \cdot c_2 \cdot (t_2 - t) = m_1 \cdot c_1 \cdot (t - t_1) + C_k \cdot (t - t_1) \quad . \quad (12.29)$$

Při experimentálním určování měrné tepelné kapacity dané látky obvykle nejprve na základě rovnice (12.29) vypočítáme kapacitu kalorimetru  $C_k$ , v němž pokus realizujeme – např. provedením tepelné výměny mezi horkou a studenou vodou, a pak teprve zjišťujeme hodnoty měrných tepelných kapacit různých látek ( $c_2$ ), jež zahřáté na teplotu  $t_2$  vkládáme opět nejčastěji do studené vody. Konečný výpočet měrné tepelné kapacity  $c_2$  příslušné látky pak provedeme opět pomocí kalorimetrické rovnice (12.29).

### Příklady:

**1.** Předmět z hliníku ( $c_{\text{Al}} = 896 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) o hmotnosti 800 g a teplotě  $250 \text{ }^\circ\text{C}$  byl vložen do 1,5 ℓ vody teploty  $15 \text{ }^\circ\text{C}$ . Na jaké hodnotě se ustálila teplota soustavy po dosažení rovnovážného stavu za předpokladu ideální tepelné výměny?

V zadání úlohy se vůbec nehovoří o kalorimetru, předpokládejme tedy, že ideální tepelná výměna probíhala pouze mezi hliníkovým předmětem a vodou. Výslednou teplotu  $t$  získáme proto úpravou kalorimetrické rovnice (12.28)

$$m_2 \cdot c_2 \cdot (t_2 - t) = m_1 \cdot c_1 \cdot (t - t_1) \quad , \quad \text{kde } c_2 = c_{\text{Al}} \quad \text{a kde hmotnost vody } m_1 = 1,5 \text{ kg} .$$

Po několika krocích (ty si ale proveďte sami) byste se měli nakonec dostat ke konečnému výrazu

$$t = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

a následně i k číselnému výsledku

$$t = \frac{1,5 \cdot 4\,200 \cdot 15 + 0,8 \cdot 896 \cdot 250}{1,5 \cdot 4\,200 + 0,8 \cdot 896} \text{ }^\circ\text{C} \doteq 39 \text{ }^\circ\text{C} \quad .$$

Výsledná teplota soustavy bude tedy přibližně  $39 \text{ }^\circ\text{C}$  .

**2.** V kalorimetru, jehož tepelná kapacita je  $63 \text{ J.K}^{-1}$ , je nalit olej o hmotnosti 250 g a teplotě  $12 \text{ }^\circ\text{C}$ . Do oleje ponoříme měděný předmět ( $c_{\text{Cu}} = 383 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) hmotnosti 0,5 kg zahřátý na teplotu  $130 \text{ }^\circ\text{C}$ . Po dosažení rovnovážného stavu se teplota ustálí na  $33 \text{ }^\circ\text{C}$ . Určete měrnou tepelnou kapacitu použitého oleje.

Při známé kapacitě  $C_k$  použitého kalorimetru vyjdeme z kalorimetrické rovnice ve tvaru (12.29)

$$m_2 \cdot c_2 \cdot (t_2 - t) = m_1 \cdot c_1 \cdot (t - t_1) + C_k \cdot (t - t_1) \quad , \quad \text{kde } c_2 = c_{\text{Cu}} \quad ,$$

z níž po krátké úpravě (opět si ji proveďte sami !!) získáme vztah pro hledanou měrnou tepelnou kapacitu oleje

$$c_1 = \frac{m_2 \cdot c_2 \cdot (t_2 - t) - C_k \cdot (t - t_1)}{m_1 \cdot (t - t_1)} .$$

Po dosazení příslušných číselných hodnot jednotlivých veličin pak získáme výsledek

$$c_1 = \frac{0,5 \cdot 383 \cdot (100 - 33) - 63 \cdot (33 - 12)}{0,25 \cdot (33 - 12)} \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \doteq 2\,190 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} .$$

Měrná tepelná kapacita oleje je přibližně  $2\,190 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

## 12.1.6 Změny skupenství látek

Pod pojmem **změna skupenství** chápeme takový fyzikální děj, při němž se mění skupenství určité látky. Ta jsou – jak známo – tři: **pevné, kapalné a plynné**. Tím pádem můžeme pozorovat následující děje:

- **tání**, jež je změnou skupenství pevného v kapalné; u látek krystalických nastává při určité charakteristické teplotě nazývané **teplota tání**  $t_t$ ;
- **tuhnutí**, jež představuje opačný proces - změnu skupenství kapalného v pevné; u krystalických látek probíhá opět při určité charakteristické teplotě nazývané **teplota tuhnutí**  $t_t$ . Tato teplota se u dané látky a za stejného vnějšího tlaku rovná teplotě tání;
- **vypařování** – je změnou skupenství kapalného v plynné; na rozdíl od tání probíhá vypařování kapalné látky z jejího volného povrchu za každé teploty, kdy kapalné skupenství existuje;
- **var** – je zvláštním případem vypařování, kdy ke změně skupenství kapalného v plynné dochází v celém objemu kapaliny; vypařování přechází ve var při dosažení určité teploty nazývané **teplota varu**  $t_v$  - tato hodnota je pro určitou látku typická, je však silně závislá na vnějším (okolním) tlaku;
- **kapalnění, kondenzace** – je pak zase změnou opačnou, kdy dochází k přeměně skupenství plynného v kapalné;
- **sublimace** – je přímou přeměnou látky ze skupenství pevného v plynné (za běžného atmosférického tlaku nastává např. u jódu, ale i u ledu, sněhu a u řady dalších látek);
- **desublimace** – je opačnou změnou k sublimaci - látka přechází přímo ze skupenství plynného ve skupenství pevné.

Na přeměnu látky z jednoho skupenství do druhého je potřebné určité teplo, jež daná látka buď přijme, nebo odevzdá. Toto teplo se nazývá **skupenské teplo** (značí se písmenem  $L$ ) a podle typu změny skupenství rozlišujeme **skupenské teplo tání, tuhnutí, vypařování, varu, kondenzace, sublimace** a **desublimace**.

Skupenské teplo u dané látky závisí na její hmotnosti  $m$ , čím větší hmotnost látky mění své skupenství, tím větší skupenské teplo  $L$  je potřebné (resp. se vydá) při změně skupenství. Proto zavádíme veličinu **měrné skupenské teplo** definovanou vztahem

$$\ell = \frac{L}{m} \quad , \quad (12.30)$$

jejíž jednotkou je  $\text{J.kg}^{-1}$ . Představuje vlastně **číselnou hodnotu** tepla, jež potřebuje (anebo vydá) právě 1 kg dané látky při změně svého skupenství. Hodnoty měrných skupenských tepel různých materiálů bývají tabelovány.

Z definice měrného skupenského tepla pak zpětně vyplývá, že skupenské teplo  $L$ , jež látka přijme (resp. odevzdá) při změně skupenství, je dáno vztahem

$$L = m \cdot \ell \quad . \quad (12.31)$$

### Příklady:

**1.** Jakého tepla je třeba k tomu, aby roztálo 5,4 kg ledu teploty  $-15\text{ }^\circ\text{C}$  ? Měrná tepelná kapacita ledu je  $2\,130\text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ , měrné skupenské teplo tání ledu  $3,3 \cdot 10^5\text{ J.kg}^{-1}$ .

Při tomto ději musíme nejprve zvýšit teplotu ledu (tedy vlastně „ohřát“ led) na jeho teplotu tání  $t_t = 0\text{ }^\circ\text{C}$ , a tedy mu dodat teplo

$$Q_1 = m \cdot c \cdot (t_t - t_1)$$

a teprve potom nastane změna skupenství (tání), jež vyžaduje skupenské teplo

$$L = m \cdot \ell \quad .$$

Tudíž celková potřeba tepla  $Q$  činí

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + L = m \cdot c \cdot (t_t - t_1) + m \cdot \ell = 5,4\text{ kg} \cdot 2\,130\text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \cdot 15\text{ K} + 5,4\text{ kg} \cdot 3,3 \cdot 10^5\text{ J.kg}^{-1} = \\ &= 170\,130\text{ J} + 1\,782\,000\text{ J} = 1,952\text{ MJ} \end{aligned}$$

Celkové teplo potřebné v našem příkladě je téměř 2 MJ; povšimněte si, že více než 90 % (přesněji 91,3 %) z této hodnoty připadá na samotnou změnu skupenství a jen zbývajících 8,7 % na „ohřev“ ledu z  $-15\text{ }^\circ\text{C}$  na jeho teplotu tání.

**2.** Do 10  $\ell$  vody  $60\text{ }^\circ\text{C}$  teplé dáme 2 kg ledu teploty  $0\text{ }^\circ\text{C}$ . Jaká bude výsledná teplota po skončení tepelné výměny?

Pro výpočet použijeme kalorimetrické rovnice, ale její tvar musíme trochu upravit, neboť je třeba zahrnout do ni i skupenské teplo. Vzhledem k tomu, že dochází k různým fyzikálním dějům, (ohřívání a ochlazování látek, změna skupenství), je třeba provést nejprve určitý rozbor úlohy, a pak teprve zformulovat příslušnou kalorimetrickou rovnici.

V naší úloze mohou totiž nastat tři následující situace:



**a) roztaje pouze část ledu**  $\Rightarrow$  voda se ochladí na teplotu  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , což bude i teplota celé směsi po proběhnutí tepelné výměny; pak by bylo možno z kalorimetrické rovnice určit, jak velká část  $\Delta m_1$  z původní hmotnosti ledu roztála.

V takovém případě by skupenské teplo tání ledu  $L' = \Delta m_1 \cdot \ell$  bylo rovno teplu  $Q_2$ , jež může teplá voda vydat při svém ochlazení z teploty  $t_2 = 60\text{ }^{\circ}\text{C}$  na teplotu  $t = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Pro něj by pak platilo  $Q_2 = m_2 \cdot c_2 \cdot (t_2 - t)$  a úlohu bychom řešili na základě rovnosti

$$L' = Q_2 \quad .$$

**b) roztaje všechny led a voda se současně ochladí na teplotu tuhnutí**  $t = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ; je to situace krajně výjimečná, v tomto případě je „celé“ skupenské teplo  $L = m_1 \cdot \ell$  rovno teplu  $Q_2$ , jež může teplá voda vydat při svém ochlazení z teploty  $t_2 = 60\text{ }^{\circ}\text{C}$  na teplotu  $t = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$  – opět zde platí  $Q_2 = m_2 \cdot c_2 \cdot (t_2 - t)$  a úlohu řešíme pomocí vztahu

$$L = Q_2 \quad .$$

**c) všechny led roztaje a výsledná teplota**  $t$  směsi po skončení tepelné výměny **bude vyšší než teplota tání ledu** (a tuhnutí vody)  $t_t = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$   $\Rightarrow$  voda vzniklá táním ledu (a mající také hmotnost  $m_1$ ) se ještě trochu ohřeje, na což je navíc potřeba teplo  $Q_1 = m_1 \cdot c_1 \cdot (t - t_t)$ .

V tomto případě nastane rovnost mezi skupenským teplem tání ledu  $L = m_1 \cdot \ell$  a teplem  $Q_1$  na jedné straně a teplem  $Q_2$ , jež může teplá voda vydat při svém ochlazení z teploty  $t_2 = 60\text{ }^{\circ}\text{C}$  na výslednou teplotu  $t > 0\text{ }^{\circ}\text{C}$  na straně druhé.....  $Q_2 = m_2 \cdot c_2 \cdot (t_2 - t)$ . Výslednou teplotu  $t$  pak získáme řešením rovnice

$$L + Q_1 = Q_2 \quad .$$

Vzhledem k výše uvedeným možnostem si proto nejprve vypočítáme skupenské teplo tání celé hmotnosti  $m_1$  ledu:

$$L = m_1 \cdot \ell = 2\text{ kg} \cdot 3,3 \cdot 10^5\text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} = 6,6 \cdot 10^5\text{ J} \quad .$$

Dále si spočítáme, jaké největší teplo  $Q_2$  může deset litrů (tj. 10 kg) teplé vody vydat při svém ochlazení z počáteční teploty  $t_2 = 60\text{ }^{\circ}\text{C}$  až na svou teplotu tuhnutí  $t = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ :

$$Q_2 = m_2 \cdot c_2 \cdot (t_2 - t) = 10\text{ kg} \cdot 4\,200\text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot 60\text{ K} = 2,52 \cdot 10^6\text{ J} \quad .$$

Z provedené bilance vidíme, že při naší tepelné výměně nastane varianta **c)**  $\rightarrow$  teplá voda je „schopna“ nejen nechat roztát všechny led, ale ještě i následně ohřát vodu z něj vzniklou. Platí tedy

$$L + Q_1 = Q_2$$

$$m_1 \cdot \ell + m_1 \cdot c_1 \cdot (t - t_t) = m_2 \cdot c_2 \cdot (t_2 - t)$$

Odtud už po krátké úpravě (tu si znovu proveďte sami !!) dostáváme výraz pro hledanou výslednou teplotu  $t$

$$t = \frac{m_1 c_1 t_t + m_2 c_2 t_2 - m_1 \ell}{m_1 c_1 + m_2 c_2} = \frac{2 \cdot 4\,200 \cdot 0 + 10 \cdot 4\,200 \cdot 60 - 2 \cdot 3,3 \cdot 10^5}{2 \cdot 4\,200 + 10 \cdot 4\,200} \text{ }^{\circ}\text{C} \doteq 36,9\text{ }^{\circ}\text{C}$$

Výsledná teplota směsi po proběhnutí ideální tepelné výměny bude přibližně  $37\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

## 12.1.7 Příklady dalších tepelných dějů

Přijímání a odevzdávání tepla je však spojeno i s jinými přírodními ději, než jaké jsme rozebírali dosud – tedy nejen s ohřevem nebo ochlazením určité látky ať už bez změny nebo se změnou skupenství. Teplo se přijímá nebo odevzdává při většině chemických reakcí (typické je např. hoření), při rozpouštění látek, apod. Podle toho zavádíme i následující tepla.

