UNIVERZITA PARDUBICE

FAKULTA CHEMICKO-TECHNOLOGICKÁ

Ústav aplikované fyziky a matematiky

F Y Z I K A I

pro technické obory

Dopravní fakulty Jana Pernera

(PF1PP, PF1PK)

RNDr. Jan Z a j í c , CSc.

Pardubice 2013

O b s a h :

1. ÚVOD 5

1.1 Fyzikální veličiny a jejich jednotky 5
1.1.1 Přírodní jev a fyzikální veličina 5
1.1.2 Skalární a vektorové fyzikální veličiny 8
1.1.3 Základní matematické operace s vektorovými fyzikálními veličinami 10
a) Sčítání dvou vektorových veličin 10
b) Násobení vektorových veličin 12
1.2 Role matematiky ve fyzice 17
1.2.1 Konstanta a proměnná 17
1.2.2 Stručně k významu derivace 18
1.2.3 Stručně k významu integrálu 19

2. MECHANIKA HMOTNÝCH BODŮ 21

2.1 Kinematika pohybu hmotného bodu 23
2.1.1 Poloha, trajektorie a dráha hmotného bodu 23
2.1.2 Rychlost pohybu hmotného bodu 25
2.1.3 Zrychlení pohybu hmotného bodu 27
2.1.4 Klasifikace pohybů 31
2.1.5 Přímočaré pohyby 32
a) Pohyb rovnoměrný přímočarý 33
b) Pohyb přímočarý rovnoměrně zrychlený 36
2.1.6 Pohyby křivočaré 40
a) Pohyb rovnoměrný křivočarý 40
b) Pohyb křivočarý rovnoměrně zrychlený 41
2.1.7 Složené pohyby 43
2.1.8 Pohyby v homogenním tíhovém poli Země 43
a) Volný pád 44
b) Vrh svislý vzhůru 45
c) Vodorovný vrh 47
d) Vrh šikmý vzhůru 48
e) Obecné řešení pohybů v homogenním tíhovém poli Země 49

2.2 Dynamika pohybu hmotného bodu 54
2.2.1 Vzájemné působení mezi tělesy 54
2.2.2 Newtonovy pohybové zákony 55
2.2.3 Aplikace Newtonových pohybových zákonů 60
2.2.4 Impulz síly 67
2.2.5 Mechanická práce a výkon 68
2.2.6 Energie hmotného bodu, zákon zachování mechanické energie 72
2.2.7 Inerciální a neinerciální vztažné soustavy, síla setrvačná 77

3. MECHANIKA SOUSTAV HMOTNÝCH BODŮ 80

3.1. Síly působící na soustavu hmotných bodů 80
3.2 Změna hybnosti soustavy hmotných bodů; zákon zachování hybnosti 81
3.3 Centrální ráz dvou těles 82
3.4 Hmotný střed soustavy 87
3.5 Moment hybnosti a moment síly 88
3.6 Pohybová rovnice rotačního pohybu 95
3.7 Zákon zachování momentu hybnosti 96

4. MECHANIKA TĚLES 98

4.1 Mechanika tuhých těles 98
4.1.1 Tuhé těleso a jeho pohyb 98
4.1.2 Pohyb hmotného bodu po kružnici; zavedení úhlových veličin 99
4.1.3 Skládání a rozklad sil působících na tuhé těleso 104
4.1.4 Pohybové rovnice tuhého tělesa; moment hybnosti tuhého tělesa 112
4.1.5 Moment setrvačnosti tuhého tělesa vzhledem k dané rotační ose 114
4.1.6 Závěry vyplývající z pohybové rovnice rotačního pohybu tuhého tělesa 118
a) Rovnoměrný otáčivý pohyb tuhého tělesa 120
b) Rovnoměrně zrychlený otáčivý pohyb tuhého tělesa 120
4.1.7 Práce při otáčivém pohybu 122
4.1.8 Energie rotujícího tělesa 124
4.1.9 Kyvadlo 129

4.2 Mechanika pružných těles 132
4.2.1 Deformace tělesa 132
4.2.2 Základní typy deformací těles 133
4.2.3 Hookův zákon 135
4.2.4 Průběh deformace, deformační křivka 137

5. GRAVITAČNÍ POLE 139

5.1 Fyzikální pole – základní charakteristika a popis 139
5.2 Gravitační síla, intenzita gravitačního pole 140
5.3 Keplerovy zákony a Newtonův gravitační zákon 143
5.4 Gravitační pole hmotného bodu a kulového tělesa 147
5.5 Gravitační síla a síla tíhová 149
5.6 Práce v radiálním gravitačním poli;
potenciální energie hmotného objektu v radiálním gravitačním poli 150
5.7 Pohyby těles v radiálním gravitačním poli 152
5.7.1 Volný pád 152
5.7.2 Vrh svislý vzhůru 153
5.7.3 Pohyby oběžnic kolem centrálního tělesa 155

6. ELEKTRICKÉ POLE 158
6.1 Úvod 158
6.2 Elektrické pole ve vakuu 158
6.2.1 Elektrická síla, intenzita elektrického pole 158
6.2.2 Coulombův zákon 162
6.2.3 Gaussova věta 165
6.2.4 Práce konaná v elektrickém poli, potenciál elektrického pole, napětí 170
6.3 Elektrické pole v látkách 178
6.3.1 Vodiče a nevodiče 178
6.3.2 Pevný kovový vodič ve vnějším elektrickém poli 180
6.3.3 Elektrické pole v okolí nabitého kovového vodiče 181
6.3.4 Kapacita vodiče, kondenzátory 182
6.3.5 Dielektrikum v elektrickém poli, polarizace dielektrika 187
6.3.6 Energie elektrického pole 190

7. USTÁLENÝ ELEKTRICKÝ PROUD 194
7.1 Základní pojmy 194
7.2 Elektrický proud v kovech 196
7.2.1 Vznik elektrického proudu v pevném kovovém vodiči 196
7.2.2 Elektrický odpor látky, Ohmův zákon 198
7.2.3 Spojování odporů 201
7.2.4 Práce a výkon elektrického proudu 202
7.2.5 Uzavřený elektrický obvod 204
7.2.6 Kirchhoffovy zákony 208
7.3 Elektrický proud v polovodičích 212
7.3.1 Charakteristika vlastních polovodičů 212
7.3.2 Příměsová vodivost polovodičů 213
7.3.3 Teplotní závislost vodivosti polovodičů 214
7.3.4 P-N přechod 217
7.3.5 Fyzikální princip tranzistoru 219

© RNDr. Jan Z a j í c , CSc., 2013

1. Ú V O D

1.1 Fyzikální veličiny a jejich jednotky

1.1.1 Přírodní jev a fyzikální veličina

Fyzika je přírodní vědou, jež zkoumá nejjednodušší, ale současně i nejobecnější zákonitosti **přírodních jevů**, stavbu a vlastnosti hmoty a zákony jejího pohybu. Při tomto zkoumání zjišťujeme, že studované objekty mají určité charakteristiky (vlastnosti), že se nacházejí v jistých stavech a že mezi nimi probíhají nejrůznější děje. K vystižení těchto skutečností nám slouží **fyzikální veličiny**.

Jestliže chceme zdárně proniknout do tajů fyziky, musíme v první řadě pochopit podstatu daného přírodního jevu. A teprve poté přistoupíme k definici příslušné fyzikální veličiny, která tento jev jednoznačně charakterizuje. !!

Např.: **1)** Velice často se setkáváme s **jevem**, kdy jeden hmotný objekt nějakým způsobem ovlivňuje jiný hmotný objekt – uvádí jej do pohybu, brzdí jej, mění směr jeho pohybu, mění jeho polohu nad zemským povrchem, deformuje jej, apod. Tyto nejrůznější případy vzájemného působení mezi hmotnými objekty pak charakterizuje **fyzikální veličina síla**.

2) Dobře známe a často i využíváme **jev**, kdy dochází k uspořádanému pohybu nabitých objektů – elektronů v kovech, iontů v elektrolytech, svazku nabitých částic ve vakuu, ale např. i elektronů kolem jádra vlastního atomu. A opět všechny takové případy, ať už je příčina jejich vzniku jakákoli, jednoznačně charakterizuje **fyzikální veličina elektrický proud**.

Lze tedy říci, že **fyzikální veličina** je určitý přesně vymezený pojem (většinou to bývá jedno či dvě slova), jímž lze jednoduše kvalitativně i kvantitativně popsat příslušné fyzikální jevy, t.j. vlastnosti, stavy a změny hmotných objektů či soustav hmotných objektů.

Pamatujte si, že každá fyzikální veličina má přiřazenou určitou smluvenou **značku** (symbol), v tištěné literatuře psaný *kurzívou* **!!!**, např. pro hmotnost používáme písmeno m, pro čas t, pro sílu $\boldsymbol{F}$, pro elektrický proud I. Toto značení je bezpodmínečně nutné dodržovat.

Kvantitativní **hodnotu fyzikální veličiny** (její „číselnou velikost“) určujeme měřením, t.j. porovnáváním s určitou předem dohodnutou fyzikální veličinou téhož druhu, jež byla zvolena za **měřící jednotku**. Měřící jednotka má definovaný název, hodnotu a také příslušnou značku (např. ampér A) – v tištěné literatuře se pro rozlišení jednotek a veličin používá u označení jednotek obyčejné písmo !!!

Formálně se pro měřící jednotku používá označení $[X]$, např. zápis $[I] = \mathrm{A}$ čteme:

„Jednotkou veličiny elektrický proud je ampér“.

Číselná hodnota dané **veličiny** nám přitom udává, kolikrát je hodnota měřené veličiny větší než zvolená měřící jednotka. Např. zjistíme-li při vážení určitého tělesa, že jeho hmotnost je 3,6 krát větší než je hmotnost jednoho kilogramu, je číselná hodnota veličiny vyjadřující hmotnost našeho tělesa 3,6. Výsledek měření pak lze zapsat ve tvaru

$$m = 3{,}6\ \mathrm{kg} \quad .$$

POZOR !!! Je třeba mít na paměti, že při změně měřící jednotky se vždy změní též číselná hodnota měřené veličiny (např. uvedenou hmotnost $m = 3{,}6$ kg můžeme vyjádřit také jako $m = 3\,600$ g , apod.).

Obecně se pro číselnou hodnotu libovolné fyzikální veličiny používá formální zápis $\{X\}$. Hodnota fyzikální veličiny je tedy vždy určena číselnou hodnotou a příslušnou měřící jednotkou, což lze formálně zapsat v následujícím tvaru

$$X = \{X\} \cdot [X]$$

hodnota fyzikální veličiny = číselná hodnota . měřící jednotka

Všechny fyzikální veličiny a jednotky tvoří vždy ucelený systém. Při jeho tvorbě se pokaždé postupuje tak, že se zvolí jistý počet **základních veličin** (jež nemusí být přitom nutně nezávislé) a jim příslušejících **základních jednotek**. Všechny ostatní veličiny se potom definují na základě vztahů z veličin základních.

My budeme ve fyzice zásadně používat **Mezinárodní soustavu jednotek SI** – tu tvoří:

→ ***sedm základních jednotek*** (jež odpovídají sedmi základním fyzikálním veličinám)

Základní veličiny a jednotky Mezinárodní soustavy SI jsou uvedeny v tabulce na následující straně:

Základní veličina	Značka	Základní jednotka	Značka
délka	ℓ	metr	m
hmotnost	m	kilogram	kg
čas	t	sekunda	s
elektrický proud	I	ampér	A
termodynamická teplota	T	kelvin	K
látkové množství	n	mol	mol
svítivost	I	kandela	cd

→ *odvozené jednotky*

Odvozené jednotky získáme ze základních pomocí definičních vztahů odpovídajících veličin. Například velikost rychlosti rovnoměrného pohybu je definována vztahem

$$v = \frac{s}{t} \quad ,$$

kde s je dráha uražená za čas t trvání pohybu. Jelikož jednotkou dráhy je metr (m) a jednotkou času sekunda (s), je jednotkou rychlosti ***metr za sekundu***

$$[v] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{m.s^{-1}}.$$

Některé odvozené jednotky mají své vlastní názvy, např. jednotka síly $[F]$ = kg.m.s^{-2} se nazývá ***newton*** (N).

→ *násobky a díly jednotek*

Násobky a díly jednotek se tvoří ze základních a odvozených pomocí mocnin deseti. Jejich názvy se pak skládají z příslušné normalizované předpony a názvu jednotky. Přehled těchto předpon je vypsán v následující tabulce.

Předpona	exa–	peta–	tera–	giga–	mega-	kilo–	mili–	mikro-	nano–	piko–	femto-	atto–
Značka	E	P	T	G	M	k	m	μ	n	p	f	a
Mocnina	10^{18}	10^{15}	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}

→ *jednotky vedlejší*

Kromě uvedených skupin fyzikálních jednotek lze z ryze praktických důvodů používat i tzv. ***vedlejší jednotky***. Těmi jsou např. pro čas minuta (min), hodina (hod), den (d) a rok (r), pro hmotnost tuna (t), pro objem litr (ℓ), pro energii elektronvolt (eV), do této skupiny pak patří i jednotky pro úhel – úhlový stupeň (^{o}), úhlová minuta ($'$), úhlová vteřina ($''$), ale i celá řada dalších fyzikálních jednotek.

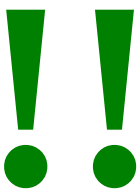
1.1.2 Skalární a vektorové fyzikální veličiny

Fyzikální veličiny mohou být různého druhu a mají i různě složitý obsah podle toho jaké jevy charakterizují. Obvykle se ve fyzice používá tradičního rozdělení fyzikálních veličin do dvou základních skupin – rozlišujeme tak ***skalární*** a ***vektorové*** fyzikální veličiny.

Skalární fyzikální veličiny (stručně **skaláry**) bývají jednodušší. K jejich jednoznačnému určení stačí zadat číselnou hodnotu a příslušnou měřící jednotku (do této skupiny patří například hmotnost m, čas t, dráha s, průměrná rychlost v_p, objem V, hustota ρ, práce W, teplota T, teplo Q, energie E, elektrický proud I, elektrický náboj q, kapacita vodiče C, elektrické napětí U a celá řada dalších).