**Reakční teplo**  $Q_r$  je teplo, jež přijmou nebo odevzdají při chemické reakci reagující látky určité hmotnosti za definovaných podmínek (teploty a tlaku). Obvykle se toto teplo vztahuje na jeden mol reakčních přeměn.

Podobně **rozpouštěcí teplo** je teplem, jež přijme nebo odevzdá určitá látka dané hmotnosti při svém rozpouštění.

**Spalné teplo**  $Q_s$  je teplem, jež se uvolní při spálení dané látky v **plynném kyslíku** až na konečné oxidační produkty při chemické reakci probíhající za určitých podmínek. Je-li známa hmotnost  $m$  spalované látky je možné definovat **měrné spalné teplo hmotnostní** jako

$$q_s = \frac{Q_s}{m} \quad . \quad (12.32)$$

Tato veličina vlastně číselně udává kolik tepla se vyvine při úplném ideálním spálení právě jednoho kilogramu dané látky. Spalné teplo však můžeme vztáhnout i k objemu páleného materiálu. Tak získáme **měrné spalné teplo objemové**

$$q_{sv} = \frac{Q_s}{V} \quad , \quad (12.33)$$

jež je zase číselně rovno spalnému teplu, jež se vyvine při spálení  $1 \text{ m}^3$  dané látky.

Jelikož každý materiál obsahuje jisté procento vody, dochází při jeho spalování k jejímu odpařování a spalné teplo má tak menší hodnotu, než kdyby materiál žádnou vodu neobsahoval. Proto v tabulkách najdeme místo měrného spalného tepla jinou fyzikální veličinu – **výhřevnost**  $h$ . Její hodnota je vlastně dána měrným spalným teplem zmenšeným o teplo potřebné k odpaření vody obsažené v jednotkové hmotnosti (resp. jednotkovém objemu) spalovaného materiálu. Spalné teplo, jež vznikne spálením látky o hmotnosti  $m$  s výhřevností  $h$  ( $[h] = \text{J.kg}^{-1}$ ), pak lze spočítat jako

$$Q_s = m \cdot h \quad . \quad (12.34)$$

## 12.2 ZÁKLADNÍ POZNATKY Z TERMODYNAMIKY

**Termodynamika** je takovým oborem fyziky, jenž se zabývá obecnými vlastnostmi a zákonitostmi makroskopických soustav bez zřetele k jejich mikrostruktuře, přičemž si všímá zejména vlastností a dějů souvisejících s tepelnou výměnou nebo se změnou teploty látek. Jejím základem jsou **tři termodynamické zákony** (termodynamické věty), jež jsou vlastně vyvozeny ze zkušenosti a vysloveny jako axiomy. V literatuře se můžeme setkat s různými slovními formulacemi těchto tří termodynamických vět, ale pokaždé se pochopitelně jedná u konkrétní termodynamické věty o formulace navzájem ekvivalentní.

Jedním z možných je i následující vyjádření těchto tří základních zákonů.

### 1.termodynamický zákon:

Neexistuje stroj konající neustále práci bez dodávání energie.

### 2.termodynamický zákon:

Neexistuje periodicky pracující stroj, jenž by trvale konal práci jen tím, že by neustále ochlazoval jiné těleso (tepelnou lázeň).

### 3.termodynamický zákon:

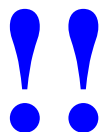
Žádným konečným dějem nelze dosáhnout teploty absolutní nuly.

Soustava, v níž probíhají termodynamické děje, se pak nazývá **termodynamická soustava**. K popisu stavu takové termodynamické soustavy se používá řady makroskopických parametrů, jako jsou například tlak  $p$ , absolutní teplota  $T$ , objem  $V$ , koncentrace  $c$ , hustota  $\rho$ , látkové množství  $n$ , hmotnost  $m$  a další, tzv. **stavových veličin**.

Důležitým fyzikálním pojmem v termodynamice je pak **vnitřní energie soustavy** (tuto fyzikální veličinu označujeme písmenem  $U$ ). Vnitřní energie soustavy **je** právě **jednou ze stavových veličin**. Lze ji definovat jako součet celkové kinetické energie všech neuspořádaně se pohybujících částic soustavy (např. atomů, molekul, iontů, aj.) a celkové potenciální energie vzájemné polohy těchto částic.

S použitím metod statistické fyziky lze dokázat, že u ideálního plynu, u něhož neexistuje vzájemné silové působení mezi jeho molekulami, závisí vnitřní energie plynu pouze na jeho absolutní teplotě  $T$  a že její hodnota je této absolutní teplotě **přímo úměrná**

$$U \sim T .$$



Vnitřní energie termodynamické soustavy není konstantní veličinou. Děje, při nichž dochází **k jejím změnám**, lze obecně rozdělit do dvou skupin:

- děje, při nichž se vnitřní energie mění **konáním práce**  $W$  (např. třením, stlačováním plynu, apod.),
- děje, při nichž změna vnitřní energie nastává **tepelnou výměnou** (t.j. dodáváním nebo odebíráním tepla  $Q$  dané soustavě).

### 12.2.1 První termodynamický zákon

Tento termodynamický zákon je vlastně určitým obecným vyjádřením zákona zachování energie v termodynamické soustavě a jak už bylo řečeno v úvodu této kapitoly, lze ho vyslovit různými ekvivalentními formulacemi. Matematická formulace tohoto zákona může být např. následující:

**Přírůstek vnitřní energie soustavy  $\Delta U$  se rovná součtu práce  $W$  vykonané okolními tělesy působícími na soustavu určitými silami a tepla  $Q$  odevzdaného okolními tělesy soustavě.**

Tuto skutečnost pak můžeme vyjádřit jednoduchou rovnicí ve tvaru

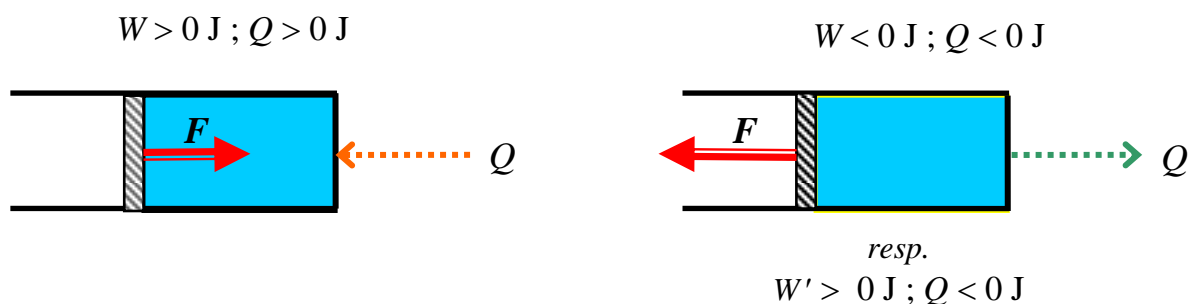
$$\Delta U = W + Q \quad . \quad (12.35)$$

Jestliže soustava **energii „přijímá“ (zvyšuje)**, považujeme práci  $W$  vykonanou okolními tělesy na soustavě a teplo dodané soustavě za veličiny kladné ( $W > 0$  J,  $Q > 0$  J); jestliže soustava sama koná práci nebo tepelnou výměnou odevzdává teplo do okolí, a tedy svou vnitřní **energii snižuje**, přiřadíme práci  $W$  a tepla  $Q$  záporná znaménka ( $W < 0$  J,  $Q < 0$  J) – viz obr. 12.7 na následující straně.

**Pozn.:** Pro rozlišení situací, kdy práci na plynu konáme vnějšími silami a naopak, kdy plyn práci koná sám (to nastává při rozpínání plynu), se tyto práce rozlišují i **formálním** označením.

**Práce plynu** samotného se zapisuje jako  $W'$  (tedy „s čárkou“) a **má při zvětšování objemu** vždy **kladnou hodnotu**. Rovnici (12.35) lze tak formálně vyjádřit v ekvivalentním tvaru

$$\Delta U = Q - W' \quad . \quad (12.36)$$



Obr. 12.7 – k 1. termodynamickému zákonu

## 12.2.2 Práce plynu

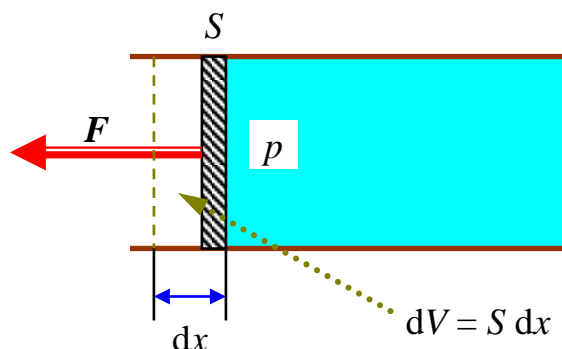
Ideální plyn představující jistou termodynamickou soustavu koná práci  $W'$  při svém rozpínání (zvětšování objemu – expanzi). Její velikost lze vyjádřit následujícím postupem. Představme si, že plyn v nádobě na následujícím obr. 12.8 má tlak  $p$  a na pohyblivý píst působí tlakovou silou

$$F = p \cdot S$$

Síla  $F$  pak při posunu pístu o jisté (nekonečně malé)  $dx$  vykoná infinitezimální práci

$$dW' = F dx = p \cdot S dx = p dV$$

kde  $dV$  představuje nekonečně malý nárůst objemu plynu při posunu pístu (platí  $dV = S dx$ ).



Obr. 12.8 – práce konaná při expanzi plynu

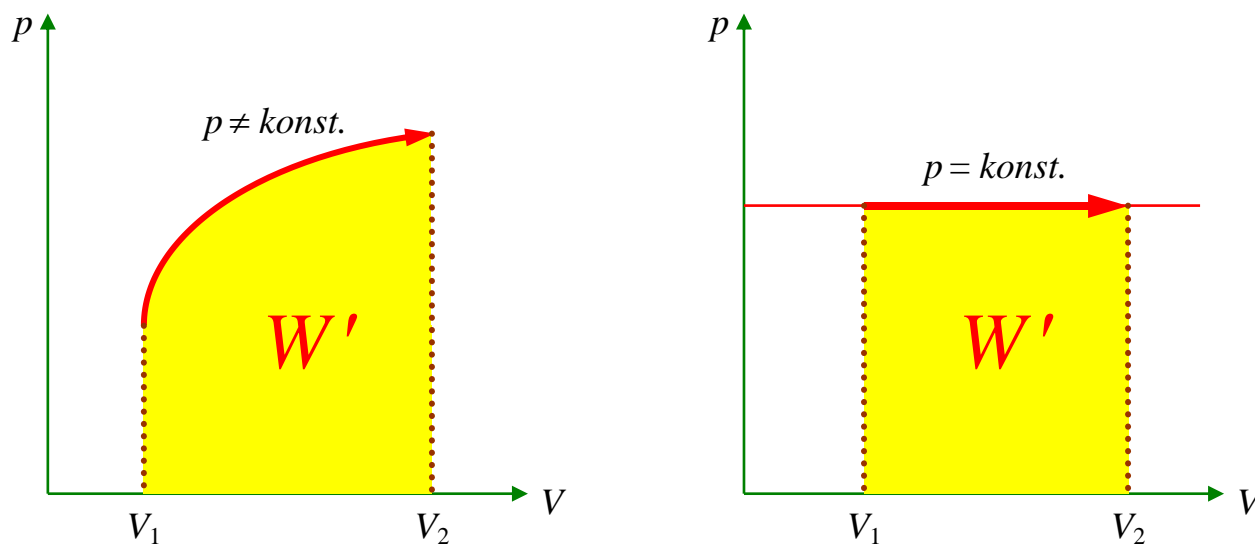
Celková práce vykonaná plynem (tlakovou silou  $F$ ) při změně objemu z původní hodnoty  $V_1$  na konečnou hodnotu  $V_2$  pak bude dána integrálem všech nekonečně malých příspěvků práce  $dW'$ . Pro její hodnotu tak dostáváme

$$W' = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad . \quad (12.37)$$

Bude-li tlak plynu stálý (**při izobarickém ději**), přejde integrál v prostý součin

$$W' = p \cdot (V_2 - V_1) = p \cdot \Delta V \quad . \quad (12.38)$$

Velikost práce  $W'$  vykonané plynem při jeho rozpínání lze snadno znázornit v  $p$ - $V$ diagramu (viz obr. 12.9). Tato práce je rovna velikosti plochy omezené grafem závislosti tlaku na objemu, pořadnicemi obou objemů ( $V_1$  a  $V_2$ ) a vodorovnou osou  $V$ .