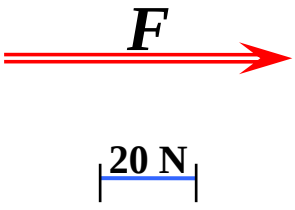
Vektorová fyzikální veličina (stručně **vektor**) je složitější, protože v sobě obsahuje několik informací najednou. U veličiny tohoto druhu pak nestačí k jejímu úplnému určení pouhá znalost její velikosti daná číselnou hodnotou a příslušnou měřící jednotkou, ale v případě, že je tato velikost nenulová, je stejně důležitý i její směr (u mnohých vektorů je to dokonce parametr nejpodstatnější) a u tzv. vázaných vektorů musíme též znát působiště vektorové veličiny. Příkladem vázaných vektorů jsou např.okamžitá rychlost $\boldsymbol{v}$, síla $\boldsymbol{F}$, moment síly $\boldsymbol{M}$, okamžité zrychlení $\boldsymbol{a}$, intenzita elektrického pole $\boldsymbol{E}$, hustota elektrického proudu $\boldsymbol{J}$, indukce magnetického pole $\boldsymbol{B}$ a mnohé další.

Pro označení vektorových fyzikálních veličin se používá smluvených symbolů. V tištěné literatuře obvykle bývá zápis vektoru proveden tučnou kurzívou (například síla $\boldsymbol{F}$), při psaní v sešitě nebo na tabuli pak vektor charakterizuje šipka nad značkou příslušné veličiny (síla $\vec{F}$).



Geometrická interpretace vektoru je velice názorná. Fyzikální veličinu tohoto typu znázorňujeme vždy jako orientovanou úsečku, jejíž délka odpovídá velikosti vektoru, počáteční bod orientované úsečky bývá působištěm veličiny a orientace úsečky je shodná se směrem vektoru (viz vedlejší obrázek 1.1). Samotnou velikost vektoru pak obvykle zapisujeme buď obyčejnou kurzívou, nebo pro zvýraznění používáme symbolu absolutní hodnoty

$$F = |\boldsymbol{F}| = |\vec{F}| = 60\ \mathrm{N} \quad .$$

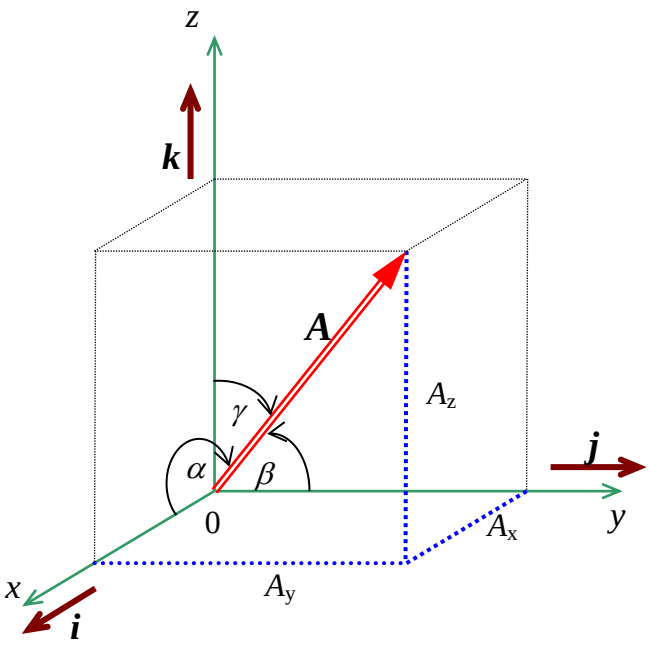


Obr. 1.1: Geometrické znázornění vektorové veličiny

Kromě geometrické interpretace lze také vektorovou fyzikální veličinu formálně vyjádřit algebraickým zápisem pomocí jejích **složek** (neboli **souřadnic**) v určitém souřadnicovém systému – viz vedlejší obr. 1.2.

Vektor $\boldsymbol{A}$ je v trojrozměrném prostoru vždy jednoznačně určen trojicí souřadnic A_x, A_y, A_z. Pomocí nich lze pak velice snadno určit jeho ***velikost*** jako

$$A = |\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2} + A_z^{\,2}} \quad . \quad (1.1)$$



Obr. 1.2 – vektor a jeho souřadnice

Vystihnout ***směr*** vektoru $\boldsymbol{A}$ lze například pomocí tří úhlů α, β a γ, jež vektor $\boldsymbol{A}$ svírá s kladnými částmi souřadnicových os. Platí

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A}$$
$$\cos\beta = \frac{A_y}{A} \quad (1.2)$$
$$\cos\gamma = \frac{A_z}{A} \quad .$$

Formální zápis vektoru lze pak provést několika navzájem ekvivalentními způsoby, jež vycházejí i z výše uvedených vztahů (1.1) a (1.2), např.

$$\boldsymbol{A} = (A_x ; A_y ; A_z) = |\boldsymbol{A}| . (\cos\alpha ; \cos\beta ; \cos\gamma) \quad . \quad (1.3)$$

Běžný je také zápis využívající jednotkové vektory ve směru souřadnicových os – tzv. **jednotkové směrové vektory** $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$. Vektor $\boldsymbol{A}$ pak jednoznačně charakterizuje výraz

$$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k} \quad . \quad (1.4)$$

Zatímco pro skalární fyzikální veličiny platí při počítání běžná pravidla známá z algebry reálných čísel (**POZOR**, s tou zásadní výjimkou, že **sčítat lze jen stejné veličiny vyjádřené navíc naprosto shodnou fyzikální jednotkou !!!**), při počítání s vektory je třeba respektovat pravidla **algebry vektorové**.

V následujícím výkladu se zaměříme na dvě nejběžnější matematické operace, s nimiž se budeme nejčastěji v našem dalším fyzikálním výkladu setkávat – na sčítání vektorových veličin a na násobení vektorových veličin.

1.1.3 Základní matematické operace s vektorovými fyzikálními veličinami

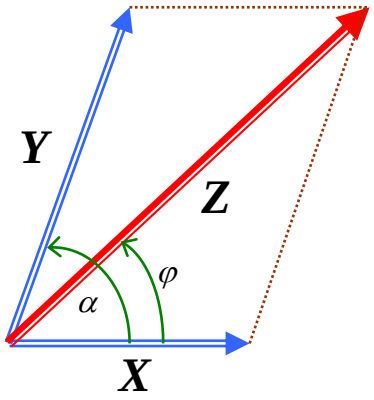
a) Sčítání dvou vektorových veličin

I u vektorových fyzikálních veličin jednoznačně platí pravidlo, že sčítat lze vždy jen veličiny stejného druhu měřené stejnou jednotkou (sčítat můžeme např. dvě nebo více sil, dvě nebo více rychlostí, nelze ale v žádném případě sčítat sílu a rychlost !!!).

Grafický obraz součtu dvou vektorů je dán tzv. ***vektorovým rovnoběžníkem*** (viz následující obr. 1.3). Výsledný vektor

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}$$

je vždy **orientovanou úhlopříčkou** v tomto rovnoběžníku.



Obr. 1.3 – sčítání dvou vektorů

Výsledek vektorového sčítání (t.j. velikost a směr výsledného vektoru) závisí vždy na velikostech obou skládaných vektorů, ale také na úhlu, jenž spolu svírají.

Obecně nám číselný výsledek této operace dávají věty kosinová a sinová aplikované na vektorový rovnoběžník:

$$Z = |\boldsymbol{Z}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + 2.X.Y.\cos\alpha}$$

$$\sin\varphi = \frac{Y}{Z}.\sin\alpha \qquad . \quad (1.5)$$

Máme-li oba sčítané vektory vyjádřené ve složkách, je tato matematická operace naprosto triviální. Platí totiž, že

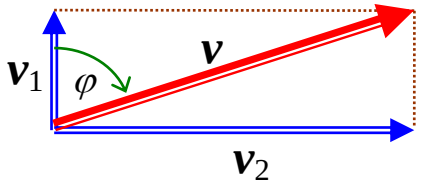
$$\boldsymbol{Z} = (Z_x ; Z_y ; Z_z) = (X_x + Y_x ; X_y + Y_y ; X_z + Y_z) \quad , \qquad (1.6)$$

neboli provádíme **sčítání po složkách**.

Sčítání dvou vektorových veličin se podstatně zjednoduší, leží-li oba vektory v téže vektorové přímce; v takovém případě se u souhlasně orientovaných vektorů jejich velikosti sečtou a směr výsledného bude stejný, u opačných vektorů se jejich velikosti odečtou a směr výsledného vektoru bude souhlasný se směrem většího z nich. Poměrně snadno lze získat i výsledek vektorového součtu v případě, kdy skládáme dva navzájem kolmé vektory – zde nám stačí při výpočtu aplikovat Pythagorovu větu a znát základní goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku, jak dokládají i dva příklady na následující straně.

Příklad 1):
Plavec plave kolmo ke směru proudu řeky rychlostí 1,2 m.s^{-1}, rychlost proudu je 3,5 m.s^{-1}. Jaká je výsledná rychlost plavce v řece?

Jelikož jsou obě rychlosti na sebe navzájem kolmé, bude velikost výsledné rychlosti v plavce rovna délce přepony pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny mají velikosti rychlostí v_1 a v_2.



Podle Pythagorovy věty dostáváme

$$v = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2} \doteq 3{,}7 \text{ m.s}^{-1} \ .$$

Směr výsledné rychlosti je např. dán úhlem φ:

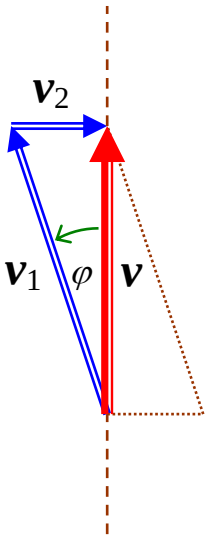
$$\text{tg } \varphi = \frac{v_2}{v_1} \doteq 2{,}917 \quad \Rightarrow \quad \varphi \doteq 71{,}08\ ^{\circ} \ .$$

Výsledná rychlost plavce má velikost 3,7 m.s^{-1} a její směr svírá s rychlostí $\boldsymbol{v}_1$ úhel přibližně 71 °.

Pozn.: Celou úlohu bychom mohli snadno vyřešit i graficky „bez počítání“ pouhým přiložením pravítka a úhloměru k výše uvedenému obrázku. Základní podmínkou ovšem je, že délky orientovaných úseček ve vektorovém rovnoběžníku (resp. v našem případě obdélníku) musí být ve stejném poměru, jako jsou velikosti skládaných rychlostí.

Příklad 2):
Rychlost motorového člunu v klidné vodě má velikost 12 m.s^{-1}, rychlost říčního proudu má velikost 4 m.s^{-1}. Pod jakým úhlem musí mířit podélná osa člunu proti proudu, aby člun přistál u protějšího břehu přesně naproti místu, z něhož vyplul? Jak dlouho mu bude plavba trvat, je-li řeka široká 200 metrů?

V tomto případě obě skládané rychlosti $\boldsymbol{v}_1$ člunu a $\boldsymbol{v}_2$ říčního proudu na sebe navzájem kolmé nejsou. Ale skutečná rychlost $\boldsymbol{v}$ člunu vůči břehům řeky, jež je výsledkem součtu (skládání) obou rychlostí, musí mířit kolmo k protějšímu břehu, a tedy i kolmo k rychlosti $\boldsymbol{v}_2$ říčního proudu. Její velikost v tak opět určíme pomocí Pythagorovy věty. V tomto případě platí



$$v = \sqrt{{v_1}^2 - {v_2}^2} \doteq 11{,}3 \text{ m.s}^{-1} \ .$$

Při této výsledné rychlosti bude přeplavba řeky trvat

$$t = \frac{s}{v} = \frac{200 \text{ m}}{11{,}3 \text{ m.s}^{-1}} \doteq 18 \text{ s} \ .$$

Podélná osa člunu má přitom směr totožný s vektorem rychlosti $\boldsymbol{v_1}$, a tak hledaný úhel φ určíme snadno např. pomocí

$$\sin \varphi = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi \doteq 19{,}5^{\,o} \quad .$$

Podélná osa člunu musí být odkloněna proti proudu přibližně o úhel 19,5 °, cesta na protější břeh přitom člunu potrvá přibližně 18 s.

Pozn.: Samozřejmě, že i tuto úlohu bychom mohli vyřešit graficky pomocí pravítka a úhloměru. Uvědomte si ale, že na rozdíl od předcházejícího příkladu, má tato úloha řešení pouze v případě, že bude rychlost v_1 člunu větší než rychlost v_2 říčního proudu. Kdyby tato podmínka splněna nebyla, nikdy by člun nemohl přistát u protějšího břehu přesně naproti místu, z něhož vyplul. Pro ty z vás, kteří dávají přednost matematickému důkazu, se stačí podívat na vztahy

$$v = \sqrt{{v_1}^2 - {v_2}^2} \quad \text{a} \quad \sin \varphi = \frac{v_2}{v_1}$$

a uvědomit si, kdy dávají po dosazení obou rychlostí smysl.

* * *

b) Násobení vektorových veličin

Ve fyzice se setkáte u vektorových veličin nejčastěji s trojím typem násobení, jež pokaždé odpovídá tomu, jaký je charakter násobených fyzikálních veličin a jaký je charakter veličiny výsledné. Rozlišujeme tak:

- → násobení vektoru skalárem,
- → skalární součin dvou vektorových veličin,
- → vektorový součin dvou vektorových veličin.

Nejprve se zaměříme na první (a nejjednodušší) z nich, na **násobení vektoru reálným číslem** (tedy **skalárem)** různým od nuly. Znalost této operace budeme potřebovat při našem dalším výkladu prakticky všude. Platí, že

$$\boxed{\boldsymbol{Y} = k \,.\, \boldsymbol{X}} \quad , \qquad (1.7)$$

případně po rozpisu vektorů do složek

$$\boxed{\boldsymbol{Y} = (Y_x\,;\, Y_y\,;\, Y_z) = (k \,.\, X_x\,;\; k \,.\, X_y\,;\; k \,.\, X_z)} \quad , \qquad (1.8)$$

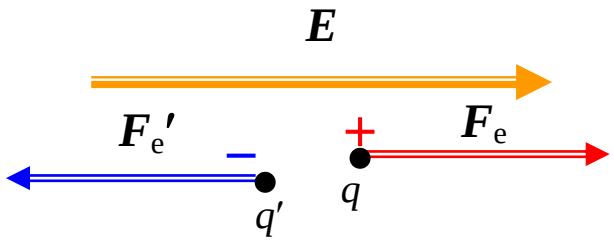
Výsledek této operace je opět vektorová veličina $\boldsymbol{Y}$, jejíž velikost je k-násobkem původního vektoru $\boldsymbol{X}$. Je-li přitom číslo k kladné, je výsledný vektor $\boldsymbol{Y}$ stejného směru jako původní vektor $\boldsymbol{X}$, je-li k naopak záporné, má vektor $\boldsymbol{Y}$ opačný směr vůči původnímu vektoru.