Obr. 12.9 – velikost práce vykonané plynem při jeho rozpínání

### 12.2.3 Děje v ideálním plynu z pohledu prvního termodynamického zákona

V následujícím výkladu se ještě jednou vrátíme k tepelným dějům probíhajícím v ideálním plynu a rozebereme si je „z energetického hlediska“. Jako nejjednodušší se z tohoto pohledu jeví

#### I. Izochorický děj

Tento tepelný děj je – jak známo – dějem, při němž zůstává objem plynu stálý (neměnný) a mění se pouze jeho teplota  $T$  a tlak  $p$ . Závislost těchto dvou veličin pak charakterizuje **Charlesův zákon** (12.13).

S rostoucí teplotou plynu při ději izochorickém stoupá přímo úměrně i jeho tlak a naopak. Protože je ale objem plynu stálý, nemůže plyn konat práci, ale logicky práci nemohou konat ani vnější síly na plynu, aby nedocházelo ke jeho stlačování. Z prvního termodynamického zákona (12.36) tedy vyplývá, že při tomto ději se při dodání jistého tepla  $Q_V$  pouze zvýší vnitřní energie  $U$  plynu, a tedy stoupne i jeho absolutní teplota  $T$ . To v konečném důsledku (v souladu s tím, co už bylo řečeno) pak vede i k nárůstu tlaku  $p$  plynu. Na druhé straně při odebírání tepla se teplota plynu  $T$  snižuje a s ní klesá i jeho tlak  $p$ . Pro děj izochorický tedy platí

$$\Delta U = Q_V \quad , \quad (12.39)$$

přičemž teplo  $Q_V$  dodané (případně odevzdané) při tomto ději je dáno výrazem

$$\boxed{Q_V = n c_{mV} \Delta T} \quad , \quad (12.40)$$

kde  $n$  je látkové množství (počet molů) daného plynu a  $c_{mV}$  tzv. **molární tepelná kapacita plynu při konstantním objemu**. Tato fyzikální veličina, jejíž jednotkou je jeden  $J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$ , vlastně číselně udává množství tepla, jež je třeba při ději izochorickém dodat jednomu molu ideálního plnu, aby svou teplotu zvýšil právě o jeden teplotní stupeň. Molární tepelné kapacity plynů při konstantním objemu jsou samozřejmě tabelovány.

## II. Izobarický děj

O izobarickém ději víme, že je dějem, při němž je tlak plynu stálý a mění se pouze jeho absolutní teplota  $T$  a objem  $V$ . Tuto závislost – přímou úměrnost mezi oběma veličinami – pak charakterizuje **zákon Gay-Lussacův** (12.13).

S rostoucí teplotou plynu při tomto ději tedy vzrůstá i jeho objem (říkáme, že plyn expanduje – rozpíná se) a naopak pokles teploty je provázen zmenšováním objemu (kompresí) plynu. Budeme-li plynu dodávat teplo  $Q_p$ , bude konat práci  $W'$  při zvětšování svého objemu a současně se bude zvyšovat i jeho teplota – poroste vnitřní energie plynu  $U$ . Z toho také vyplývá, že na izobarický ohřev stejného (látkového) množství plynu o stejný teplotní rozdíl je potřeba dodat mnohem více tepla  $Q_p$  než při ději izochorickém (teplo  $Q_V$ ), kdy plyn konat práci nemůže.

Podobně jako v předcházejícím případě děje izochorického lze i teplo  $Q_p$  dodané (případně odevzdané) při ději izobarickém vyjádřit vztahem

$$\boxed{Q_p = n c_{mp} \Delta T} \quad , \quad (12.41)$$

kde  $n$  je opět látkové množství (počet molů) daného plynu a  $c_{mp}$  **molární tepelná kapacita plynu při konstantním tlaku**. I tato fyzikální veličina má jednotku jeden  $J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$  a vlastně číselně vyjadřuje množství tepla, jež je třeba při ději izobarickém dodat jednomu molu ideálního plnu, aby svou teplotu zvýšil právě o jeden teplotní stupeň. Její hodnoty pro příslušné látky najdeme rovněž v tabulkách.

Práci  $W'$ , kterou plyn při izobarickém ději (při rozpínání z původního objemu  $V_1$  na konečnou hodnotu  $V_2$ ) vykoná, spočítáme díky konstantnímu tlaku snadno

$$W' = p \cdot (V_2 - V_1) = p \cdot \Delta V \quad . \quad (12.38)$$

Je-li látkové množství plynu  $n$  (molů), musí podle stavové rovnice ideálního plynu (12.23) pro výchozí a konečný stav platit

$$\begin{aligned} p \cdot V_1 &= n \cdot R \cdot T_1 \\ p \cdot V_2 &= n \cdot R \cdot T_2 \quad (-) \\ \hline p \cdot (V_2 - V_1) &= n \cdot R \cdot (T_2 - T_1) \\ p \cdot \Delta V &= n \cdot R \cdot \Delta T \end{aligned}$$

Práci plynu při izobarickém ději tak lze vyjádřit ekvivalentním vztahem k výše uvedenému výrazu (12.38) jako

$$\boxed{W' = n \cdot R \cdot \Delta T} \quad . \quad (12.42)$$

Porovnejme závěrem z energetického hlediska oba dosud vyšetřované děje – izochorický a izobarický. Předpokládejme, že stejné látkové množství  $n$  (molů) ideálního plynu ohřejeme (zvýšíme jeho teplotu) jednak izochoricky a jednak izobaricky, ale v obou případech o stejný teplotní rozdíl  $\Delta T$ . V obou případech tak dojde k naprosto stejné změně vnitřní energie plynu  $\Delta U$ . Podle prvního termodynamického zákona (12.36) musí platit:

→ pro děj **izochorický** .....  $\Delta U = Q_V$       (–)

→ pro děj **izobarický** .....  $\Delta U = Q_p - W'$

Po odečtení obou rovnic vidíme, že teplo  $Q_p$  dodané plynu při ději izobarickém je větší než teplo  $Q_V$  dodané plynu při izochorickém ději právě o práci, jež je vykonána při rozpínání plynu za jeho stálého tlaku. Platí

$$Q_p = Q_V + W' .$$

Dosadíme-li za jednotlivé veličiny v této rovnici podle vztahů (12.41), (12.40) a (12.42), dostaneme

$$n c_{mp} \Delta T = n c_{mV} \Delta T + n R \Delta T \quad / : n \Delta T$$

$$\boxed{c_{mp} = c_{mV} + R} . \quad (12.43)$$

Poslední rovnice nám vyjadřuje, jaký je vztah mezi molárními tepelnými kapacitami ideálního plynu při stálém tlaku a stálém objemu. Podle svého objevitele, německého fyzika a lékaře Julia Roberta von Mayera (1814 – 1878) se nazývá **Mayerův vztah**.

### III. Izotermický děj

U tohoto děje zůstává teplota plynu stálá a mění se pouze jeho objem  $V$  a tlak  $p$ , a to tak, že mezi oběma stavovými veličinami existuje **nepřímá úměrnost**, jak ostatně potvrzuje i **zákon Boyleův–Mariottův** (12.16).

S rostoucím objemem plynu při izotermickém ději tedy klesá jeho tlak a naopak. Protože je teplota plynu stálá, je konstantní i jeho vnitřní energie  $U$  a nemůže tak docházet k jejím změnám

$$\Delta U = 0 \text{ J} ,$$

a tedy musí platit

$$\boxed{Q = W'} . \quad (12.44)$$

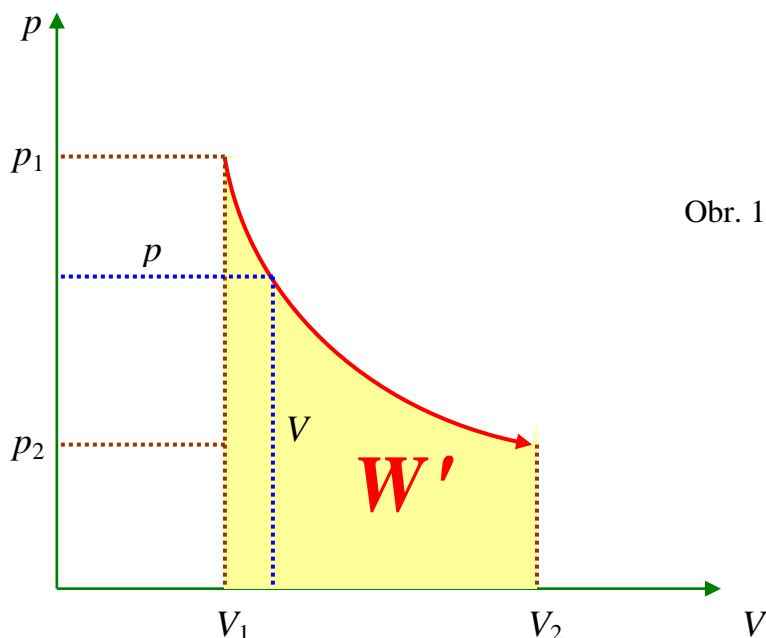
Podle prvního termodynamického zákona tedy při dodání tepla  $Q$  plyn vykoná práci  $W'$ , jež je tomuto dodanému teplu rovna → plyn zvětší svůj objem a poklesne jeho tlak. Naopak při stlačování plynu vnějšími silami je třeba – aby teplota plynu zůstávala stálá a neměnila se – teplo plynu odebírat a odevzdávat do okolí.

Bude-li se plyn rozepínat z původního objemu  $V_1$  na konečnou hodnotu  $V_2$ , vykoná díky postupnému poklesu tlaku  $p$  menší práci, než jakou by vykonal za stejných podmínek při expanzi izobarické. Velikost této práce snadno spočítáme integrací.



Podle (12.16) platí pro libovolný objem  $V \in \langle V_1; V_2 \rangle$

$$p = \frac{p_1 V_1}{V} \quad (\text{viz obr. 12.10}).$$



Obr. 12.10 – práce ideálního plynu při izotermickém ději

Podle (12.37) tedy spočítáme práci plynu při izotermickém ději jako

$$W' = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1}{V} \, dV = p_1 V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} \, dV = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\boxed{W' = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} \quad . \quad (12.45)$$

Zkoumáme-li tepelné děje v plynech z hlediska energetického, můžeme se setkat ještě s jedním dějem – až dosud nezmíněným, protože u něj dochází ke změnám jak objemu, tlaku, tak i teploty plynu. **Nedochází při něm ale k výměně tepla s okolím.** Je to

#### IV. Adiabatický děj

Jelikož při tomto ději neprobíhá tepelná výměna mezi ideálním plynem (obecně pak mezi jakoukoli termodynamickou soustavou) a okolím; ideální plyn nepřijímá ani neodevzdává teplo. Při adiabatickém ději je tedy  $Q = 0 \text{ J}$ , takže z prvního termodynamického zákona okamžitě vyplývá jednoznačný závěr

$$\boxed{\Delta U = W, \text{ resp. } \Delta U = -W'} \quad . \quad (12.46)$$

Při adiabatickém ději se při **stlačování plynu** vnějšími silami koná práce na plynu (např. pomocí pístu), a tím se zvyšuje vnitřní energie plynu  $U$ . To se navenek projeví **vzrůstem teploty plynu**. Naopak při adiabatické **expanzi**, kdy plyn svůj objem zvětšuje, práci sám vykonává; tím se ale plyn energeticky „ochuzuje“, jeho vnitřní energie  $U$  se nutně zmenšuje a **teplota plynu  $T$  klesá**.