V každém případě jsou však oba dva vektory vždy rovnoběžné $(\boldsymbol{X} \parallel \boldsymbol{Y})$ **!!**

Typickým příkladem takového násobení je vztah pro výpočet elektrické síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{e}$, jež působí v daném elektrickém poli intenzity $\boldsymbol{E}$ na částici s nábojem q. Platí (budeme o tom hovořit ještě v tomto semestru)

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{e} = q\,.\,\boldsymbol{E} \quad .$$

Je-li náboj částice kladný, je směr elektrické síly souhlasný se směrem intenzity $\boldsymbol{E}$ pole, nese-li ovšem částice záporný náboj q (takovou částicí je například elektron $q = -e$), bude na ní působit elektrická síla orientovaná proti směru intenzity $\boldsymbol{E}$ elektrického pole (viz následující obr. 1.4).



Obr. 1.4 – násobení vektoru skalárem

Podobné závěry jako pro násobení vektoru skalárem platí i pro dělení vektoru reálným číslem (skalárem) $k \neq 0$. Dělení je vlastně v tomto případě jen formálně nahrazeno násobením, a to faktorem

$$\frac{1}{k} \quad .$$

Typickým příkladem, s níž se budeme nejčastěji setkávat, je výpočet zrychlení posuvného pohybu hmotného objektu stálé (neměnné) hmotnosti m, jež je mu uděleno na něj působící výslednou silou $\boldsymbol{F}$ (viz 2. Newtonův pohybový zákon – zákon síly). Platí, že

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} \quad .$$

Celkové zrychlení $\boldsymbol{a}$ hmotného objektu má tedy velikost a přímo úměrnou velikosti F působící síly a navíc směr vektoru zrychlení $\boldsymbol{a}$ je vždy totožný se směrem působící síly $\boldsymbol{F}$ (protože hmotnost m je vždy kladná).

* * *

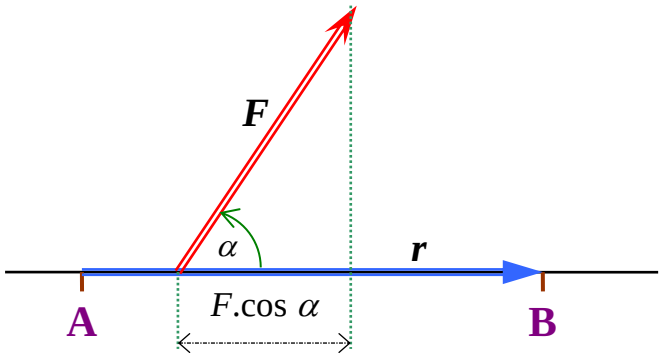
Mnohem složitější případy pak nastávají při násobení vektoru vektorem. V takových případech může být výsledkem této matematické operace jak skalární, tak i vektorová fyzikální veličina. Právě podle toho pak rozlišujeme **skalární** a **vektorový součin** dvou vektorových veličin.

Typickým příkladem **skalárního součinu** dvou vektorových veličin je např. vztah pro výpočet mechanické práce. Jestliže práci koná síla $\boldsymbol{F}$ stálé velikosti i směru při přemístění tělesa po přímé trajektorii (tak, jak je to naznačeno na vedlejším obr. 1.5), bude vykonaná práce dána výrazem

$$W = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{r} = F.s.\cos\alpha \quad , \qquad (1.9)$$

přičemž velikost vektoru posunutí $\boldsymbol{r}$ je v takovém případě rovna dráze uražené při přesunu mezi body A a B

$$(s = |\boldsymbol{r}| = r) \quad .$$



Obr. 1.5 – případ skalárního součinu dvou vektorů

Jak je patrné ze vztahu (1.9), je skalární součin dvou vektorů dán součinem jejich velikostí vynásobeným kosinem úhlu α, jenž oba násobené vektory mezi sebou svírají. Jak je dobře vidět i na obr. 1.5, představuje vlastně výraz $F.\cos\alpha$ velikost kolmého průmětu síly $\boldsymbol{F}$ do směru vektoru posunutí $\boldsymbol{r}$. Skalární součin dvou vektorů lze tedy interpretovat i tak, že je roven součinu velikosti jednoho vektoru a velikosti kolmého průmětu druhého do směru prvního vektoru.

I v tomto případě lze pro výpočet skalárního součinu výhodně využít rozpisu obou vektorů do složek. Má-li vektor síly souřadnice $\boldsymbol{F} = (F_x ; F_y ; F_z)$ a vektor posunutí $\boldsymbol{r} = (x ; y ; z)$, bude práce síly W dána výrazem

$$W = F_x.x + F_y.y + F_z.z \quad , \qquad (1.10)$$

neboli **součtem součinů odpovídajících složek**.

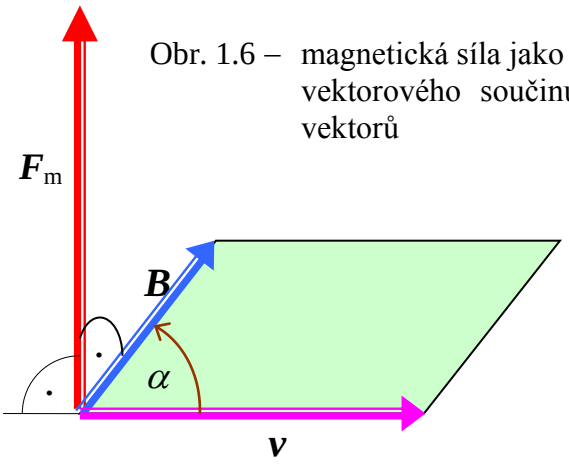
!! Z definice skalárního součinu okamžitě vyplývá jeden velmi důležitý závěr → skalární součin dvou **navzájem kolmých** vektorů je vždy roven nule

$$\boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = 0 \quad !!! \qquad (1.11)$$

Například právě u zmíněné fyzikální veličiny mechanická práce se můžeme setkat s případem, kdy působící síla má nenulovou velikost, a přesto práci nekoná ($W = 0$ J), protože působí kolmo ke směru pohybu objektu. Takovou silou je třeba dostředivá síla u křivočarých pohybů nebo tíhová síla působící na těleso, jež se ve vzduchoprázdnu pohybuje po dokonale hladké a navíc vodorovné podložce.

S vektorovým násobením dvou vektorových veličin se ve fyzice setkáváme všude tam, kde je výsledkem příslušné operace popisující určitou přírodní zákonitost fyzikální veličina mající rovněž vektorový charakter.

Takovým doslova „klasickým“ příkladem **vektorového součinu** dvou vektorových fyzikálních veličin je matematický výraz umožňující výpočet magnetické síly $\boldsymbol{F}_m$ působící na částici s nábojem q, jež se pohybuje určitou rychlostí v magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$ (viz vedlejší obr. 1.6, na němž je znázorněn případ, kdy je náboj q částice **kladný !!!**).



Obr. 1.6 – magnetická síla jako příklad vektorového součinu dvou vektorů

Vletí-li totiž do magnetického pole o indukci $\boldsymbol{B}$ nabitá částice (bodový náboj) q rychlostí $\boldsymbol{v}$, bude na ni magnetické pole působit silou, jejíž velikost je možno vyjádřit jako

$$F_m = q \,.\, v \,.\, B \,.\, \sin\alpha \quad , \tag{1.12}$$

kde α je úhel, jenž spolu svírají vektory $\boldsymbol{v}$ okamžité rychlosti částice a indukce $\boldsymbol{B}$ magnetického pole.

Jak je z obrázku patrné, je **velikost** tohoto součinu rovna velikosti plochy vektorového rovnoběžníka, jehož délky stran jsou právě rovny velikostem vektorů rychlosti v a indukce B magnetického pole .

Směr výsledného vektoru – v tomto případě magnetické síly $\boldsymbol{F}_m$ – je pak jednoznačně dán kolmou orientací na oba násobené vektory (je tedy kolmý k celé rovině, jež je těmito dvěma vektory určena). V našem případě tedy musí platit

$$\boldsymbol{F}_m \perp \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{F}_m \perp \boldsymbol{v} \tag{1.13}$$

a navíc všechny tři vektory tvoří tzv. pravotočivý systém.

Pro zápis vektorového součinu vždy používáme symbolu „ × “ , tedy magnetickou sílu lze formálně vyjádřit jako

$$\boldsymbol{F}_m = q.\,[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}] \quad . \tag{1.14}$$

Stejně jako v případě skalárního součinu lze i součin vektorový snadno spočítat, máme-li násobené vektory vyjádřené ve složkách. Má-li v našem případě vektor okamžité rychlosti nabité částice složky $\boldsymbol{v} = (v_x\,;\,v_y\,;\,v_z)$ a vektor indukce magnetického pole $\boldsymbol{B} = (B_x\,;\,B_y\,;\,B_z)$, bude síla $\boldsymbol{F}_m$ působící na částici v magnetickém poli dána výrazem

$$\boldsymbol{F}_m = q.\,[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}] = q\,.\,(v_y B_z - v_z B_y \;;\; v_z B_x - v_x B_z \;;\; v_x B_y - v_y B_x) \quad , \tag{1.15}$$

jenž lze také formálně zapsat pomocí determinantu

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}} = q \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad . \tag{1.16}$$

Pozor !!! U vektorového součinu vždy záleží na pořadí násobených veličin, změníme-li pořadí obou násobených vektorů, bude mít výsledný vektor opačný směr; obecně platí

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}) \quad . \tag{1.17}$$

Říkáme, že vektorový součin je ***antikomutativní***.

! ! Z definice vektorového součinu pak navíc vyplývá i ten důležitý závěr, že tento součin je v případě násobení dvou **navzájem rovnoběžných** vektorů vždy roven nule (přesněji řečeno nulovému vektoru)

$$\boldsymbol{A} \parallel \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \quad \textbf{!!!} \tag{1.18}$$

To tedy znamená, že v právě popsaném případě magnetického silového působení na nabitou částici bude magnetická síla nulová v případech, kdy vektor $\boldsymbol{v}$ její okamžité rychlosti bude rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{B}$ indukce tohoto pole (v takovém případě se částice pohybuje ve směru magnetických indukčních čar, jež slouží ke znázornění pole).

A ještě dvě poznámky na závěr:

1) Operace dělení vektorem není definována **!!!** Dělit lze pouze velikostí vektoru. Například tzv. „vážení“ tělesa pomocí účinků na něj působící síly $\boldsymbol{F}$ lze podle 2. Newtonova pohybového zákona provést na základě výpočtu

$$m = \frac{F}{a} \quad ,$$

kde a je pouze **velikost** celkového zrychlení, jež síla hmotnosti m uděluje.

2) Není nutné mít nějaké obavy z vektorových fyzikálních veličin a z početních operací s nimi. Svět se přeci neřídí podle skalárních a vektorových součinů. To jen menší či větší složitost přírodních jevů si sama vynucuje ke svému jednoznačnému popisu použít příslušný matematický vztah (nebo vztahy) a k tomu i potřebný aparát. Stále mějte na paměti, co bylo řečeno už v samotném úvodu tohoto výkladu → pochopení fyziky vždy začíná pochopením přírodních dějů a vztahů mezi nimi a nespočívá v nějakém zbytečném biflování vzorců, jejichž obsahu nedokážeme často ani pořádně porozumět.

1.2 Role matematiky ve fyzice

1.2.1 Konstanta a proměnná

Až dosud jste se ve fyzice (a nejen v ní) setkávali s veličinami, jež byly poměrně jednoduché. Buď se jednalo o veličiny konstantní (velikost rychlosti rovnoměrného pohybu, ustálený elektrický proud, hustota homogenního tělesa, hmotnost pohybujícího se objektu, intenzita homogenního elektrického nebo gravitačního pole, atd.), nebo o takové, jež se sice během experimentu (nebo příkladu) měnily, ale jejich závislost na jiných veličinách bylo možné vyjádřit obvykle přímou či nepřímou úměrností a k výpočtu pak stačila vlastně znalost obyčejné trojčlenky.

Takových příkladů lze uvést celou řadu:

→ **přímá úměrnost** dráhy a času u rovnoměrného pohybu ..... $s = v \,.\, t$,

→ **přímá úměrnost** ustáleného proudu a napětí (Ohmův zákon) ..... $I = \frac{U}{R}$,

→ **přímá úměrnost** celkového zrychlení a působící výsledné síly ..... $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}$,

→ **nepřímá úměrnost** mezi tlakem a objemem plynu při izotermickém ději $p \,.\, V = konst.$,

→ **nepřímá úměrnost** mezi napětím a kapacitou sériově (za sebou) zapojených kondenzátorů ..... $U = \frac{Q}{C}$.

Setkali jste se i s další poměrně jednoduchou funkcí – kvadratickou. Touto funkcí lze například.vyjádřit závislost dráhy na čase rovnoměrně zrychleného pohybu nebo závislost kinetické energie pohybujícího se hmotného objektu na jeho okamžité rychlosti, ale příroda kolem nás je přeci jen pestřejší.

Věci kolem nás se neustále **mění** (a to mnohem složitěji než podle výše uvedených jednoduchých matematických závislostí) a tím pádem dochází i ke komplikovanějším ***změnám fyzikálních veličin***, jež takové jevy popisují – rychlosti pohybu nemívají konstantní (stálou) velikost, reálná tělesa bývají nehomogenní, odpor vodiče se mění s teplotou nebo v důsledku osvětlení, gravitační pole se vzdáleností od centrálního tělesa (např. od Země) slábne, atd.

Počítání s takovými veličinami už vyžaduje hlubší matematické znalosti a dovednosti a mezi nimi nemůže chybět ani důkladná znalost základních principů diferenciálního a integrálního počtu.

Přitom není nutné mít obavy z toho, že by následující fyzikální výklad byl zahlcen vyšší matematikou. Naopak, my si k našemu fyzikálnímu zkoumání vždy vezmeme na pomoc jen ten nejnutnější (a pokud možno i co nejjednodušší) matematický aparát. Takový, aby byly vyšetřované skutečnosti, tj. přírodní jevy popsány fyzikálními veličinami vždy jednoznačně, pokud možno co nejobecněji a hlavně přehledně.

Matematika nám ve fyzice musí pomáhat;
musí nám sloužit a ne nás ovládat,
nic víc po ní nechceme.

Lze velice zjednodušeně říci, že všude tam, kde jsme se setkali s prostým podílem konstantních veličin, nastupuje u veličin měnících se derivace a na místě součinu se objevuje integrál.

1.2.2 Stručně k významu derivace

Typickou ukázkou aplikace derivace ve fyzice je zavedení (definice) velice dobře známé fyzikální veličiny **okamžitá rychlost**. Podrobně se k této problematice dostaneme hned na začátku dalšího výkladu v kapitole **„Kinematika pohybu hmotného bodu“**.

Jednoduše řečeno, velikost v okamžité rychlosti je vlastně dána limitní hodnotou průměrné rychlosti, když časový interval, v němž průměrnou rychlost počítáme, budeme neomezeně zkracovat (necháme jej konvergovat k nule)

$$v = \lim_{\Delta t \to 0\,\mathrm{s}} v_\mathrm{p} = \lim_{\Delta t \to 0\,\mathrm{s}} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad .$$

Tímto matematickým postupem – jak známo – se fakticky dostáváme k derivaci dráhy podle času

$$v = \frac{\mathrm{d}\, s}{\mathrm{d}\, t} \quad . \tag{1.19}$$

Pozn.: Při fyzikální interpretaci vztahu (1.19) se ale obvykle vyhneme termínu „derivace“ a raději používáme formulaci **„velikost okamžité rychlosti je dána změnou dráhy v čase“.**

Podobně můžeme definovat hustotu nehomogenního tělesa v daném jeho bodě ($\Delta V \to 0\ \mathrm{m}^3$) jako

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0\,\mathrm{m}^3} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}\, m}{\mathrm{d}\, V} \tag{1.20}$$

a šlo by uvést i celou řadu dalších případů uplatnění derivace jedné proměnné ve fyzice. Velkou výhodou těchto vztahů je, že mají obecnější platnost než ekvivalentní vztahy „podílové“. Navíc tyto „podílové“ vztahy z nich lze jednoduše vyvodit, když námi počítaná veličina bude nabývat konstantní hodnoty.

1.2.3 Stručně k významu integrálu

Jak už samotný název této matematické operace napovídá, je integrace „dáváním něčeho dohromady“. Obyčejný součin znamená opakovaně sčítat konečný počet stejně velkých sčítanců; integrování je vlastně rovněž sčítání, ale nekonečně velkého počtu nekonečně malých (ale přitom různě „velkých“) veličin – vzpomeňte si na Riemannovu definici integrálu !!!

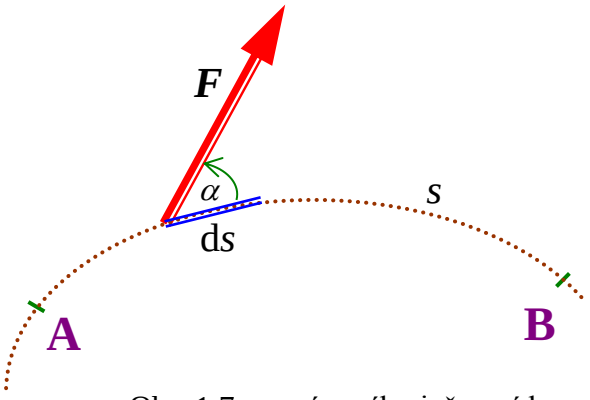
Vraťme se ještě jednou k výpočtu mechanické práce. Jestliže síla ***F*** nebude konstantní (ať už velikostí nebo směrem, případně obojím), nebude možné vztah (1.9) použít.

V takovém případě musíme dráhu *s* mezi body **A** a **B** rozdělit na nekonečně mnoho nekonečně malých elementů d*s*, na každém spočítat práci

$$\mathrm{d}W = F.\cos\alpha\,\mathrm{d}s$$

(jež bude rovněž nekonečně malá), a pak tato „kousíčky“ sečíst – tedy integrovat.

Na vedlejším obrázku. 1.7 je tato situace schématicky znázorněna; infinitezimální dráha d*s* tam má pro názornost pochopitelně konečně velkou délku.



Obr. 1.7 – práce síly, jež není konstantní

Po provedení integrace dostaneme, že práce vykonaná obecnou silou ***F*** na dráze *s* mezi body **A** a **B** je rovna

$$W = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} F.\cos\alpha\ \mathrm{d}s \quad . \tag{1.21}$$

Opět se můžeme velmi snadno přesvědčit, že když bude mít síla ***F*** stálou velikost ($F = konst.$) i směr ($\cos\alpha = konst.$), vyvodíme okamžitě ze vztahu (1.21) známý součinový výraz (1.9)

$$W = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} F.\cos\alpha\ \mathrm{d}s = F.\cos\alpha \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}s = F.s.\cos\alpha \quad .$$

Podobně lze pomocí integrace určit závislost dráhy *s* příslušného pohybu na čase *t*, jak si podrobně ukážeme v následující kapitole **2.1 Kinematika pohybu hmotného bodu**.

Ze vztahu

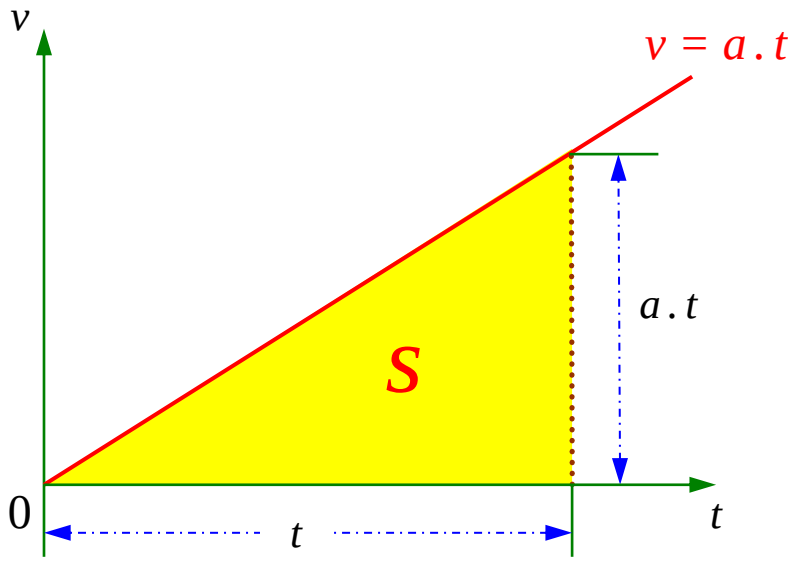
$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.19}$$

pro velikost okamžité rychlosti okamžitě vyplývá, že dráha

$$s = \int_{0}^{t} v\,\mathrm{d}t \quad . \qquad \text{viz (2.6)}$$

Výpočet dráhy tak můžeme snadno provést na základě interpretace Riemannova integrálu jako obsahu plochy vymezené grafem funkce – tou bude v uvažovaném případě právě závislost velikosti rychlosti pohybu na čase. Na následujícím obr. 1.8 je vynesena jistě známá závislost rychlosti pohybu rovnoměrně zrychleného z klidu na čase

$$v = a \,.\, t \quad .$$



Obr. 1.8 – výpočet dráhy pohybu rovnoměrně zrychleného z klidu

Uražená dráha s za čas t je rovna obsahu trojúhelníka vymezeného grafem funkce $v = a \,.\, t$, svislou pořadnicí t a vodorovnou časovou osou. Okamžitě tak dostáváme

$$s = \tfrac{1}{2} \,.\, t \,.\, at = \tfrac{1}{2}\, at^2 \quad .$$

2. MECHANIKA HMOTNÝCH BODŮ

Mechanika je základním oborem fyziky. Zkoumá zákonitosti mechanického pohybu hmotných objektů (těles) a vzájemného působení, jež přitom mezi těmito objekty vzniká. Základem ***klasické mechaniky***, jež studuje pohyby těles, jejichž rychlosti jsou malé vzhledem k rychlosti světla, jsou tři **Newtonovy pohybové zákony**.

Klasická newtonovská mechanika se člení na řadu dalších dílčích fyzikálních disciplín, my se v první části tohoto jednosemestrálního kurzu zaměříme podrobněji pouze na některé z nich – na mechaniku hmotných bodů, na mechaniku soustav hmotných bodů, pak přejdeme na mechaniku těles (a to jak těles tuhých, tak i na deformace pružných těles), následovat bude mechanika tekutin a na závěr si probereme kmitavé pohyby.

Náš výklad začneme studiem pohybů. Chceme-li studovat pohyby, musíme mít v první řadě k dispozici takový soubor fyzikálních veličin, jež dokáží nejrůznější pohyby v celé jejich složitosti popsat. To je základním úkolem **kinematiky** – disciplíny, jež se zaměřuje „pouze“ na zkoumání různých druhů mechanického pohybu hmotných objektů, aniž by se přitom zabývala vyšetřováním příčin jejich vzniku a průběhu. Zkoumání příčin vzniku a změn pohybu konkrétních těles je pak úkolem **dynamiky**.

Jak známo, tělesa mohou vykonávat pohyby velice jednoduché, ale na druhé straně také značně komplikované. V principu ale lze rozdělit pohyby těles do dvou základních skupin – na pohyby posuvné a pohyby otáčivé (rotační).

Posuvný pohyb tuhého tělesa je případem pohybu, kdy všechny body tělesa konají pohyby naprosto totožné. V daném okamžiku mají všechny body tělesa stejnou rychlost, mají navlas stejné zrychlení, křivky, jež při svém pohybu všechny body opisují (neboli **trajektorie** pohybu), mají při posuvném pohybu tuhého tělesa naprosto stejný tvar i délku. Posuvný pohyb tělesa je tak možné jednoduše popsat pohybem kteréhokoli jeho bodu.

Pozn.: Posuvný pohyb neznamená totéž, co pohyb přímočarý **!!!** Tyto dva termíny bývají často chybně ztotožňovány – tělesa se mohou posouvat a přitom vykonávat velice složité pohyby křivočaré.

Rotační pohyb tělesa (buď kolem pevného bodu nebo pevné osy) je pohybem obecně složitějším. Je charakteristický tím, že jednotlivé body tělesa opisují kružnice o nestejném poloměru, a tím pádem za stejný čas nutně urazí různou dráhu, mají v daném čase obecně různé okamžité rychlosti i různá zrychlení pohybu. Popis takového pohybu vyžaduje v kinematice zavedení tzv. úhlových veličin (těmi jsou úhlová dráha φ, úhlová rychlost ω a úhlové zrychlení α), v dynamice rotačních pohybů pak zavádíme různé momenty (moment síly $\boldsymbol{M}$, moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ rotujícího tělesa a moment setrvačnosti J tuhého tělesa).

V přírodě se setkáváme často i s tím, že dochází ke skládání různých pohybů za vzniku pohybů nových – typickým příkladem je **pohyb valivý** (např. u kol dopravních prostředků), jenž vzniká právě složením posuvného pohybu a rotace.

Jak bývá – a nejen ve fyzice – obvyklé, v úvodu každého výkladu studujeme jevy v co nejjednodušší formě. U problematiky pohybů těles právě z tohoto důvodu zavádíme pojem tzv. **hmotného bodu**. Je to ve skutečnosti jen určitá fyzikální abstrakce, pouze takový myšlenkový model, nic víc. Hmotný bod je objekt, jenž má logicky nulové rozměry, ale nenulovou hmotnost, je to vlastně hmotnost soustředěná v jednom jediném bodě prostoru. Nahradíme-li v našich úvahách určité těleso hmotným bodem, budeme brát u něj v úvahu jeho hmotnost, ale budeme naprosto zanedbávat jeho rozměry, plochu povrchu, objem i hustotu.

Pro zavedení hmotného bodu hovoří minimálně tři velmi dobré důvody:

→ **1)** poměrně snadno můžeme určit polohu takového objektu v prostoru i trajektorii jeho pohybu např. zavedením vhodné soustavy souřadnic;

→ **2)** hmotný bod není možné deformovat; nelze měnit jeho tvar a rozměry, když přeci žádné nemá;

→ **3)** u hmotného bodu nemá naprosto cenu uvažovat o otáčení (o rotaci)

Díky zavedení hmotného bodu se tak značně zjednoduší i úvodní kapitoly našeho následujícího výkladu o pohybech hmotných objektů.

Hmotný bod totiž koná jen pohyby posuvné !!!

2.1 Kinematika pohybu hmotného bodu

2.1.1 Poloha, trajektorie a dráha hmotného bodu

Abychom dokázali určitým způsobem správně popsat pohyb hmotného bodu v prostoru, je třeba znát jeho **polohu** v libovolném čase *t*. Polohu hmotného bodu proto chápeme jako prostorové umístění hmotného bodu vzhledem ke pevně zvolené vztažné soustavě souřadnic. Obvykle bývá touto soustavou souřadnic pravoúhlá (Kartézská) soustava tří navzájem kolmých os *x*, *y*, *z*, procházející počátkem 0.

Budeme-li umět určit polohu hmotného bodu v prostoru, snadno poznáme, zda je tento ideální objekt v klidu nebo v pohybu. Je-li **v klidu**, zůstává totiž jeho poloha v prostoru neměnná, o tom, že je hmotný bod **v pohybu**, pak informuje každá změna jeho polohy s časem, jež nastane právě vzhledem k námi zvolené soustavě souřadnic.

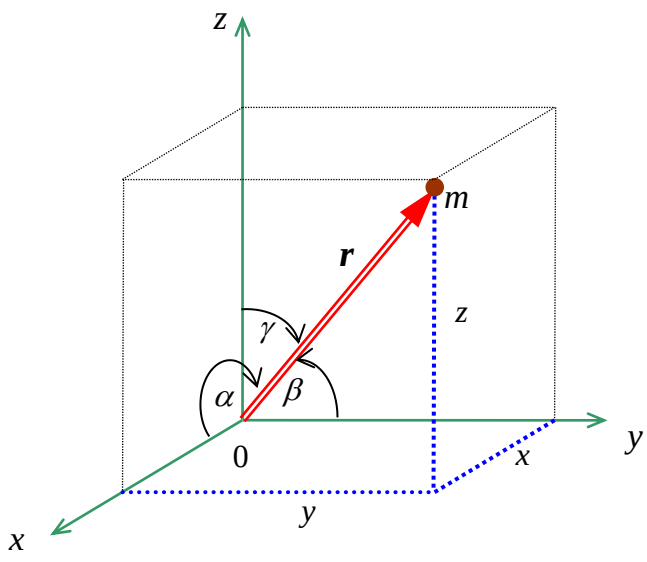
Poloha hmotného bodu v prostoru je dána trojicí souřadnic *x*, *y*, *z* (viz obr. 2.1). Lze jí však také vyjádřit pomocí tzv. **polohového vektoru *r***, jehož velikost

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (2.1)$$

a jehož směr lze určit (viz kapitola „**ÚVOD**“) pomocí tří úhlů α , β a γ, které polohový vektor svírá s osami souřadnic. Platí

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r} \qquad (2.2)$$

.