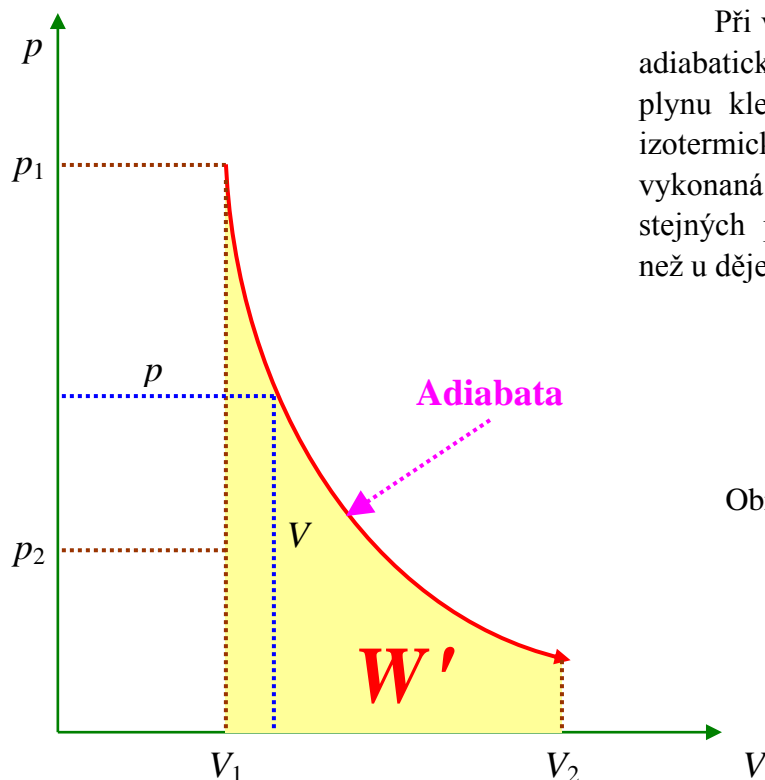
Jak již bylo řečeno výše, je pro adiabatickou změnu typické, že se mění jak objem  $V$ , tak tlak  $p$  i teplota  $T$  plynu. Změnu stavových veličin pak charakterizuje **Poissonův zákon**

$$p_1 \cdot V_1^\kappa = p_2 \cdot V_2^\kappa, \text{ resp. } p \cdot V^\kappa = \text{konst.} \quad , \quad (12.47)$$

kde řeckým písmenkem  $\kappa$  (kapa) je označena tzv. **Poissonova konstanta** – bezrozměrné číslo (fyzikální veličina nemající jednotku) větší než jedna, jehož hodnota závisí na druhu plynu. Pro ideální plyny je tato veličina definovaná poměrem měrných tepelných kapacit daného plynu při konstantním tlaku a konstantním objemu

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad . \quad (10.48)$$

Na základě výpočtů statistické fyziky lze dokázat, že pro plyny s jednoatomovými molekulami je hodnota přibližně  $\kappa = \frac{5}{3}$ , pro plyny mající dvouatomové molekuly  $\kappa = \frac{7}{5}$  a pro plyny s víceatomovými molekulami pak  $\kappa = \frac{4}{3}$ .



Při výpočtu práce  $W'$  konané plynem při adiabatickém ději si musíme uvědomit, že tlak plynu klesá podle (12.47) „strměji“ než při izotermické změně, a tudíž bude práce vykonaná plynem u tohoto děje (za jinak stejných počátečních podmínek) ještě menší než u děje izotermického (viz obr. 12.11).

Obr. 12.11 – práce ideálního plynu při adiabatickém ději

Předpokládejme, že původní objem plynu byl  $V_1$ , konečný pak  $V_2$ . Podle (12.47) platí pro libovolný objem  $V \in \langle V_1; V_2 \rangle$

$$p = \frac{p_1 V_1^\kappa}{V^\kappa} .$$

Podle (12.37) tedy spočítáme práci plynu při adiabatickém ději následnou integrací

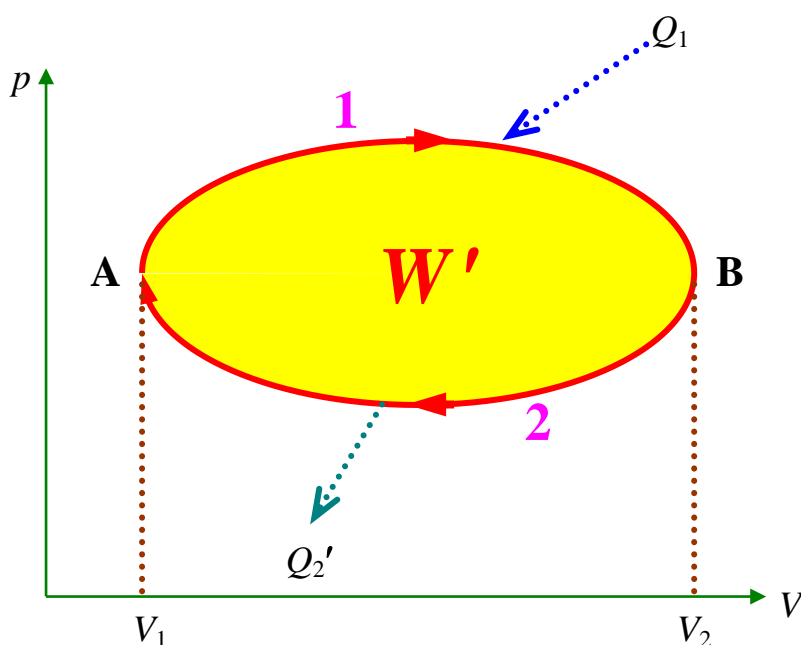
$$W' = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1^\kappa}{V^\kappa} \, dV = p_1 V_1^\kappa \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^\kappa} \, dV = p_1 V_1^\kappa \frac{V_2^{1-\kappa} - V_1^{1-\kappa}}{1-\kappa} ,$$

což lze upravit na konečný výraz

$$W' = \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \cdot \left( 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa - 1} \right) . \quad (12.49)$$

## 12.2.4 Kruhový děj

Práce konaná plynem současně znamená i stálý růst jeho objemu. Máme-li však vytvořit trvale pracující tepelný stroj, nemůžeme nechat plyn rozpínat do nekonečna, ale vždy jej musíme vrátit do výchozího stavu (tedy stlačit do původního objemu). Takový děj, při němž je konečný stav soustavy (v našem případě plynu) totožný se stavem počátečním se nazývá **kruhový** (též **cyklický**) **děj**. Grafem takového děje je v  $p$ - $V$  diagramu (viz následující obr. 12.12) vždy uzavřená křivka. Může-li děj probíhat oběma směry a nenastávají-li na okolních tělesech přitom žádné změny, pak se jedná o tzv. **vratný** **kruhový děj**.



Obr. 12.12 – práce vykonaná plynem při kruhovém ději

Práce  $W_1'$  vykonaná plynem při jeho rozpínání ze stavu **A** do stavu **B** je v  $p$ - $V$  diagramu vymezena plochou pod křivkou **A – 1 – B**. Naopak při stlačování plynu do původního stavu v druhé části cyklu (ze stavu **B** do stavu **A**) konají na plynu práci  $W_2$  vnější síly; tato práce (jež má ovšem opačné znaménko než práce  $W_1'$ ) je pak vymezena plochou pod křivkou **B – 2 – A**. Rozdíl obsahů obou ploch pak určuje velikost práce  $W'$  vykonané pracovní látkou (v našem případě plynem) během celého cyklu a je roven obsahu plochy uvnitř křivky **A – 1 – B – 2 – A** znázorňující průběh celého kruhového děje.

Uvedený cyklus lze libovolněkrát opakovat a tepelný stroj tak může trvale konat práci. Protože je počáteční i konečný stav látky (plynu) při kruhovém ději totožný, musí být celková změna vnitřní energie plynu po ukončení každého cyklu nulová ( $\Delta U = 0$  J). V souladu s prvním termodynamickým zákonem musí platit:

→ cesta **A – 1 – B** .....plyn při expanzi vykonal práci  $W_1'$  a přijal přitom od okolních těles (od tzv. **ohříváče**) teplo  $Q_1$ . Tedy

$$\Delta U_1 = Q_1 - W_1' \quad . \quad (12.50)$$

→ cesta **B – 2 – A** .....na plynu byla při stlačování vnějšími silami vykonána práce  $W_2$  a plyn přitom současně okolním tělesům (tzv. **chladiči**) odevzdal teplo  $Q_2$ . Abychom se nemuseli trápit se znaménky, tak toto teplo, jež má podle dohody zápornou hodnotu nahradíme v rovnici (12.51) „kladným“ teplem  $Q_2'$ . Tudíž dostáváme

$$\Delta U_2 = W_2 - Q_2' \quad . \quad (12.51)$$

Obě práce i obě tepla v rovnicích (12.50) a (12.51) mají tedy kladnou hodnotu. Je-li ovšem celková změna vnitřní energie plynu po ukončení celého cyklu nulová ( $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$  J), musí platit.

$$Q_1 - W_1' + W_2 - Q_2' = 0 \quad ,$$

z čehož následně vyplývá

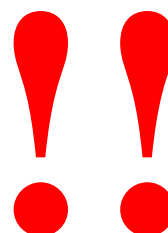
$$W_1' - W_2 = Q_1 - Q_2' \quad ,$$

a tedy celková práce  $W'$  vykonaná plynem během celého cyklu

$$\boxed{W' = Q_1 - Q_2'} \quad . \quad (12.52)$$

Rozdíl tepel  $Q_1$  (přijátého od ohříváče) a  $Q_2'$  (odevzdaného chladiči) představuje vlastně celkové teplo  $Q$  přijaté plynem během jednoho cyklu od okolí. Tedy:

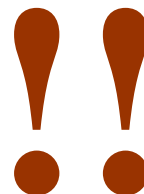
**Celková práce  $W'$ , kterou pracovní látka (plyn) během jednoho kruhového děje vykoná, se rovná celkovému teplu  $Q$  přijatému během tohoto cyklu od okolí.**



**Účinnost**  $\eta$  každého kruhového děje je pak dána ekvivalentními vztahy

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2'}{Q_1} \quad (12.53)$$

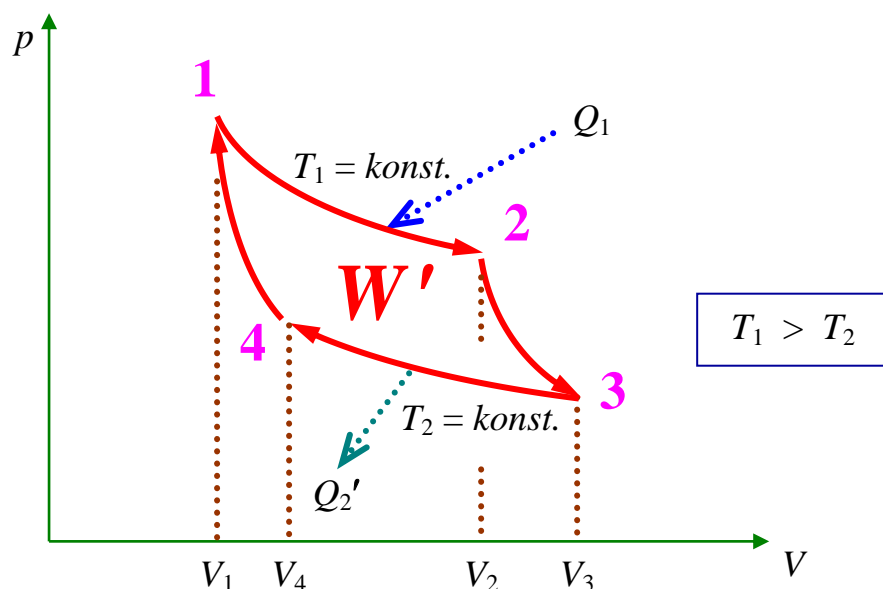
Při kruhovém ději lze využít jen část tepla  $Q_1$ , jež přijme látka (plyn) od ohříváče, na konání práce, zbytek se při cyklu odevzdá chladiči. Tato skutečnost, že **neexistuje** takový **periodicky pracující tepelný stroj**, jenž by teplo od určitého tělesa (ohříváče) pouze přijímal a vykonával přitom stejně velkou práci, je vlastně jen ekvivalentní formulací **2. termodynamického zákona** uvedeného výše.



### 12.2.5 Carnotův cyklus

**Carnotův cyklus** je ideální vratný kruhový děj (v praxi ovšem – jak už to v podobných „ideálních“ případech bývá – nerealizovatelný), který se postupně skládá ze dvou izotermických dějů (**1** → **2** a **3** → **4**) mezi něž jsou postupně vloženy dva děje adiabatické (**2** → **3** a **4** → **1**). Graf takového ideálního tepelného děje je vyneseno v  $p$ - $V$  diagramu na obr. 12.12.