Obr. 2.1 - poloha hmotného bodu *m* v prostoru

Studujeme-li pohyb hmotného bodu pouze v rovině, vystačíme při popisu jeho polohy se dvěma souřadnicemi, u pohybu hmotného bodu po přímce (neboli u přímočarých pohybů) pak dokonce jen se souřadnicí jedinou.

Jak již bylo řečeno výše, při pohybu hmotného bodu se mění jeho poloha v prostoru a v dané vztažné soustavě i jeho souřadnice v závislosti na čase *t*. **Geometrická čára**, kterou hmotný bod při svém pohybu opisuje (tedy množina všech bodů, jimiž při pohybu postupně prochází), se nazývá **trajektorie pohybu hmotného bodu**.

Podle tvaru trajektorie pak dělíme pohyby do dvou základních skupin – na pohyby **přímočaré** (jejich trajektorií je přímka nebo její část – polopřímka, resp. úsečka) a **křivočaré** (což jsou vlastně všechny ostatní pohyby).

Pozor !!! V běžném vyjadřování bývá termín „trajektorie“ často nesprávně zaměňován slovem „dráha“. Ve fyzice se však jedná o dva naprosto odlišné pojmy !!! Dráha – jak si hned ukážeme – je přesně definovanou fyzikální veličinou; charakterizuje pouze vzdálenost naměřenou na příslušné trajektorii.

!!

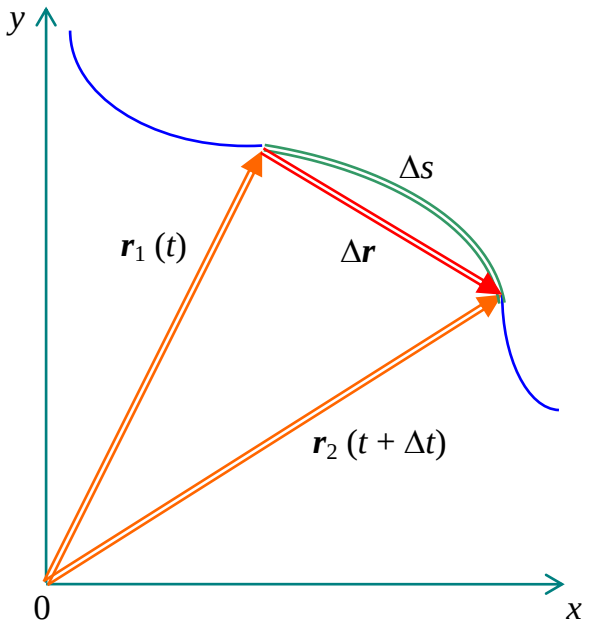
Dráha *s* **hmotného bodu** je důležitou kinematickou fyzikální veličinou, jež udává pouze **délku úseku na dané trajektorii pohybu**. Dráha je tedy vzdálenost, kterou hmotný bod urazil (proběhnul) za určitou dobu *t*, nic víc. Na rozdíl od polohového vektoru ***r*** je dráha *s* **typickou skalární veličinou**, protože nám v žádném případě nemůže podat informaci o směru pohybu. Ale stejně jako u polohového vektoru je při pohybu hmotného bodu dráha vždy funkcí času

$$s = \mathrm{f}\,(t) \quad .$$

Na vedlejším obrázku 2.2 je pak ukázán vztah mezi velikostí dráhy Δs uražené za jistý časový interval Δt a příslušnou změnou polohového vektoru (tzv. posunutím hmotného bodu)

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \qquad (2.3)$$

za tentýž čas.



Obr. 2.2 – dráha hmotného bodu a odpovídající změna jeho polohového vektoru

Jak je na první pohled i z tohoto obrázku patrné, mívá vektor posunutí $\Delta \boldsymbol{r}$ obvykle menší velikost Δr, než je hodnota ve skutečnosti uražené dráhy Δs; pouze **u pohybů přímočarých** platí, že

$$\Delta r = |\Delta \boldsymbol{r}| = \Delta s \quad .$$

Pozn.: Podobná rovnost mezi oběma veličinami pak nastává také v tzv. limitních případech, kdy časový interval neomezeně zkracujeme ($\Delta t \to 0$ s) . Dráha d*s* i velikost posunutí d*r* jsou nekonečně malé veličiny a v takovém případě i pro ně platí

$$\mathrm{d}r = \mathrm{d}\,s \quad . \qquad (2.4)$$

Toto pojetí pak umožňuje mimo jiné i precizně definovat fyzikální veličinu okamžitá rychlost, jak si ukážeme hned v následujícím článku **2.1.2**.

2.1.2 Rychlost pohybu hmotného bodu

Rychlost je jednou ze základních charakteristik pohybu každého hmotného objektu. Podává totiž bezprostřední informaci o tom, zda se daný hmotný objekt pohybuje nebo zda je v klidu, a je-li v pohybu, tak nám „řekne“, i jaký je charakter jeho pohybu.

Už ze základní školy velmi dobře znáte fyzikální veličinu **průměrná rychlost** v_p daného pohybu. Její definice je velmi jednoduchá. Jestliže nějaký objekt za určitý časový interval Δt urazil úsek dráhy Δs (jakýmkoli posuvným pohybem), je hodnota jeho průměrné rychlosti v_p v tomto časovém intervalu dána vztahem

$$v_\mathrm{p} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad . \tag{2.5}$$

Tato fyzikální veličina – jak už to bývá u všech průměrných (neboli středních) hodnot jakýchkoli fyzikálních veličin – je nutně veličinou ***skalární***. Vektorem nemůže být nejen proto, že její definice vychází z jiného skaláru – dráhy a chybí zde onen důležitý „směrový prvek“, ale hlavně proto, že nepodává informaci o pohybu hmotného bodu v každém časovém okamžiku. K tomu je třeba znát veličinu jinou – rychlost okamžitou.

Okamžitá rychlost $\boldsymbol{v}$ je na rozdíl od rychlosti průměrné typickou vektorovou fyzikální veličinou. V každém časovém okamžiku vyjadřuje, *jak se mění poloha* daného hmotného bodu v prostoru. Zda „hodně“, „málo“ nebo „vůbec“, ale hlavně vypovídá i jakým směrem se objekt pohybuje.

Jednou z možností, jak tuto fyzikální veličinu zavést, je limitní přechod od rychlosti průměrné tak, jak již bylo naznačeno v kapitole **„ÚVOD“**. Budeme-li zkoumat pohyb hmotného objektu ve stále kratších časových intervalech Δt, bude se průměrná rychlost stále více „blížit“ velikosti okamžité rychlosti. Nakonec při neomezeném zkrácení tohoto časového intervalu dostáváme, že

$$v = \lim_{\Delta t \to 0\,\mathrm{s}} v_\mathrm{p} = \lim_{\Delta t \to 0\,\mathrm{s}} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad .$$

Tímto postupem se tak dostáváme k tomu, že velikost okamžité rychlosti lze z čistě matematického hlediska chápat jako derivaci dráhy podle času

$$v = \frac{\mathrm{d}\, s}{\mathrm{d}\, t} \quad . \qquad \text{viz (1.19)}$$

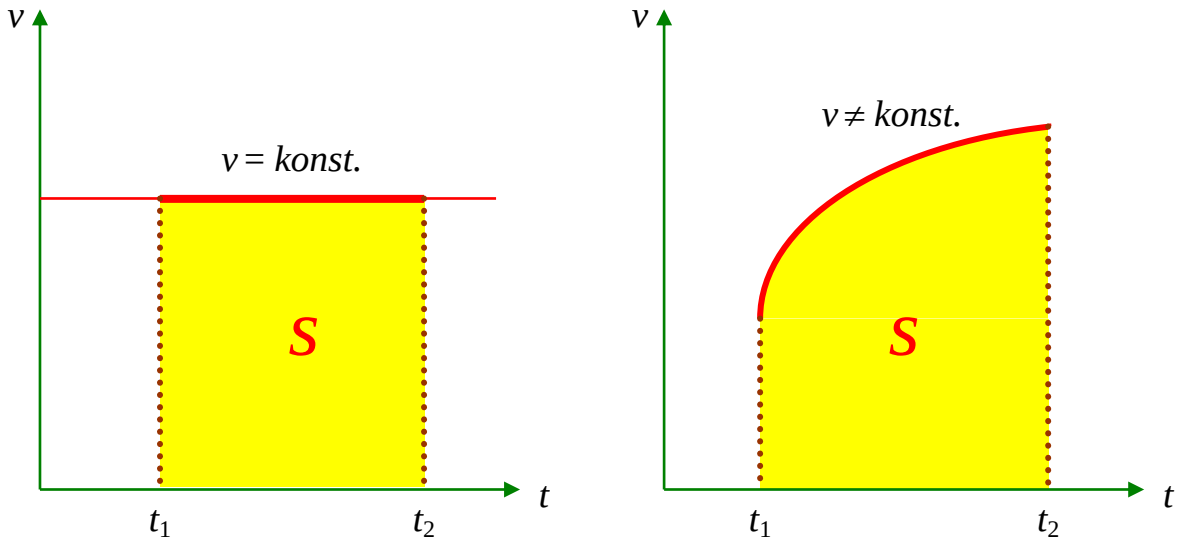
To nám pak při řešení pohybů umožňuje poměrně snadno (obecně integrací) určit závislost dráhy s příslušného pohybu na čase $s = \mathrm{f}\,(t)$. Stačí k tomu jen znát časový průběh velikosti okamžité rychlosti a ostatní je už jen otázkou výpočtu integrálu

$$s = \int_0^t v\,\mathrm{d}t \quad , \text{ resp. } \quad s = \int_{t_1}^{t_2} v\,\mathrm{d}t \quad . \tag{2.6}$$

Jak jsme si už ukázali v úvodní kapitole **ve článku 1.2.1** na příkladu pohybu rovnoměrně zrychleného z klidu, lze také výpočet dráhy uražené v nějakém časovém intervalu $\langle t_1 ; t_2 \rangle$ snadno provést grafickým řešením na základě interpretace Riemannova integrálu jako obsahu plochy vymezené grafem funkce – tou je právě závislost rychlosti pohybu na čase. Na následujícím obr. 2.3 jsou znázorněny dva případy – rovnoměrný pohyb stálou rychlostí o velikosti $v = konst.$, při němž je uražená dráha

$$s = v.(t_2 - t_1) = v.\Delta t$$

dána plochou obdélníka, a obecný nerovnoměrný pohyb rychlostí o velikosti $v \neq konst.$, jehož dráha je rovna obsahu obrazce vymezeného grafem funkce $v = f(t)$, pořadnicemi t_1, t_2 a vodorovnou časovou osou.



Obr. 2.3 – dráha pohybu – grafická interpretace

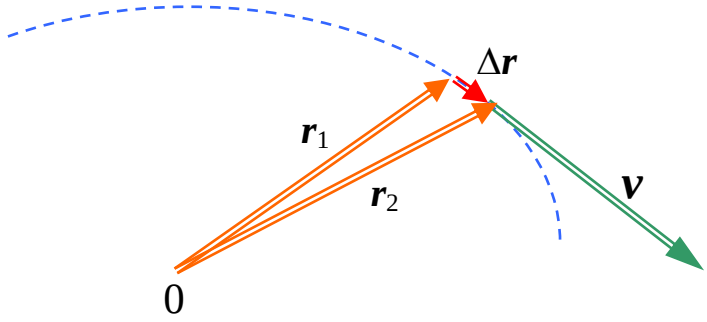
Směr vektoru $\vec{v}$ okamžité rychlosti pak v souladu se skutečností ztotožňujeme u pohybů přímočarých vždy se směrem přímkové trajektorie, u křivočarých pohybů pak se směrem orientované tečny v daném bodě křivky, jež je trajektorií pohybu. Směr této orientované tečny je logicky souhlasný se směrem pohybu daného hmotného objektu.

Pozn.: Uvědomte si například, že každý přímý úsek cesty (silnice, železniční trati), jenž následuje za nějakou zatáčkou, navazuje vždy ve směru tečny v posledním bodě křivky (zatáčky), kapky na povrchu rotujícího předmětu „odlétají“ v tečném směru k jeho povrchu a bylo by možné uvést i celou řadu dalších příkladů dokládajících, že vektor okamžité rychlosti má skutečně směr orientované tečny k trajektorii pohybu.

Díky zavedení polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ lze však dospět k definici vektoru okamžité rychlosti ještě jinou cestou. Jestliže okamžitá rychlost $\boldsymbol{v}$ charakterizuje, jak se mění poloha hmotného bodu v prostoru v čase, lze – ryze matematicky vzato – vyjádřit okamžitou rychlost $\boldsymbol{v}$ podílem změny polohového vektoru (neboli posunutím) $\Delta\boldsymbol{r}$ za jistý čas Δt a tohoto času

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \quad ,$$

přičemž budeme předpokládat, že časový interval Δt je velmi malý ($\Delta t \to 0$ s) – viz následující obr. 2.4.



Obr. 2.4 – okamžitá rychlost $\boldsymbol{v}$ pohybu hmotného bodu

Tím pádem ale lze vektor okamžité rychlosti hmotného bodu $\boldsymbol{v}$ vyjádřit zcela jednoznačně jako derivaci (neboli časovou změnu) polohového vektoru $\boldsymbol{r}$

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}} \quad . \tag{2.7}$$

Tento matematický závěr je plně v souladu se skutečností (viz opět obr. 2.4), že ***směr*** vektoru $\boldsymbol{v}$ okamžité rychlosti je skutečně **vždy tečný** k trajektorii pohybu (a navíc i souhlasně orientovaný se směrem pohybu) v daném bodě trajektorie.

Samotná ***velikost*** vektoru $\boldsymbol{v}$ okamžité rychlosti je dána prostou změnou velikosti polohového vektoru v čase. Lze jí tedy vyjádřit – vzhledem k výše zmíněné platnosti vztahu (2.4) – dvojím způsobem:

$$\boxed{v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} \quad . \tag{2.8}$$

Tím se ale opět dostáváme ke známému vztahu (1.19)

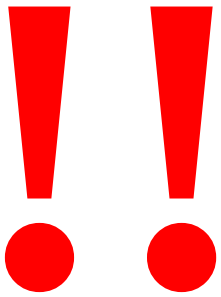
2.1.3 Zrychlení pohybu hmotného bodu

Okamžitá rychlost je veličinou, jež charakterizuje, jak se v daném časovém okamžiku mění poloha daného hmotného bodu s časem. Protože nás ale často zajímá také to, jak se samotná rychlost s časem mění (jak se během pohybu vyvíjí), zavádíme další kinematickou fyzikální veličinu, a tou je **zrychlení pohybu hmotného bodu**.

Okamžité zrychlení $\boldsymbol{a}$ pohybu hmotného bodu je rovněž vektorová fyzikální veličina. Jelikož vyjadřuje, jak se mění okamžitá rychlost $\boldsymbol{v}$ pohybu hmotného bodu s časem t, lze jí matematicky snadno vyjádřit opět jako časovou derivaci (neboli časovou změnu), tentokráte jako derivaci vektoru okamžité rychlosti

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \quad . \tag{2.9}$$

P o z o r ! ! !



Na tomto místě je nutno připomenout, že dochází velice často k nepřesnému (a možno říci, že přímo chybnému) chápání této fyzikální veličiny. S pojmem „zrychlení“ jsou totiž v řadě případů spojovány pouze změny velikosti rychlosti. Okamžitá rychlost $\boldsymbol{v}$ je ale ***vektor***, a proto pod pojmem změna rychlosti musíme chápat **nejen změnu její velikosti**, tj. nárůst rychlosti u pohybů zrychlených nebo její pokles u pohybů zpomalených, **ale též změnu směru vektoru rychlosti**, jež nastává u všech křivočarých pohybů (jízda do zatáčky apod.). Oba tyto způsoby změny rychlosti jsou **naprosto rovnocenné !!!**

A jak už to ve fyzice bývá, tak – abychom si usnadnili další studium – raději zavedeme dvě další fyzikální veličiny (dvě složky okamžitého zrychlení), přičemž každá z nich si bude „všímat“ změn jen jedné z výše uvedených z charakteristik vektoru okamžité rychlosti. Vedle okamžitého zrychlení $\boldsymbol{a}$ tak budeme mít navíc zrychlení tečné $\boldsymbol{a}_\mathrm{t}$ a zrychlení normálové $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$.

Tečné zrychlení a_t

První z těchto dvou složek – zrychlení tečné – charakterizuje pouze to, jak se mění velikost rychlosti (zda narůstá, či klesá), a proto je také jeho ***velikost*** a_t dána pouze změnou velikosti okamžité rychlosti v čase. Formálně matematicky vzato lze velikost tečného zrychlení opět vyjádřit jako časovou derivaci

$$a_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} \quad . \tag{2.10}$$

A na základě této jednoduché definice, lze pak snadno zpětně určovat (obecně integrací) závislost velikosti rychlosti jakéhokoli nerovnoměrného pohybu na čase $v = \mathrm{f}\,(t)$. Známe-li časový průběh velikosti tečného zrychlení, zbývá už jen vypočítat integrál

$$v = \int_0^t a_\mathrm{t}\,\mathrm{d}t \quad . \tag{2.11}$$

Směr tečného zrychlení – jak už jeho samotný název napovídá – je tečný k trajektorii pohybu v daném bodě (a je tedy rovnoběžný s vektorem okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$):

- v případě pohybů zrychlených je orientace obou těchto vektorů ($\boldsymbol{a}_t \parallel \boldsymbol{v}$) souhlasná;
- u pohybů zpomalených, kdy velikost rychlosti s časem postupně klesá, pak zase opačná (viz obr. 2.5 připojený na následující straně);
- je-li velikost rychlosti pohybu konstantní (stálá), jedná se v takovém případě o pohyb rovnoměrný a jeho tečné zrychlení je evidentně nulové ($a_t = 0\ \mathrm{m.s^{-2}}$).

Normálové zrychlení a_n

Druhá z obou složek – zrychlení normálové – vyjadřuje naopak výhradně změny směru vektoru okamžité rychlosti. Celkem jednoduchým postupem, lze snadno dokázat, že jeho ***velikost*** a_n je dána výrazem

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad , \tag{2.12}$$

kde R je poloměr křivosti trajektorie v daném bodě a v velikost okamžité rychlosti v témž bodě.

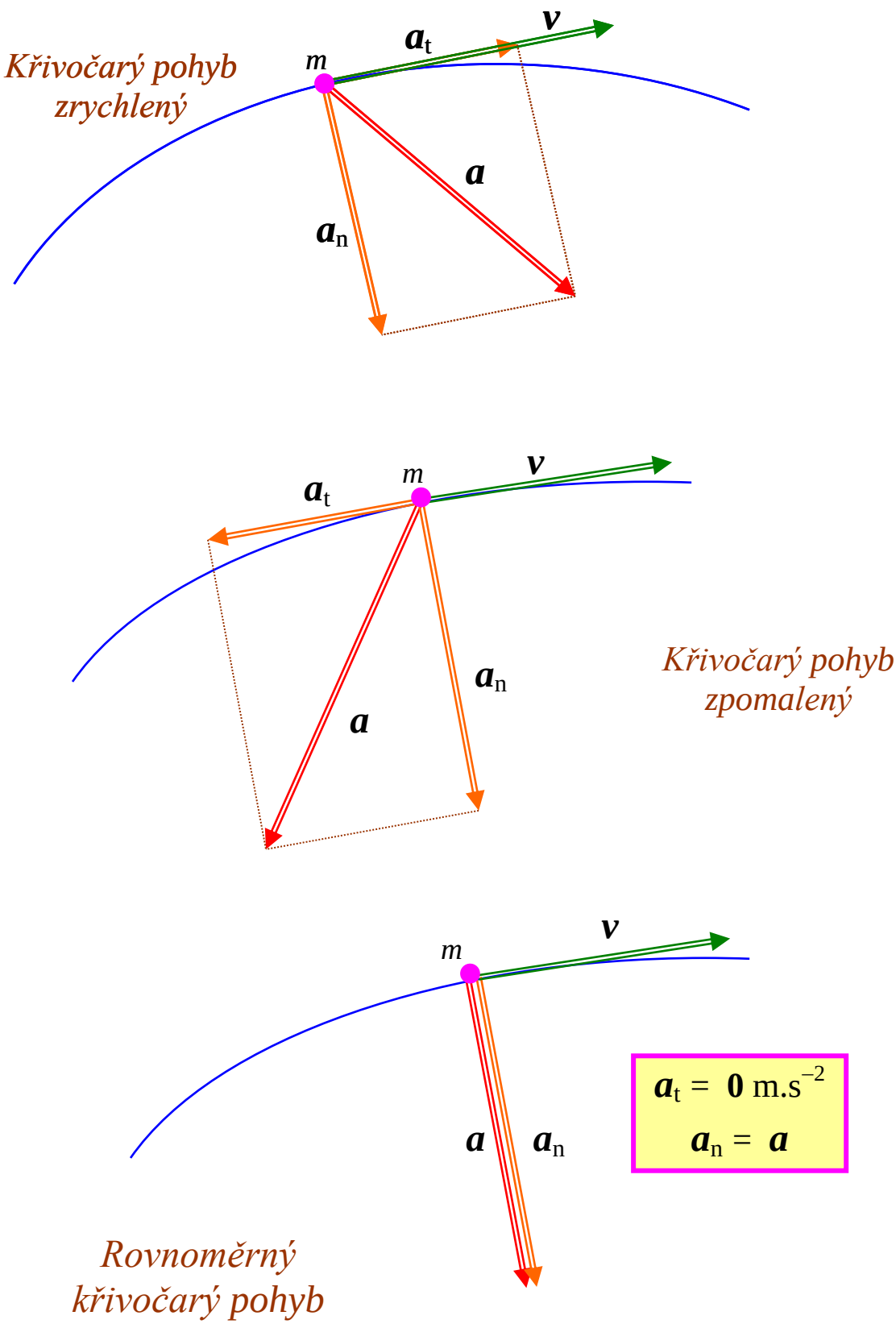
Je vcelku pochopitelné, že čím menší bude poloměr křivosti trajektorie (čím bude zatáčka „ostřejší“), tím výraznější bude změna směru okamžité rychlosti a tím vyšší hodnoty bude při dané rychlosti normálové zrychlení nabývat. A naopak s rostoucím poloměrem křivosti (tedy s menším zakřivením trajektorie) jeho velikost při dané rychlosti klesá.

Jedině u pohybů přímočarých, kdy změna směru vektoru rychlosti nenastává, je normálové zrychlení logicky nulové ($a_n = 0\ \mathrm{m.s^{-2}}$).

Jak už vyplývá z názvu „normálové“ zrychlení pohybu, je ***směr*** této složky zrychlení v každém bodě trajektorie pohybu vždy totožný se směrem její normály (a tedy kolmý k tečně, tedy i k vektoru $\boldsymbol{v}$ okamžité rychlosti i k vektoru $\boldsymbol{a}_t$ tečného zrychlení). Normálová složka zrychlení směřuje vždy do středu křivosti trajektorie v daném místě, a proto též pro normálové zrychlení používáme termínu **dostředivé**.

Pro celkové zrychlení $\boldsymbol{a}$ pohybu hmotného bodu pak musí nutně platit, že $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n$, velikost a celkového zrychlení snadno určíme pomocí Pythagorovy věty ($\boldsymbol{a}_n \perp \boldsymbol{a}_t$!!!)

$$a = \sqrt{a_t^{\,2} + a_n^{\,2}} \quad . \tag{2.13}$$



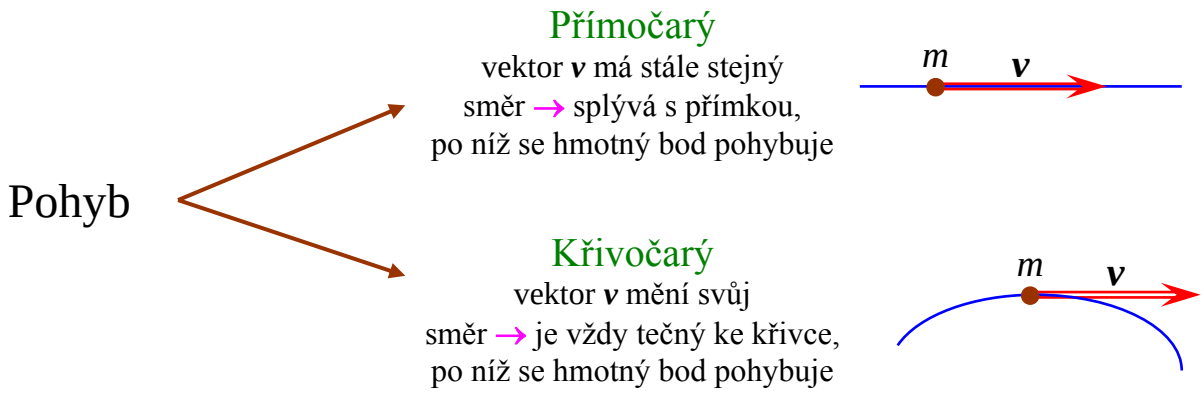
Obr. 2.5 – zrychlení pohybu hmotného bodu

2.1.4 Klasifikace pohybů

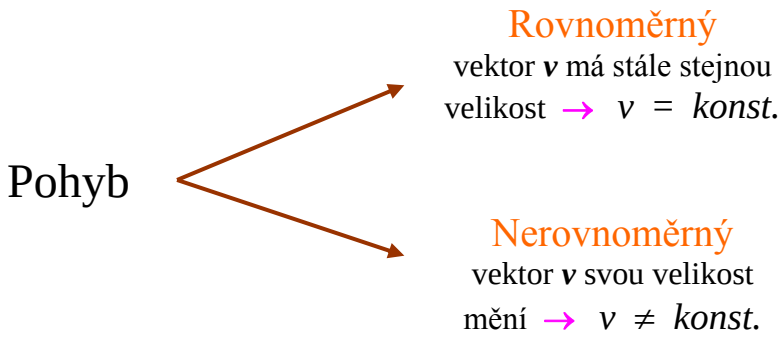
Hmotný bod může konat pohyby nejrůznějšího charakteru. Je proto dobré si je určitým způsobem rozdělit – klasifikovat. V zásadě se členění pohybů hmotného bodu (resp. posuvných pohybů tuhých těles) provádí dvojím způsobem.

První hledisko se týká směru pohybu → **podle různých tvarů trajektorií** pohybů rozlišujeme pohyby **přímočaré** a **křivočaré**, druhé si pak všímá hodnoty velikosti okamžité rychlosti → **podle velikosti *v* okamžité rychlosti pohybu a jejích časových změn** pak dělíme pohyby na **rovnoměrné** a **nerovnoměrné** (viz následující obr.2.6).

1) rozdělení pohybů hmotného bodu podle tvaru trajektorie



2) rozdělení pohybů hmotného bodu podle velikosti okamžité rychlosti.



Obr. 2.6 – klasifikace pohybů hmotného bodu

Závěrem výkladu o fyzikálních veličinách sloužících k popisu pohybu hmotného bodu si proveďme jednoduché porovnání základních typů pohybů. Jednotlivé skupiny pohybů totiž vždy nabývají charakteristických hodnot fyzikálních veličin okamžitá rychlost ***v*** a okamžité zrychlení ***a***, jak dokládá i připojená tabulka:

P o h y b	*přímočarý*	*křivočarý*
rovnoměrný	$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{konst.}$ $v = \text{konst.}$ $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}\ \text{m.s}^{-2}$ $a_t = 0\ \text{m.s}^{-2}$ $a_n = 0\ \text{m.s}^{-2}$	$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{konst.}$ $v = \text{konst.}$ $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}\ \text{m.s}^{-2}$ $a_t = 0\ \text{m.s}^{-2}$ $a_n \neq 0\ \text{m.s}^{-2}$
nerovnoměrný	$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{konst.}$ $v \neq \text{konst.}$ $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}\ \text{m.s}^{-2}$ $a_t \neq 0\ \text{m.s}^{-2}$ $a_n = 0\ \text{m.s}^{-2}$	$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{konst.}$ $v \neq \text{konst.}$ $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}\ \text{m.s}^{-2}$ $a_t \neq 0\ \text{m.s}^{-2}$ $a_n \neq 0\ \text{m.s}^{-2}$

2.1.5 Přímočaré pohyby

Jak už bylo řečeno v předcházejícím článku, jednou z možností, jak provést roztřídění pohybů hmotného bodu, je jejich rozdělení **podle tvarů trajektorií** příslušných pohybů na pohyby **přímočaré** a **křivočaré**.