Tento kruhový děj nese jméno Francouze Sadi Carnota (1796 – 1832) – pozor, nezaměňovat tohoto muže s jeho otcem slavným matematikem a významnou osobností z období Francouzské revoluce a vlády Napoleona Bonaparta Lazarem Carnotem (1753 – 1823)!



Obr. 12.13 – Carnotův kruhový děj

Čtyři etapy Carnotova kruhového děje probíhají následovně:

### 1 → 2 **Izotermická expanze**

Pracovní látka přijímá při stálé teplotě  $T_1$  od ohřívače teplo  $Q_1$  a na úkor tohoto tepla koná práci  $W_{12}'$ . Vnitřní energie látky je konstantní, její změna nenastává. Platí

$$W_{12}' = Q_1 \quad .$$

### 2 → 3 **Adiabatická expanze**

Nedochází k výměně tepla s okolím (ohřívač tedy žádné teplo nedodává, ale ani se teplo neodevzdává chladiči). Pracovní látka koná práci  $W_{23}'$  na úkor své vnitřní energie. Dochází k úbytku vnitřní energie a k poklesu teploty pracovní látky z  $T_1$  na  $T_2$ . Platí

$$W_{23}' = U_1 - U_2 \quad .$$

### 3 → 4 **Izotermická komprese**

Pracovní látka je stlačována při stálé teplotě  $T_2 < T_1$  vnějšími silami konajícími práci  $W_{34}$ . Protože se vnitřní energie látky při tomto ději nemění, musí plyn při této etapě odevzdat chladiči teplo  $Q_2'$ , přičemž platí

$$W_{34} = Q_2' \quad .$$

### 4 → 1 **Adiabatická komprese**

Opět nedochází k výměně tepla s okolím. Práce vnějších sil  $W_{41}$  se tedy projeví v nárůstu vnitřní energie látky a zvýšení její teploty z  $T_2$  na výchozí hodnotu  $T_1$ . Bude platit

$$W_{41} = U_1 - U_2 \quad .$$

Během jednoho Carnotova kruhového děje se tedy celkem vykoná práce

$$W' = W_{12}' + W_{23}' - W_{34} - W_{41} \quad .$$

Přitom práce  $W_{23}'$  a  $W_{41}$  při adiabatických dějích jsou však stejně velké, takže dohromady dávají nulový výsledek. Celková práce je tak rovna pouze rozdílu prací  $W_{12}'$  a  $W_{34}$  při izotermických dějích, neboli rozdílu tepla  $Q_1$  přijatého od ohřívače při izotermické expanzi a tepla  $Q_2'$  odevzdaného chladiči při izotermické kompresi. Na základě této skutečnosti lze následně odvodit, že účinnost  $\eta_C$  Carnotova kruhového děje se dá vyjádřit kromě obecně platného vztahu (12.53) ještě jiným ekvivalentním způsobem a sice

$$\eta_C = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad . \quad (12.54)$$

Z tohoto vztahu vyplývá jednoznačný závěr, že účinnost Carnotova kruhového děje závisí pouze na teplotách ohřívače a chladiče a nezávisí tak na pracovní látce (plynu), v níž uvedené tepelné děje probíhají. Toho lze využít – jak si ukážeme na závěr – k zavedení nové teplotní stupnice, tzv. **termodynamické**.

Navíc lze dokázat, že ze všech cyklických tepelných dějů, jež probíhají při teplotách ohřivače  $T_1$  a chladiče  $T_2$  má právě cyklus Carnotův největší účinnost. Pro účinnost každého jiného (reálného) tepelného stroje tak platí

$$\boxed{\eta < 1 - \frac{T_2}{T_1}} \quad . \quad (12.55)$$

## 12.2.6 Termodynamická teplotní stupnice

Ze vztahu (12.54) pro účinnost  $\eta_C$  Carnotova kruhového děje bezprostředně vyplývá, že

$$\frac{Q_2'}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad .$$

Tedy poměr obou teplot **není závislý** na pracovní látce (plynu), ale pouze na velikosti tepla  $Q_1$  přijatého od ohřivače během cyklu a na velikosti tepla  $Q_2'$  odevzdaného následně chladiči.

Zvolíme-li jednu z lázní (jedno zda ohřivač nebo chladič) za standardní a přiřadíme-li jí zvolenou teplotu  $T_s$  (např. to může být teplota trojného bodu vody  $T_s = 273,16$  K), můžeme teplotu  $T$  druhé lázně snadno určit pomocí vztahu

$$\boxed{T = \frac{Q}{Q_s} T_s} \quad , \quad (12.56)$$

v němž teplo  $Q$  se vztahuje k lázni, jejíž teplotu  $T$  určujeme, a teplo  $Q_s$  pak k lázni standardní. Lze dokázat, že takto konstruovaná termodynamická teplotní stupnice je prakticky totožná s teplotní stupnicí absolutní definovanou na základě teplotní rozpínivosti ideálního plynu.

# 13. ZÁKLADY OPTIKY

Optika patří společně s mechanikou k nejstarším fyzikálním oborům. Ve svém původním významu se zabývá světlem, zákonitostmi jeho vzniku a šíření a ději při vzájemném působení (interakci) světla a látky. **Světlo** je elektromagnetické vlnění o vlnových délkách (měřeno ve vakuu) od 390 nm – světlo fialové do 760 nm – světlo červené. Podle přístupu ke světelným jevům a podle použitých metod zkoumání obvykle optiku dělíme na **geometrickou** (též **paprskovou**), **vlnovou** a **kvantovou**.

## 13.1 GEOMETRICKÁ OPTIKA

Je tím oborem optiky, v němž se při popisu procesu šíření optického záření a při procesu optického zobrazování zanedbává vlnová povaha světla i jeho kvantové vlastnosti. Matematický popis procesů, na něž se omezuje geometrická optika, i příslušné geometrické konstrukce používají jako základní pojem **geometrický paprsek**. Ten je sice po geometrické stránce naprosto totožný s pojmem světelný paprsek, ale nepřipisuje se mu žádný zvláštní obsah po stránce fyzikální.

Geometrická optika se opírá o čtyři základní principy (resp. zákony):

- 1. princip přímočarého šíření světla,
- 2. zákon odrazu,
- 3. zákon lomu,
- 4. princip nezávislosti chodu světelných paprsků.

### 13.1.1 Zobrazování zrcadlem

U zrcadel se při zobrazování uplatňuje **jen zákon odrazu** světla. Podle tvaru zrcadlicí plochy rozdělujeme zrcadla na rovinná, dutá a vypuklá.

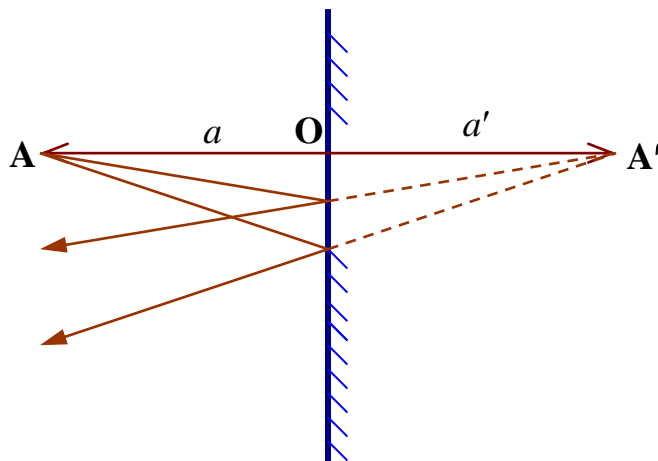
#### Rovinné zrcadlo

Toto zrcadlo je tvořeno lesklou rovinnou plochou; princip zobrazení rovinným zrcadlem je dobře patrný z obrázku 13.1 na následující straně.



Protože jsou paprsky po odrazu před zrcadlem rozbíhavé, najdeme jejich průsečíky vždy za zrcadlem. Vzniká tak **neskutečný** (též **zdánlivý**) **obraz**, jenž nemůže být zachycen např. na promítací stěnu. Můžeme jej ale pozorovat okem na jeho sítnici.

Při zobrazení určitého předmětu **A** rovinným zrcadlem je vzdálenost jeho obrazu **A'** za zrcadlem (tzv. **obrazová vzdálenost**  $a' = \mathbf{OA}'$ ) stejná jako vzdálenost předmětu **A** před zrcadlem (tzv. **předmětová vzdálenost**  $a = \mathbf{OA}$ ).



Obr. 13.1 – zobrazování rovinným zrcadlem

Platí tudíž jednoduchý vztah

$$\boxed{a' = a} \quad . \quad (13.1)$$

Obraz vytvořený rovinným zrcadlem je tedy **vždy** zdánlivý, navíc vzpřímený, stejně velký jako zobrazovaný předmět a je s tímto předmětem souměrný podle roviny zrcadla.

## Duté zrcadlo

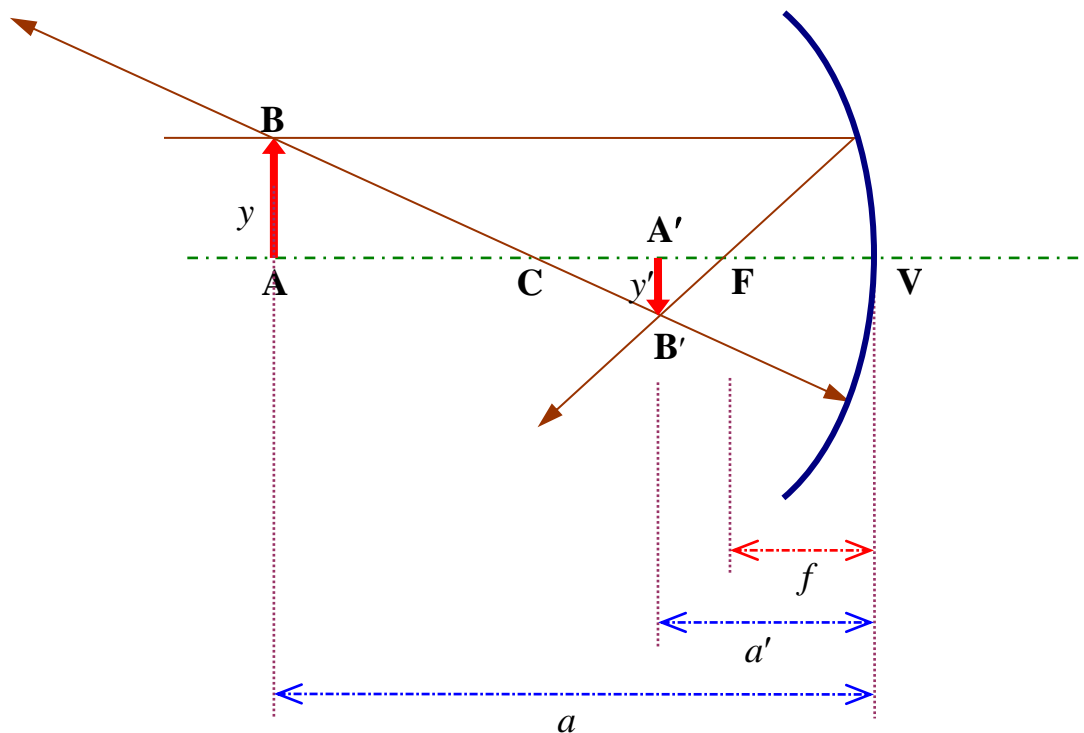
Zobrazovací plochou dutého kulového zrcadla je vnitřní část povrchu koule. Pro duté (ale i pro později studované vypuklé) zrcadlo zavádíme následující pojmy – viz obr. 13.2, na němž je znázorněn princip zobrazování tímto typem zrcadla.

Přímka procházející **středem křivosti C** a **vrcholem V** zrcadla se nazývá **optická osa** zrcadla; vzdálenost  $r = |\mathbf{CV}|$  je **poloměr křivosti** zrcadla. Bod **F**, jenž je středem úsečky **CV**, je **ohnisko** zrcadla. Jeho vzdálenost od vrcholu zrcadla je potom **ohnisková vzdálenost**  $f$ . Musí platit

$$f = |\mathbf{FV}| = \frac{r}{2} \quad .$$

Při konstrukci obrazu (obr. 13.2) využíváme tří význačných druhů paprsků:

- paprsek procházející středem křivosti **C** zrcadla dopadá vždy na povrch kulového zrcadla kolmo, a proto se pokaždé odráží zpět do bodu **C**,
- paprsek původně rovnoběžný s optickou osou po odrazu od zrcadla protíná optickou osu právě v ohnisku **F**,
- paprsek procházející ohniskem **F** se po odrazu od zrcadla stává rovnoběžným s optickou osou.