Je snad celkem na první pohled patrné, že pohyby křivočaré jsou podstatně složitější než pohyby přímočaré. U pohybů přímočarých nedochází totiž ke změnám směru vektoru okamžité rychlosti a tyto pohyby tak mají **normálové (dostředivé) zrychlení vždy nulové** ($a_n = 0\ \text{m.s}^{-2}$). Pokud k nějakým změnám okamžité rychlosti dochází, tak se mění pouze její velikost. Tudíž celkové a tečné zrychlení jsou si u přímočarých pohybů identicky rovny

$$a_t = a \quad ,$$

a proto ve vztazích, v nichž se jedná o závislost velikosti rychlosti nebo dráhy na čase, uvádíme obvykle právě přímo celkové zrychlení a (tedy veličinu „u níž nemusíme psát dolní index“).

Náš další výklad o různých pohybech hmotného bodu se nejprve zaměří právě na skupinu pohybů **přímočarých**. Bude nás proto zatím zajímat pouze velikost v okamžité rychlosti sledovaného pohybu a její případné změny. Studium pohybů křivočarých bude obsahem následujícího **článku 2.1.6**.

a) Pohyb rovnoměrný přímočarý

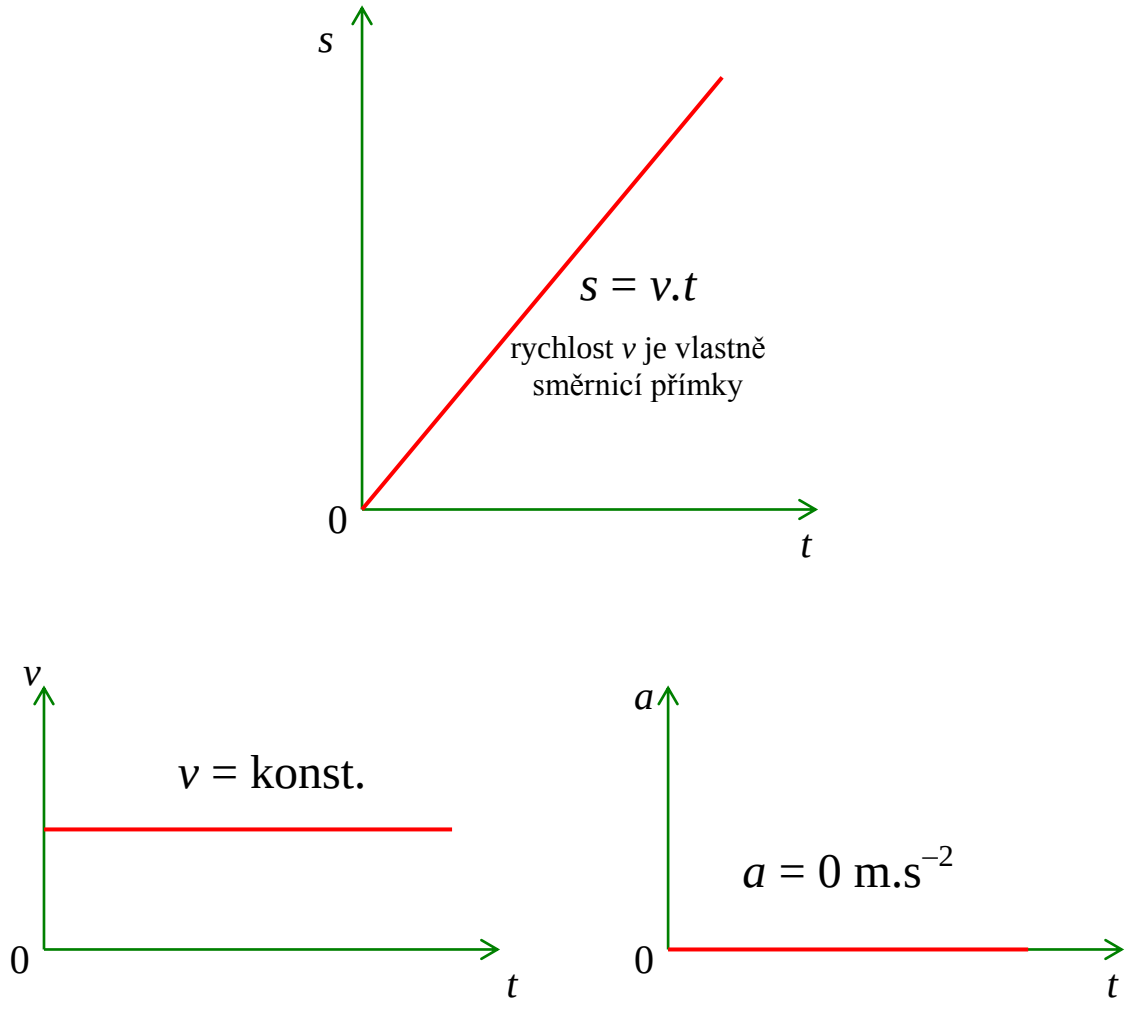
Je vůbec nejjednodušším typem pohybu, kdy se hmotný bod pohybuje po přímce a přitom urazí v libovolných, ale pokaždé stejně dlouhých časových úsecích Δt vždy stejný úsek dráhy Δs. **Velikost i směr vektoru rychlosti** $\boldsymbol{v}$ jsou stálé ($\boldsymbol{v}$ = ***konst.***), zrychlení tohoto pohybu – tečné, normálové i celkové – jsou nulová ($a = 0$ m.s^{-2} ; $a_t = 0$ m.s^{-2} ; $a_n = 0$ m.s^{-2}).

Dráha s, kterou hmotný bod urazí za určitou dobu t, je lineární funkcí času

$$s = v.t + s_o \quad . \tag{2.14}$$

kde s_o je tzv. počáteční dráha v čase $t_o = 0$ s (tu obvykle klademe – pokud to ovšem ze znění úlohy nevyplývá jinak – rovnou nule).

Závislosti dráhy, rychlosti a zrychlení pohybu rovnoměrného přímočarého na čase pak vyjadřují tři následující grafy na obr. 2.7.



Obr. 2.7 – grafické závislosti dráhy, rychlosti a zrychlení pohybu rovnoměrného přímočarého na čase

Příklad:
Tunelem délky 1 250 m projíždí vlak 250 m dlouhý. Od vjezdu lokomotivy do tunelu do výjezdu posledního vagónu z tunelu uplyne 36 s. Jakou rychlostí vlak jede?

Za dobu $t = 36$ s musí libovolný bod vlaku urazit dráhu

$s = s_1 + s_2 = 1\,250$ m + 250 m = 1 500 m.

Hledaná rychlost vlaku je tedy $v = \frac{s}{t} = \frac{1500\ \text{m}}{36\ \text{s}} = 41,\overline{6}\ \text{m.s}^{-1} = 150\ \text{km.h}^{-1}$.

Často se také můžeme v úlohách setkat s pohyby, které jako celek sice rovnoměrné nejsou, ale skládají se z několika na sebe navazujících pohybů s konstantní rychlostí. Typickou ukázkou je i následující **příklad:**

Rychlost auta v prudkém stoupání je 30 km.h^{-1}. V následujícím stejně dlouhém sjezdu dosahuje rychlosti 90 km.h^{-1}. Určete, jak velká je průměrná rychlost auta na celé jeho dráze.

Zadání této úlohy svádí k okamžité (ale přitom chybné) odpovědi, že průměrná rychlost auta musí být 60 km.h^{-1}, což je aritmetický průměr hodnot obou uvedených rychlostí. Ale pozor – menší rychlostí 30 km.h^{-1} jede auto přece třikrát delší čas než vyšší rychlostí 90 km.h^{-1}, a to se musí v konečném výsledku nějak projevit !!!

Důležitá informace v zadání úlohy je, že dráha nahoru i dolů je stejně dlouhá, my ji sice neznáme, ale počítat s ní budeme muset – označme si ji tedy s.

Čas t_1 potřebný k jízdě do kopce pak bude $t_1 = \frac{s}{v_1}$,

čas t_2 potřebný k následné jízdě z kopce dolů pak bude $t_2 = \frac{s}{v_2}$.

Průměrnou rychlost pohybu pak určíme podle známého vztahu (2.5)

$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, v němž $\Delta s = s + s = 2s$ (dráha dohromady nahoru i dolů) a $\Delta t = t_1 + t_2$.

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2.30\ \text{km.h}^{-1}.90\ \text{km.h}^{-1}}{(30+90)\ \text{km.h}^{-1}} = 45\ \text{km.h}^{-1}$$

Průměrná rychlost auta je tedy jen 45 km.h^{-1}; všimněte si, že je bližší nižší rychlosti, kterou se auto pohybuje delší čas. V našem případě (kdy je stejná dráha při pohybu nahoru i dolů) musí dokonce platit, že

$$\frac{v_p - v_1}{v_2 - v_p} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{30\ \text{km.h}^{-1}}{90\ \text{km.h}^{-1}} = \frac{1}{3} \quad .$$

Snadno si totiž můžete jednoduchou úpravou potvrdit, že výrazy

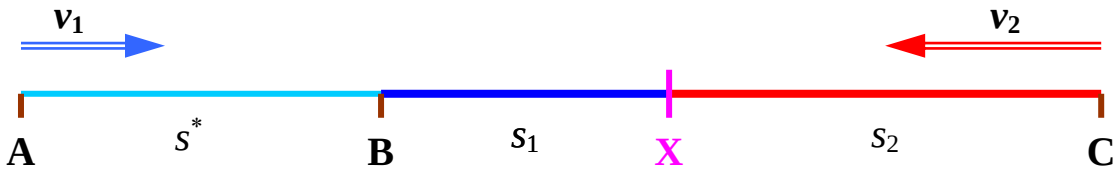
$$\frac{v_p - v_1}{v_2 - v_p} = \frac{v_1}{v_2} \qquad \text{a} \qquad v_p = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$$

jsou naprosto identické.

Na závěr tohoto článku ještě jedna úloha. Při řešení rovnoměrných pohybů totiž nemusíme vždy sledovat jen pohyb jednoho jediného objektu – podívejme se proto na následující **příklad:**

Ze dvou míst vzdálených od sebe 36 km postupně vyrazí proti sobě dva dopravní prostředky. První stálou rychlostí o velikosti 72 km.h^{-1}, druhý pak o 10 minut později rovněž stálou rychlostí 108 km.h^{-1}. Určete místo, kde se oba dopravní prostředky setkají.

Znázorněme si situaci popsanou v zadání naší úlohy jednoduchým schématem:



→ bod **A** představuje výchozí místo prvního prostředku (rychlost 72 km.h^{-1});

→ bod **B** představuje místo, kam tento první dopravní prostředek dojede za 10 minut od „startu“;

→ bod **C** představuje výchozí místo druhého prostředku (rychlost 108 km.h^{-1});

→ konečně bod **X** představuje hledané místo setkání.

Za deset minut (čas t^*) ujede první dopravní prostředek vzdálenost

$$\mathbf{AB} = s^* = v_1\, t^* = 72\ \text{km.h}^{-1} \cdot \frac{1}{6}\ \text{h} = 12\ \text{km}\ .$$

Od tohoto okamžiku se už oba prostředky pohybují z bodů **B** a **C** proti sobě současně a za jistý čas t se setkají v bodě **X**. Přitom pro vzdálenost **BC** = 24 km musí platit:

$$\mathbf{BC} = s_1 + s_2 = v_1\, t + v_2\, t = (v_1 + v_2)\, t \quad .$$

Odtud určíme čas t (okamžik setkání)

$$t = \frac{s_1 + s_2}{v_1 + v_2} = \frac{24\ \text{km}}{(72+108)\ \text{km.h}^{-1}} = 0{,}1\overline{3}\ \text{h} = 8\ \text{min}\ .$$

Za tento čas ujede první dopravní prostředek vzdálenost

$$\mathbf{BX} = s_1 = v_1\, t = 72\ \text{km.h}^{-1} \cdot 0{,}1\overline{3}\ \text{h} = 9{,}6\ \text{km}\ ,$$

druhý dopravní prostředek pak vzdálenost

$$\mathbf{CX} = s_2 = v_2\, t = 108\ \text{km.h}^{-1} \cdot 0{,}1\overline{3}\ \text{h} = 14{,}4\ \text{km}\ .$$

Vidíme, že skutečně platí $s_1 + s_2 = 24$ km.

Odpověď: Dopravní prostředky se setkají v místě, jež je 21,6 km vzdáleno od bodu, z nějž dříve vyrazil pomalejší prostředek a 14,4 km od výchozího bodu rychlejšího prostředku.

* * *

b) Pohyb přímočarý rovnoměrně zrychlený

Všechny ostatní pohyby, u nichž se **velikost rychlosti s časem mění**, jsou pohyby *nerovnoměrné*. Takových pohybů je vlastně nekonečná škála a jejich řešení je obecně poměrně komplikované. Obvykle k tomu potřebujeme úplnou znalost všech sil působících na příslušný hmotný objekt a z matematického hlediska solidní zběhlost v operacích diferenciálního a integrálního počtu. V následující kapitole „**Dynamika pohybu hmotného bodu**“ budeme např. řešit pohyb tělesa, jež je brzděno silou charakterizující odpor prostředí proti pohybu tělesa, silou, jež je v takovém případě závislá na velikosti rychlosti pohybujícího se objektu.

Mezi nerovnoměrnými pohyby však existuje jeden, jenž je relativně velmi jednoduchý, k jeho zvládnutí nám stačí pouhá znalost základů algebry. Měli byste jej dobře znát už ze střední školy – je to pohyb **rovnoměrně zrychlený**.

Pro velikost rychlosti rovnoměrně zrychleného pohybu je charakteristické to, že se za stejný časový úsek Δt vždy zvětší (resp. zmenší) o stejnou hodnotu Δv.