$a$  ..... předmětová vzdálenost                       $y$  ..... výška předmětu  
 $a'$  ..... obrazová vzdálenost                       $y'$  ..... výška obrazu

Obr. 13.2 – zobrazování dutým zrcadlem

**Pozn.:** Při zobrazování dutým (ale později i vypuklým) zrcadlem volíme vždy paprsky **!!** nedaleko od optické osy!

Pro fyzikální veličiny uvedené na obrázku 13.2 pak platí následující **matematická konvence**. Veličiny  $a$ ,  $a'$  mají v prostoru **před** zrcadlem (v obrázku vlevo) **kladné** hodnoty, vzniká-li ovšem obraz zdánlivý v prostoru **za** zrcadlem (v obrázku vpravo), je potom obrazová vzdálenost **záporná** ( $a' < 0$  m). Výškám předmětu a obrazu  $y$ ,  $y'$  přiřazujeme **nad** optickou osou **kladnou** hodnotu, **pod** ní pak hodnotu **zápornou**.

Vztah mezi předmětovou vzdáleností  $a$ , obrazovou vzdáleností  $a'$  a ohniskovou vzdáleností  $f$  vyjadřuje **zobrazovací rovnice dutého zrcadla**

$$\boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}} \quad (13.2)$$

Pomocí výše zavedených veličin pak lze spočítat i **příčné zvětšení Z obrazu**

$$Z = \frac{y'}{y} = -\frac{a'}{a} = -\frac{a' - f}{f} = -\frac{f}{a - f} \quad . \quad (13.3)$$

Jak je z výše stanovených znaménkových pravidel dobře patrné, bude-li znaménko příčného zvětšení kladné ( $Z > 0$ ), musí vznikat obraz **vzpřímený**, bude-li jeho znaménko záporné ( $Z < 0$ ), znamená to, že obraz je **převrácený**.

## Vypuklé zrcadlo

Pro zobrazování vypuklým zrcadlem platí naprosto stejná pravidla, a jak lze snadno dokázat, i stejná zobrazovací rovnice (13.2) jako pro zrcadlo duté. Střed křivosti **C** a ohnisko **F** leží ovšem v tomto případě v prostoru **za zrcadlem** a podle znaménkové konvence je tedy **ohnisková vzdálenost**  $f$  vypuklého zrcadla **záporná** ( $f < 0$  m).



Jak se lze snadno přesvědčit krátkým matematickým rozbohem, vyplývá ze zobrazovací rovnice (13.2), že pro jakoukoli kladnou předmětovou vzdálenost ( $a > 0$  m), musí **vždy** vycházet obrazová vzdálenost záporná ( $a' < 0$  m). To ale jednoznačně znamená, že obraz, jenž byl vytvořen vypuklým zrcadlem, bude **pokaždé jen zdánlivý**.

### **Příklad:**

Dutým zrcadlem o ohniskové vzdálenosti 30 cm byl vytvořen skutečný desetkrát zvětšený obraz. Určete vzdálenost předmětu a obrazu od vrcholu zrcadla.

Obraz je skutečný, vzdálenosti  $a$ ,  $a'$  jsou kladné a příčné zvětšení  $Z$  má tedy podle zavedené konvence záporné znaménko

$$Z = -\frac{a'}{a} = -10 \quad .$$

Předmětovou vzdálenost  $a$  pak určíme ze vztahu (13.3)

$$Z = -\frac{f}{a - f} \Rightarrow a = f \cdot \frac{Z - 1}{Z} = 0,3 \text{ m} \cdot \frac{-10 - 1}{-10} = 0,3 \text{ m} \cdot 1,1 = 0,33 \text{ m} \quad .$$

Ze vztahu pro příčné zvětšení  $Z$  nakonec určíme i obrazovou vzdálenost  $a'$

$$a' = -a \cdot Z = -0,33 \text{ m} \cdot (-10) = 3,3 \text{ m} \quad .$$

Předmětová vzdálenost je tedy 33 cm, obrazová pak 3,3 m. Pro kontrolu správnosti výsledku je možno dosadit tyto hodnoty do zobrazovací rovnice zrcadla.

## 13.1.2 Zobrazování tenkou čočkou

U čoček (na rozdíl od zrcadel) se při optickém zobrazování uplatňuje **jen lom** světelných paprsků. Podle charakteru zobrazení rozlišujeme dvě skupiny čoček – tzv. **čočky spojné** (spojky) a **čočky rozptylné** (rozptylky).

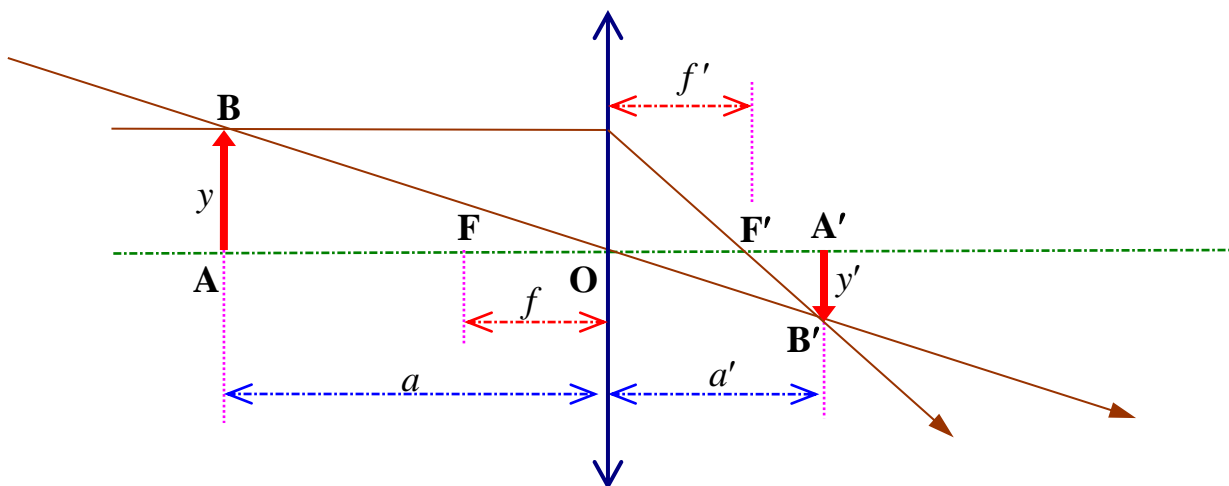
### Spojná čočka

Podobně jako u kulových zrcadel je i u čoček důležitou přímkou **optická osa** tenké čočky, jež prochází čočkou kolmo jejím **optickým středem O**. Body **F** a **F'** jsou **předmětové** a **obrazové ohnisko**, jejich vzdálenosti od optického středu čočky nazýváme **předmětová ohnisková vzdálenost**  $f = |FO|$  a **obrazová ohnisková vzdálenost**  $f' = |OF'|$ . Pro tenkou čočku platí, že jsou tyto dvě vzdálenosti stejné ( $f' = f$ ), a proto pro ně používáme společné označení **ohnisková vzdálenost**  $f$ .

Na rozdíl od zrcadel světlo čočkami prochází, a proto rozlišujeme prostor, z něhož světlo do čočky vstupuje – tzv. **předmětový prostor**, a prostor, do něhož světlo po průchodu čočkou vystupuje – tzv. **obrazový prostor**.

I při konstrukci obrazu vytvořeného tenkou čočkou (viz obr. 13.3) využíváme tří druhů význačných paprsků:

- paprsek procházející optickým středem **O** čočky se jako jediný neláme a nemění svůj směr,
- paprsek rovnoběžný s optickou osou po průchodu čočkou protíná optickou osu v obrazovém ohnisku **F'**,
- paprsek procházející předmětovým ohniskem **F** se po průchodu čočkou stává rovnoběžným s optickou osou.



$a$  ..... předmětová vzdálenost

$y$  ..... výška předmětu

$a'$  ..... obrazová vzdálenost

$y'$  ..... výška obrazu

Obr. 13.3 – zobrazování tenkou spojnou čočkou

A opět zde platí určitá znaménková konvence (pravidla). Předměťová vzdálenost  $a$  je **kladná v předmětovém** a **záporná v obrazovém prostoru**, u obrazové vzdálenosti  $a'$  je tomu pochopitelně přesně naopak (**kladná** v obrazovém a **záporná** v předmětovém prostoru → tato situace nastává právě v případech, když vzniká při zobrazování čočkou tzv. **zdánlivý obraz**). Výškám předmětu a obrazu  $y, y'$  přiřazujeme stejně jako při zobrazování zrcadlem **nad** optickou osou **kladnou** hodnotu, **pod** ní pak hodnotu **zápornou**.

Vztah mezi předmětovou vzdáleností  $a$ , obrazovou vzdáleností  $a'$  a ohniskovou vzdáleností  $f$  pak vyjadřuje **zobrazovací rovnice tenké čočky**, jejíž matematický tvar je naprosto stejný jako u zobrazování zrcadlem

$$\boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}} \quad (13.4)$$

Rovněž pro příčné zvětšení  $Z$  obrazu dostáváme identický vztah se zvětšením při zobrazování zrcadlem

$$\boxed{Z = \frac{y'}{y} = -\frac{a'}{a} = -\frac{a' - f}{f} = -\frac{f}{a - f}} \quad (13.5)$$

A opět: bude-li znaménko příčného zvětšení kladné ( $Z > 0$ ), vzniká obraz **vzpřímený**, bude-li jeho znaménko záporné ( $Z < 0$ ), znamená to, že obraz je **převrácený**.

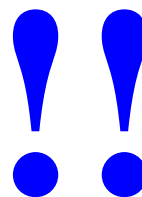
Ze zobrazovací rovnice pak lze po změření předmětové a obrazové vzdálenosti snadno vypočítat ohniskovou vzdálenost tenké čočky

$$\boxed{f = \frac{aa'}{a + a'}} \quad (13.6)$$

Kromě přímé aplikace zobrazovací rovnice se však používají pro zjišťování ohniskových vzdáleností čoček i jiné (nepřímé) metody, jež jsou buď jednodušší, než je měření předmětové vzdálenosti  $a$  a obrazové vzdálenosti  $a'$ , nebo jsou zatíženy menší chybou než výpočet podle vzorce (13.6). Je třeba si uvědomit, že reálné čočky nebývají nekonečně tenké, mají určitou tloušťku a že zobrazovací rovnice (13.4) přesně platí skutečně jen pro takové čočky, jejichž tloušťka je zanedbatelně malá.

## Rozptylná čočka

Pro zobrazování čočkou rozptylnou (rozptylkou) platí naprosto stejná pravidla i naprosto stejná zobrazovací rovnice (13.4) jako pro čočky spojné. Základní rozdíl je v tom, že **ohnisková vzdálenost** těchto čoček **je záporná** ( $f < 0$  m). Snadno se tak můžeme přesvědčit, že při zobrazování rozptylkou pro jakoukoli kladnou předmětovou vzdálenost ( $a > 0$  m), musí **vždy** vycházet obrazová vzdálenost záporná ( $a' < 0$  m). Obraz vytvořený rozptylkou tak bude **pokaždé jen zdánlivý** a navíc vždy vzpřímený a zmenšený.



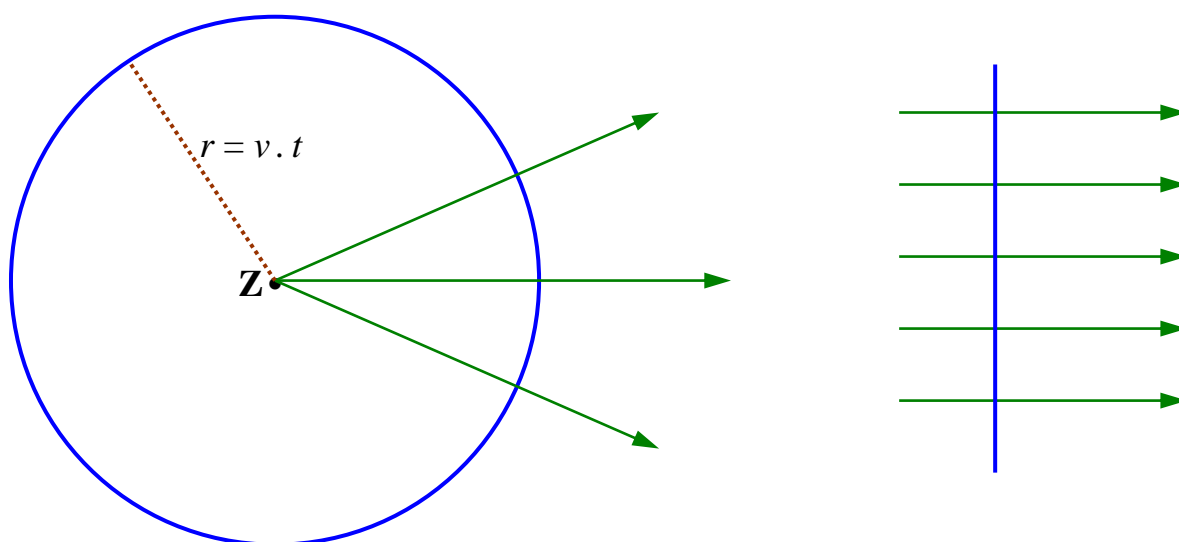
## 13.2 ZÁKLADNÍ POJMY VLNOVÉ OPTIKY

**Vlnová optika** je takovým oborem, jenž se zabývá jevy potvrzujícími vlnovou podstatu světla (jako je např. disperze světla, jeho interference, ohyb a polarizace). Optické záření je zde chápáno jako soubor světelných vln, tj. elektromagnetických vln v určitém intervalu frekvencí (jeho korpuskulární vlastnosti se přitom zanedbávají).. V následujícím výkladu se zaměříme jen na velice úzký okruh studované problematiky – na odraz, lom a interferenci světla a některé jevy s tím související.

### 13.2.1 Huygensův princip

Tento princip zformulovaný už roku 1678 holandským fyzikem Christianem Huygensem objasňuje způsob, jakým se šíří obecně každé vlnění, tedy i optická vlna.

V dalším výkladu se zaměříme pouze na **prostředí izotropní**, tedy takové, jež má ve všech směrech stejné fyzikální vlastnosti. Vlnění, jež se v takovém prostředí šíří z určitého zdroje, má ve všech směrech stejně velkou rychlost  $v$ . Za určitý čas  $t$  dospěje vlnění do vzdálenosti  $r = v \cdot t$  od zdroje a body na povrchu koule o tomto poloměru vytvářejí tzv. **vlnoplochu** (obr. 13.4). Platí, že ve všech bodech dané vlnoplochy má vlnění **stejnou fázi**. Směr šíření vlnění je potom dán kolmicí k vlnoploše (normálou vlnoplochy) a nazývá se **paprsek**. V dostatečné vzdálenosti od zdroje vlnění je vlnoplocha částí roviny – hovoříme o tzv. **rovinné vlnoploše** a v takovém případě jsou paprsky navzájem rovnoběžné (viz též obr. 13.4).



Obr. 13.4 – vlnoplocha — a paprsek →

A právě Huygens zformuloval princip, jak určit vlnoplochu v daném okamžiku, jestliže známe její polohu a tvar v některém okamžiku předcházejícím. Zní:

Každý bod vlnoplochy, do něhož vlnění dospělo v jistém okamžiku, se stává zdrojem elementárního vlnění, z něhož se toto vlnění pak šíří v elementárních vlnoplochách. Výsledná vlnoplocha v dalším časovém okamžiku se získá jako obálka všech elementárních vlnoploch ve směru, v němž se vlnění šíří.

### 13.2.2 Odraz a lom světla, index lomu

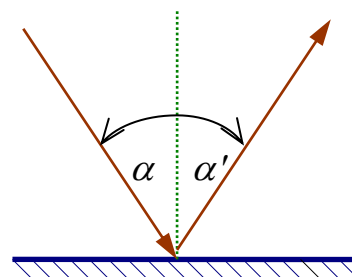
Odraz a lom světla jsou typickým příkladem přírodních jevů pozorovaných na rozhraní dvou prostředí, jež se dají snadno vysvětlit právě na základě Huygensova principu. Oba jevy se řídí naprosto stejnými zákony, jaké platí např. pro vlnění mechanické.

#### Odraz světla (viz obr. 13.5)

Světelná vlna dopadá na rovinné rozhraní a odráží se zpět. Velikost úhlu odrazu  $\alpha'$  mezi odraženým paprskem a kolmicí k rozhraní se rovná úhlu dopadu  $\alpha$  mezi paprskem dopadajícím a touto kolmicí. Platí

$$\alpha = \alpha' \quad (13.7)$$

Navíc dopadající a odražený paprsek leží v jedné rovině (a i ta je kolmá na rozhraní obou prostředí).

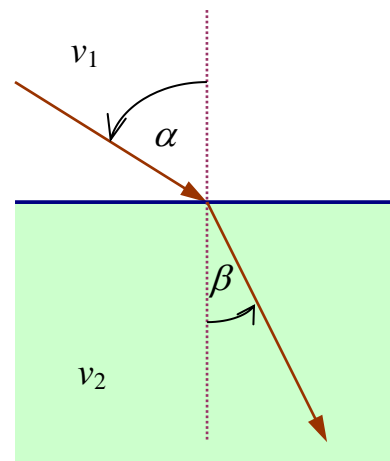


Obr. 13.5 – odraz světla

#### Lom světla (viz obr. 13.6)

Světelná vlna dopadá na rovinné rozhraní dvou různých prostředí a láme se v důsledku rozdílné rychlosti šíření světla v obou prostředích. Předpokládejme, že v prvním prostředí se světlo šíří rychlostí o velikosti  $v_1$ , ve druhém pak rychlostí  $v_2$ . Pro úhly dopadu  $\alpha$  (dopadajícího paprsku) a lomu  $\beta$  (lomeného paprsku), jež opět měříme vzhledem ke kolmici na rozhraní obou prostředí, pak platí zákon lomu ve tvaru

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12} \quad (13.8)$$



Obr. 13.6 – lom světla

Přitom fyzikální veličina označená  $n_{12}$  je tzv. **relativní index lomu** pro daná dvě prostředí. A také v tomto případě platí, že dopadající i lomený paprsek leží v jedné rovině kolmé na rozhraní obou prostředí.

Hodnota indexu lomu logicky vždy závisí na dvojici prostředí, na jejichž rozhraní dochází k tomuto fyzikálnímu jevu. Ve speciálním případě, že prvním prostředím je **vakuum** (z hlediska „**optické**“ hustoty“ se mu svými parametry blíží např. i vzduch) bude rychlost  $v_1 = c \doteq 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Položíme-li formálně  $v_2 = v$ , dostáváme pak tzv. **absolutní index lomu** optického prostředí

$$\boxed{n = \frac{c}{v}} \quad (13.9)$$

Tato fyzikální veličina nemá jednotku, je to „bezrozměrné“ číslo, jehož hodnota je vždy větší než jednička, pouze pro vakuum by muselo platit  $n = 1$  (ale to by pochopitelně nenastával lom světla na rozhraní dvou prostředí). Hodnoty absolutních indexů lomu pro různá prostředí jsou tabelovány.

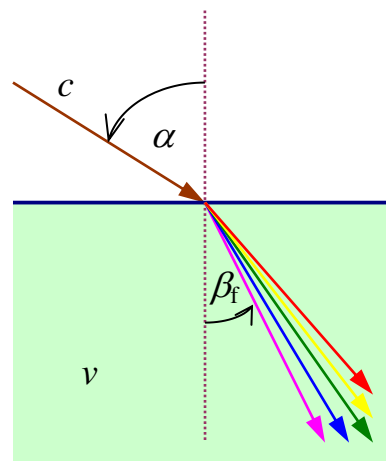
Pomocí absolutního indexu lomu pak můžeme upravit i zákon lomu (13.8). Bude-li absolutní index lomu prvního prostředí  $n_1$ , druhého pak  $n_2$ , dostaneme po krátké úpravě **zákon lomu světla** nazývaný též **Snellův zákon** ve tvaru

$$\boxed{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}} \quad (13.10)$$

### 13.2.3 Disperze světla, rozklad světla v optickém hranolu

**Disperze světla** je přírodní jev spočívající v závislosti rychlosti světla na jeho frekvenci (a tedy i na jeho barvě). Jedině ve vakuu k disperzi světla nedochází, v látkách (v hmotných prostředích) však zpravidla s rostoucí frekvencí rychlost světla klesá  $\rightarrow$  v tom případě se jedná o tzv. **normální disperzi**. V některých případech však může být průběh této závislosti i opačný, pak hovoříme o **disperzi anomální**.

Při normální disperzi tedy musí nutně platit, že s rostoucí frekvencí  $f$  světla vzrůstá i index lomu optického prostředí.



Bude-li dopadat na rovinné rozhraní dvou prostředí (např. vzduch–sklo) bílé světlo, dojde při jeho lomu současně i k rozkladu na jednotlivé spektrální barvy (viz vedlejší obr. 13.7).

Obr. 13.7 - rozklad bílého světla při lomu na rozhraní

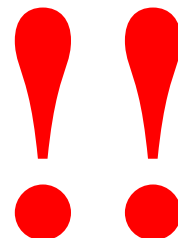


**Červená** barva má nejmenší frekvenci, ve skle ale největší rychlost (a tedy nejmenší index lomu  $n_c$ ), a proto **se láme nejméně**. Lom je výraznější pro žlutou, ještě víc pro zelenou, modrou a **nejvíce se láme světlo fialové** mající největší frekvenci, ale ve skle nejmenší rychlost šíření (a tudíž i největší index lomu  $n_f$ ). V důsledku disperze tak dojde při lomu složeného světla k jeho rozkladu na jednotlivé spektrální barvy.

**Pozn.:** Protože pro velikost rychlosti  $v$  šíření vlnění (a tedy i světla) platí

$$v = \lambda \cdot f \quad , \quad (13.11)$$

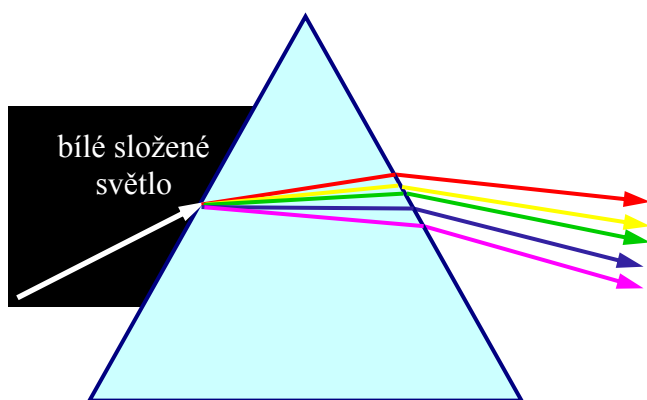
kde  $\lambda$  je jeho vlnová délka a  $f$  příslušná frekvence, musí se při přechodu světla z vakua do opticky hustšího prostředí s poklesem rychlosti současně zkracovat i jeho vlnová délka (frekvence totiž zůstává beze změny !!!). Proto, když říkáme, že světlo dané barvy má určitou vlnovou délku, vztahujeme tento údaj vždy k vakuu.



Rozklad světla můžeme často pozorovat např. na různých skleněných předmětech majících stěny, jež nejsou rovnoběžné. Světlo prochází rozhraními pod různými úhly a při vícenásobném lomu se tento jev snadno projeví. Velmi dobře se dá pozorovat na **optickém hranolu**.

## Rozklad světla na optickém hranolu

Při průchodu světla optickým hranolem dochází ke dvojímu lomu světelného paprsku (viz vedlejší obr. 13.8).



Obr. 13.7 – rozklad světla optickým hranolem

Při jednom lomu totiž není rozklad světla tak výrazný jako při lomu vícenásobném. Jak už bylo řečeno výše, z viditelného oboru (což je světlo o vlnových délkách od 400 nm do 760 nm) se v opticky hustším prostředí láme nejméně (a tedy postupuje nejvyšší rychlostí) červené světlo. Lom u ostatních barev spektra směrem k fialové postupně narůstá, protože rychlost jejich šíření klesá. Bílé světlo se tak optickým hranolem rozloží na spojitě spektrum barev, nazývané **spektrum hranolové**.

## 13.2.4 Interference světla

**Interference světla** je jedním z nejvýraznějších jevů vlnové optiky. Šíří-li se vlnění z různých zdrojů, dochází v místech, ke se setkávají k jejich skládání (interferenci). Přitom musí platit, že výsledný kmit v uvažovaném místě bude dán superpozicí jednotlivých vlnění. Zvláštní případ nastává, když skládaná vlnění mají stejnou frekvenci i stálý fázový rozdíl – taková vlnění pak označujeme jako **koherentní**.

Interferencí dvou koherentních vlnění vždy vzniká vlnění stejného charakteru (např. jsou-li skládaná vlnění harmonická, bude i výsledné vlnění harmonické) a hlavně i **stejně frekvence !!!** Amplituda výsledného vlnění však bude záviset na **dráhovém rozdílu**  $\Delta s$  skládaných vlnění. A tady platí následující pravidla:

→ **1.** Je-li tento dráhový rozdíl nulový nebo je-li roven sudému počtu půlvln (resp. celistvému násobku vlnové délky  $\lambda$ ), bude amplituda výsledného vlnění v příslušném místě maximální a nastává tzv. **interferenční maximum**. Platí

$$\Delta s = k \cdot \lambda \quad . \quad (13.12)$$

→ **2.** Je-li ovšem dráhový rozdíl roven lichému počtu půlvln, bude amplituda výsledného vlnění v příslušném místě minimální a nastává tzv. **interferenční minimum**. Musí tedy platit

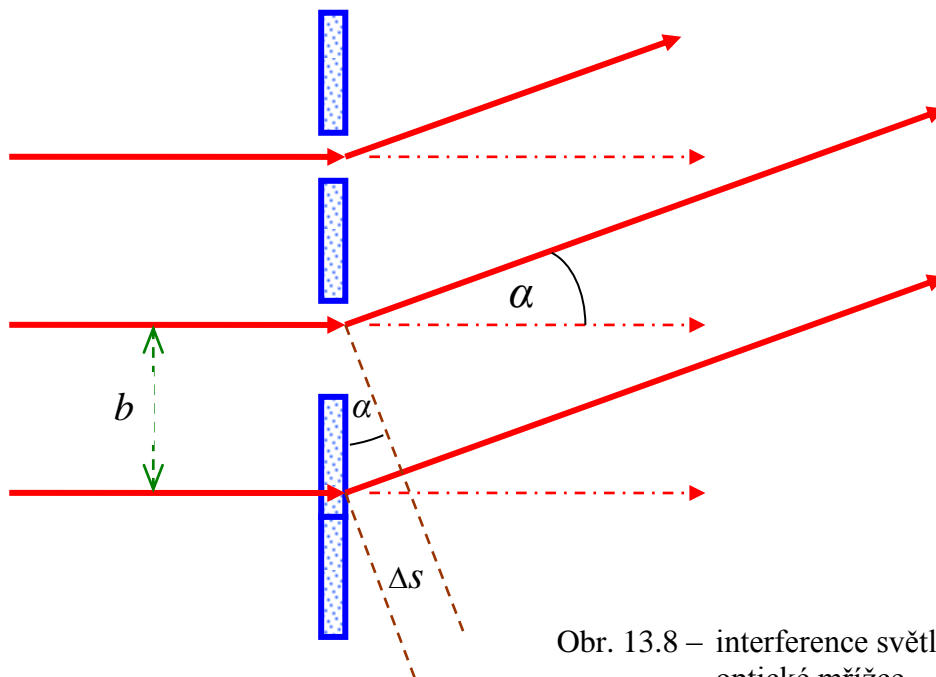
$$\Delta s = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad . \quad (13.13)$$

V případě světla se koherence světelných paprsků dosáhne nejlépe tak, že se světlo z jednoho zdroje rozdělí na dva nebo více paprsků, jež se po proběhnutí různé dráhy setkají s určitým dráhovým rozdílem  $\Delta s$ . Typickým příkladem je ohyb a následná interference světla na optické mřížce.

## 13.2.5 Optická mřížka

Optickou mřížku tvoří soustava neprůhledných rovnoběžných čar vytvořených na průhledné podložce a umístěných navzájem ve stejných vzdálenostech. Charakteristickou veličinou pro každou mřížku je tzv. **mřížková konstanta**  $b$ , jež udává součet šířky průhledné a neprůhledné oblasti (viz obr. 13.8 na následující straně). Její převrácená hodnota  $1/b$  pak udává počet čar (resp. počet průhledných štěrbin) na jednotku délky. Optické mřížky mají na 1 mm délky až několik set štěrbin.

Dopadá-li rovinná světelná vlna na optickou mřížku, stává se podle Huygensova principu každá průhledná oblast zdrojem vlnění, jež postupuje dále i do oblasti geometrického stínu. Protože vlnění v jednotlivých štěrbinách jsou důsledkem jednoho dopadajícího, budou nutně vlnění vycházející z těchto štěrbin navzájem koherentní. Tato koherentní vlnění pak postupují od štěrbin všemi směry – nastává přitom ohyb světla a současně i jeho interference.



Obr. 13.8 – interference světla na optické mřížce

Předpokládejme, že světelná vlna dopadá na optickou mřížku kolmo. Potom vlnění, jež se šíří ze štěrbin původním směrem, nebudou mít mezi sebou žádný dráhový rozdíl a po dopadu na stínítko se setkávají ve fázi a budou se zesilovat – vzniká tzv. **maximum nultého řádu**..

Uvažujme dále vlnění, jež se budou šířit za štěrbinou ve směru odchýleném od původního přímého směru o určitý úhel  $\alpha$ . Mezi „sousedními“ vlněními vycházejícími ze dvou štěrbin navzájem vzdálených právě o  $b$  vzniká dráhový rozdíl (viz obr. 13.8)

$$\Delta s = b \cdot \sin \alpha \quad . \quad (13.14)$$

Světlo odchýlené o úhel  $\alpha$  od přímého směru se bude zesilovat právě tehdy, když uvedený dráhový rozdíl  $\Delta s$  interferujících vlnění bude roven celistvým násobkům vlnové délky  $\lambda$ , neboli když bude platit

$$b \cdot \sin \alpha = k \cdot \lambda \quad , \quad \text{kde } k = 0, 1, 2, \dots \quad . \quad (13.15)$$

Číslo  $k$  pak udává **řád maxima**, jež přísluší jistému úhlu  $\alpha$ . Ve směrech, pro něž se dráhový rozdíl dvou „sousedních“ vlnění rovná lichému počtu půlvln  $\lambda / 2$ , vzniká na stínítku interferencí tmavý proužek (tedy interferenční minimum).

Bude-li na optickou mřížku dopadat monofrekvenční světlo, budeme pozorovat na stínítku za mřížkou následující interferenční obrazec: uprostřed se vytvoří nejintenzivnější světlý pruh a po obou jeho stranách jsou symetricky rozloženy ostré světelné pruhy, mezi nimiž jsou široké tmavé pruhy.

Při osvětlení mřížky bílým světlem vzniká uprostřed bílý pruh a po stranách široké spektrální pruhy – tzv. **mřížková spektra**. Čím je počet štěrbin připadajících na 1 mm větší, tím je ohybový obrazec nejen intenzivnější, ale má i užší maxima. Od původního směru šíření vlnění je přitom nejvíce odchýleno červené světlo, nejméně pak světlo fialové. Protože  $\lambda_{\zeta} > \lambda_{\text{f}}$ , vyplývá z rovnice (13.15), že  $\alpha_{\zeta} > \alpha_{\text{f}}$ .

Optickou mřížku s velkým počtem štěrbin  $1/b$  připadajících na 1 mm (400 i více) můžeme dobře použít na přesné měření vlnové délky světla. Uplatňuje se též ve spektroskopii při zjišťování chemického složení látek.

## 13.3 KVANTOVÉ VLASTNOSTI OPTICKÉHO ZÁŘENÍ

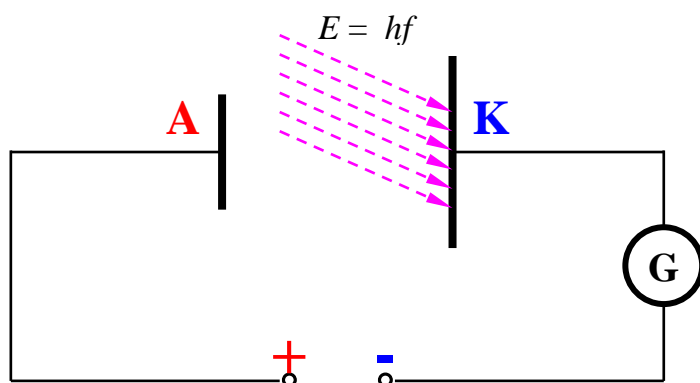
### 13.3.1 Fotoelektrický jev

**Fotoelektrický jev** patří k nejdůležitějším jevům kvantové optiky – je důkazem kvantové povahy elektromagnetického záření. Tento jev nastává při vzájemném působení (interakci) fotonů elektromagnetického záření a látky, při němž je energie fotonů předávána elektronům v látce. Pozorujeme jej zejména u látek pevných (u kovů a polovodičů) a podle jeho podstaty rozlišujeme vnitřní a vnější fotoelektrický jev.

**Vnitřní fotoelektrický jev** je typický pro polovodiče a dielektrika. Působením dopadajícího elektromagnetického záření se **uvnitř** těchto látek uvolňují elektrony, dochází ke generaci párů elektron–díra a ke zvýšení vodivosti daného materiálu (tzv. **fotovodivost**).

Při **vnějším fotoelektrickém jevu** dojde k tomu, že elektrony v látce (obvykle v kovu) získají působením dopadajícího elektromagnetického takovou energii, že **látku úplně opustí** a pohybují se v okolním prostředí nebo vakuu. Nastává **fotoemise elektronů**.

Vnější fotoelektrický jev byl objeven koncem 18. století. Princip experimentálního studia tohoto jevu je patrný z připojeného obr. 13.8.



Obr. 13.9 – k vnějšimu fotoelektrickému jevu

Záporná katoda **K** je ozařována zdrojem světla o jisté frekvenci  $f$ . Po dopadu záření na katodu se z ní uvolňují elektrony (**fotoelektrony**), jež jsou přitahovány ke kladné anodě **A**, a obvodem začne procházet proud registrovaný galvanometrem **G**.

## Zákony vnějšího fotoelektrického jevu:

- 1) Pro každý materiál existuje jistá **mezní frekvence**  $f_m$  záření, při níž se ještě z materiálu uvolňují elektrony. Jestliže je frekvence  $f$  dopadajícího záření menší než frekvence mezní ( $f < f_m$ ), fotoelektrický jev nenastává.
- 2) Velikost fotoproudu (počet uvolněných elektronů) je úměrná intenzitě dopadajícího záření.
- 3) Energie fotoelektronů je přímo úměrná frekvenci záření a nezávislá na jeho intenzitě.

Tyto zákony vyložil roku 1905 Albert Einstein na základě Planckovy teorie záření. Za objasnění teorie fotoelektrického jevu pak obdržel v roce 1921 Nobelovu cenu.

## Einsteinův zákon pro vnější fotoelektrický jev:

Maximální kinetická energie elektronu uvolněného při vnějším fotoelektrickém jevu je rovna rozdílu energie fotonu dopadajícího záření a výstupní práce elektronu.

Tento zákon pak vyjadřuje **Einsteinova rovnice** vnějšího fotoelektrického jevu

$$\frac{1}{2} m v^2 = h f - W_v \quad , \quad (13.16)$$

kde  $m$  je hmotnost elektronu,  $v$  maximální rychlost elektronu emitovaného z látky,  $h$  Planckova konstanta ( $h \doteq 6,626 \cdot 10^{-34}$  J.s),  $f$  frekvence dopadajícího záření a  $W_v$  výstupní práce elektronu z daného materiálu. Součin  $h \cdot f$  v Einsteinově rovnici (13.16) přitom představuje právě energii dopadajícího fotonu (kvanta světelného záření).

**Výstupní práce**  $W_v$  je fyzikální veličina, jež udává práci potřebnou na uvolnění elektronu z příslušného materiálu (kovu). Je tím větší, čím pevněji je elektron vázán ve struktuře kovu. Nejmenší hodnoty výstupních prací mají alkalické kovy (to si můžete ověřit ve fyzikálních tabulkách). V kvantové a atomové fyzice se obvykle energie uvádějí v jednotkách **elektronvolt** (eV). Je to energie, kterou získá částice s elementárním nábojem ( $e \doteq 1,602 \cdot 10^{-19}$  C) při přechodu mezi místy s potenciálovým rozdílem 1 V. Musí platit

$$1 \text{ eV} \doteq 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad . \quad (13.17)$$

Ve speciálním případě, kdy ještě dochází k fotoefektu, je energie dopadajícího záření právě rovna výstupní práci elektronu z kovu. Elektron vystupuje z materiálu s nulovou kinetickou energií. Platí

$$h f_m = W_v \quad . \quad (13.18)$$

Pro **mezní vlnovou délku**  $\lambda_m$  fotoemise, jež je vlastně největší vlnovou délkou dopadajícího elektromagnetického záření, při níž ještě k jevu dochází, pak dostáváme vztah

$$\lambda_m = \frac{c}{f_m} = \frac{c \cdot h}{W_v} \quad , \quad (13.19)$$

kde  $c$  je rychlost světla ve vakuu.

**Pozn.:** Vnější fotoelektrický jev lze pozorovat při použití viditelného světla jen u těch materiálů, jejichž výstupní práce  $W_v$  je maximálně 3,1 eV, což odpovídá mezní vlnové délce z modrého okraje viditelného spektra ( $\lambda_m = 400$  nm). Při vyšší hodnotě výstupní práce  $W_v$  je tento jev pozorovatelný pouze při ozáření látky ultrafialovým zářením.