Velikost rychlosti se tedy mění pravidelně s časem. Tím pádem tečné zrychlení takového pohybu (a u pohybů přímočarých i zrychlení celkové) zůstává stále stejně velké ($a = a_t = konst.$) a pochopitelně nenulové. Matematicky lze závislost rychlosti rovnoměrně zrychleného pohybu na čase vyjádřit jednoduchou lineární funkcí

$$v = a\,t + v_o \quad . \tag{2.15}$$

Lze snadno odvodit, že pro dráhu s pak následně platí složitější kvadratická závislost

$$s = \frac{1}{2} a\,t^2 + v_o\,t + s_o \quad . \tag{2.16}$$

V těchto dvou vztazích přitom představují fyzikální veličiny v_o a s_o tzv. ***počáteční rychlost*** a ***počáteční dráhu*** hmotného bodu, jež jsou naměřeny v čase $t_o = 0$ s (tedy v okamžiku „zmáčknutí stopek“). Počáteční dráhu – stejně jako u předchozího pohybu rovnoměrného – opět většinou považujeme za nulovou, ale **pozor** na počáteční rychlost v_o **!!!** Ta nulová často nebývá – zejména je to zřejmé u pohybů zpomalených, ale a i nárůst rychlosti nemusí vždy začínat z klidu.

Pouze pohyb rovnoměrně zrychlený a navíc začínající z klidu má rychlost $v_o = 0\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

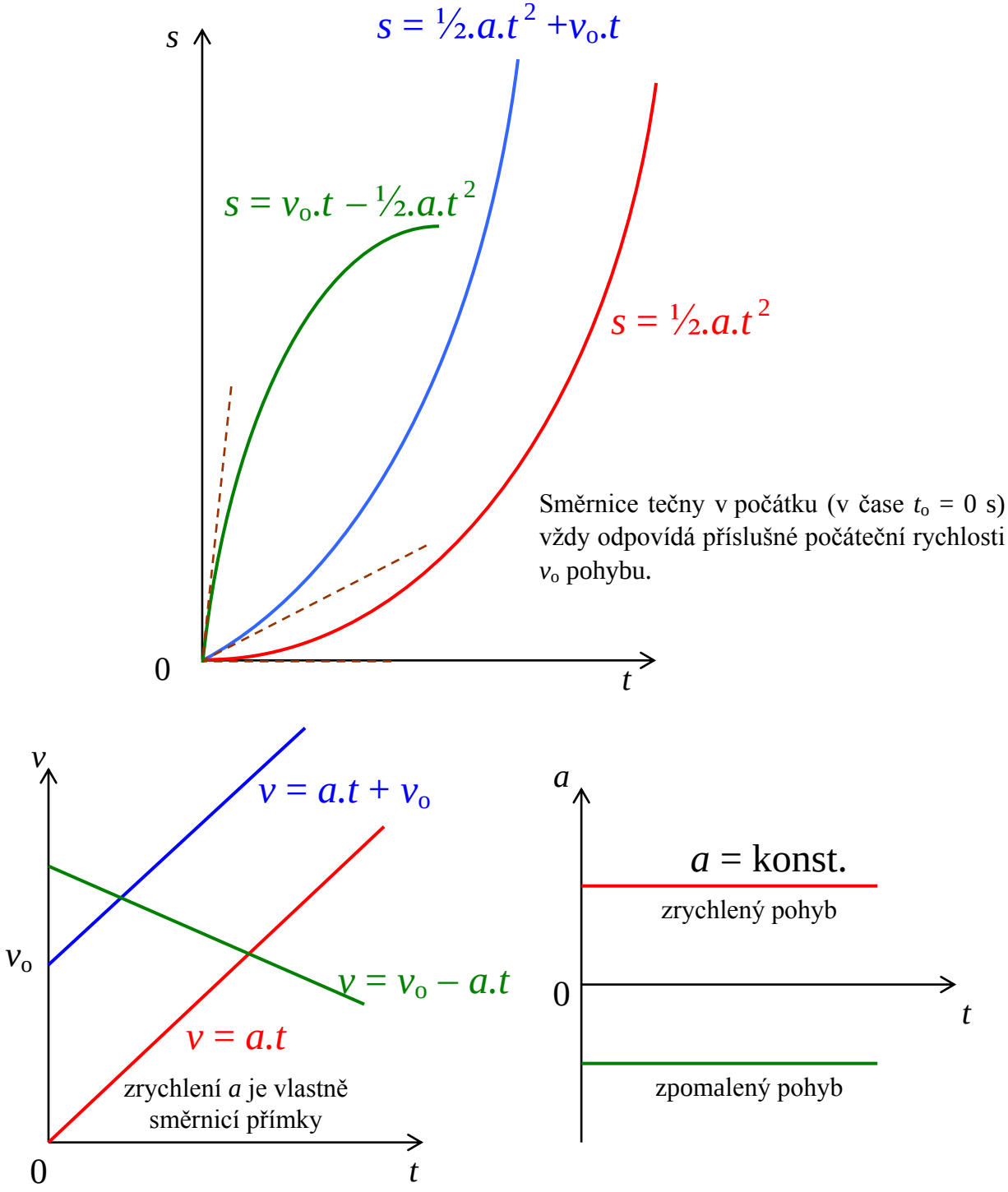
Rovnice (2.15) a (2.16) charakterizují rovnoměrně zrychlené pohyby, kdy velikost rychlosti s časem pravidelně vzrůstá. Pod pojmem rovnoměrně zrychlený pohyb jsou ale zahrnuty i pohyby, u nichž dochází k pravidelnému poklesu rychlosti (tzv. pohyb rovnoměrně zpomalený). Rovnice tohoto pohybu se liší ve znaménku u zrychlení. Tady píšeme závislost rychlosti na čase ve tvaru

$$v = v_o - a\,t \tag{2.17}$$

a závislost dráhy na čase

$$s = v_o\,t - \frac{1}{2}a\,t^2 \quad . \tag{2.18}$$

Závislosti dráhy, rychlosti a zrychlení na čase pak vyjadřují následující grafy (obr. 2.8).



Obr. 2.8 – grafické závislosti dráhy, rychlosti a zrychlení pohybu přímočarého rovnoměrně zrychleného na čase

Příklady:

1) Vlak se rozjíždí z klidu se stálým zrychlením velikosti 0,5 $\mathrm{m.s^{-2}}$. Za jakou dobu od rozjezdu dosáhne rychlosti 90 $\mathrm{km.h^{-1}}$ a jakou dráhu přitom ujede?

Jelikož jsou v této úloze počáteční rychlost pohybu v_o i počáteční dráha s_o nulové veličiny, vztahy (2.15) a (2.16) pro dráhu a rychlost se nám značně zjednoduší a přejdou ve výrazy

$$\boxed{v = a.t \;\; ; \;\; s = \frac{1}{2}.a.t^2} \quad . \qquad (2.19)$$

Z rovnice pro rychlost nejprve spočítáme hledaný čas (pozor na dosazení velikosti rychlosti v metrech za sekundu !!!)

$$t = \frac{v}{a} = \frac{25\ \mathrm{m.s^{-1}}}{0{,}5\ \mathrm{m.s^{-2}}} = 50\ \mathrm{s}$$

a po jeho dosazení do vztahu pro dráhu i tento druhý údaj

$$s = \frac{1}{2} 0{,}5.\ 0{,}5\ \mathrm{m.s^{-2}}.(50\ \mathrm{s})^2 = 625\ \mathrm{m} \quad .$$

Odpověď: Vlak dosáhne rychlosti 90 $\mathrm{km.h^{-1}}$ právě 50 s po odjezdu ze stanice a ujede přitom dráhu 625 metrů.

Uvědomte si, že se při tomto výpočtu (ale vlastně při všech rozjezdech i všech brzděních) dopouštíme určitého zjednodušení – reálný rozjezd nebo brzdění každého dopravního prostředku je určitě **pohyb nerovnoměrně zrychlený**. Námi použitý postup je tak vlastně jen určitým (ale zato početně schůdným) přiblížením k realitě.

2) Vlak jedoucí rychlostí 108 $\mathrm{km.h^{-1}}$ rovnoměrně při brzdění snižoval svoji rychlost a zastavil za 40 s. Určete velikost zrychlení vlaku a jeho brzdnou dráhu.

Počáteční rychlost v_o vlaku je v tomto případě nenulová $v_o = 30\ \mathrm{m.s^{-1}}$, při brzdění pak postupně klesá a po 40 sekundách (tedy v čase $t = 40$ s) je $v = 0\ \mathrm{m.s^{-1}}$ (vlak se zastaví).

Zrychlení a vlaku snadno vypočítáme z rovnice pro rychlost pohybu (2.17):

$$a = \frac{v_o - v}{t} = \frac{30\ \mathrm{m.s^{-1}} - 0\ \mathrm{m.s^{-1}}}{40\ \mathrm{s}} = 0{,}75\ \mathrm{m.s^{-2}} \rightarrow$$

velikost zrychlení (zpomalení) tohoto pohybu je 0,75 $\mathrm{m.s^{-2}}$.

Brzdnou dráhu vlaku pak spočítáme jako

$$s = v_o.t - \frac{1}{2}.a.t^2 = 30\ \mathrm{m.s^{-1}}.40\ \mathrm{s} - \frac{1}{2}.0{,}75\ \mathrm{m.s^{-2}}.(40\ \mathrm{s})^2 = 1\,200\ \mathrm{m} - 600\ \mathrm{m} = 600\ \mathrm{m} \quad .$$

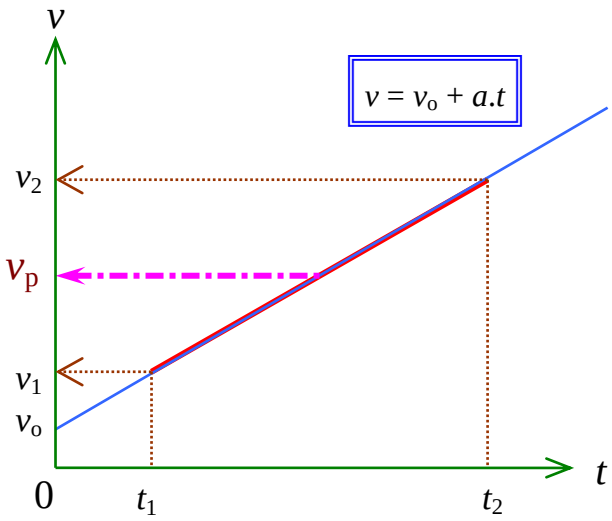
Odpověď: Velikost zrychlení vlaku je 0,75 $\mathrm{m.s^{-2}}$ a jeho brzdná dráha činí 600 metrů.

Důležitá poznámka č. 1:

Jelikož má závislost rychlosti v pohybu rovnoměrně zrychleného na čase t právě lineární průběh (viz vedlejší obrázek 2.9)), lze v tomto případě veice snadno určit průměrnou rychlost v_p pohybu v intervalu $\langle t_1; t_2 \rangle$ jako ***aritmetický průměr*** rychlostí v_1 na počátku a v_2 na konci tohoto měřeného úseku

$$v_p = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad . \qquad (2.20)$$

Této skutečnosti lze využít při řešení řady výpočtových úloh na pohyb rovnoměrně zrychlený (a samozřejmě i zpomalený), což lze snadno ověřit i u dvou výše řešených příkladů.



Obr. 2.9 – průměrná rychlost pohybu rovnoměrně zrychleného

Např. v příkladu 2) vychází průměrná rychlost vlaku během brzdění

$$v_p = \tfrac{1}{2}\,(30 + 0)\ \mathrm{m.s^{-1}} = 15\ \mathrm{m.s^{-1}} \quad ,$$

což při brzdném čase 40 s představuje ujetou dráhu

$$s = v_p \,.\, t = 15\ \mathrm{m.s^{-1}} \,.\, 40\ \mathrm{s} = 600\ \mathrm{m} \quad .$$

Důležitá poznámka č. 2:

Dosud uváděné rovnice pohybu rovnoměrně zrychleného ((2.15) až (2.18)) vyjadřují zvlášť závislost rychlosti a dráhy na čase. V některých úlohách (kdy není čas zadán nebo ho ani nemusíme počítat) se může dobře k výpočtu hodit i vztah platící pouze mezi rychlostmi, drahou a zrychlením. Tento „bezčasový“ výraz lze snadno odvodit vyloučením času z uvedených rovnic. Po krátké úpravě, kterou si můžete vyzkoušet sami, dostaneme, že

$$s = \frac{v^2 - v_o^{\,2}}{2\,a} \qquad (2.21)$$

pro pohyb ***rovnoměrně zrychlený***, resp.

$$s = \frac{v_o^{\,2} - v^2}{2\,a} \qquad (2.22)$$

pro pohyb ***rovnoměrně zpomalený***.

Vyzkoušet si to ostatně můžeme i na následujícím **příkladu:**

3) Rychlost tělesa vzrůstá se stálým zrychlením 0,5 $m.s^{-2}$. V určitém místě má těleso rychlost o velikosti 30 $m.s^{-1}$. Jaké rychlosti dosáhne o 1,6 km dále?

Čas není zadán, proto k výpočtu využijeme vztah (2.21), jehož krátkou úpravou okamžitě dostáváme pro hledanou rychlost

$$v = \sqrt{v_o^2 + 2as} = \sqrt{30^2 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 1600}\ \text{m.s}^{-1} = 50\ \text{m.s}^{-1} \quad .$$

Odpověď: Velikost hledané rychlosti je 50 $m.s^{-1}$.

Kdybychom měli navíc určit i čas, jak dlouho uražení uvedených 1,6 km trvalo, můžeme si zvolit při výpočtu buď vztah (2.15) pro závislost rychlosti rovnoměrně zrychleného pohybu na čase, nebo můžeme opět využít průměrné rychlosti během pohybu. Oba postupy pochopitelně dají stejný výsledek (ověřte si **!!!**) $t = 40$ s .

2.1.6 Pohyby křivočaré

!! Každý křivočarý pohyb je charakteristický změnou směru vektoru okamžité rychlosti, tedy u těchto pohybů má vždy hmotný bod jisté dostředivé (normálové) zrychlení $\boldsymbol{a}_n$, ať už se velikost jeho rychlosti mění nebo ne. Proto i rovnoměrný pohyb křivočarý

je pohybem se zrychlením !!!

a) Pohyb rovnoměrný křivočarý:

Od podobného pohybu po přímce se liší pouze tím, že vektor rychlosti $\vec{V}$ mění svůj směr. Jeho velikost ale zůstává stálá (konstantní), a tak závislost dráhy uražené hmotným bodem za určitý čas t vyjadřuje naprosto stejný výraz jako u pohybu rovnoměrného přímočarého, tedy

$$\boxed{s = v.t + s_o} \quad . \qquad (2.14)$$

v němž veličina s_o představuje opět tzv. počáteční dráhu v čase $t_o = 0$ s.

Tečné zrychlení takového pohybu musí být evidentně nulové ($a_t = 0\ \text{m.s}^{-2}$), ale protože dochází ke změně směru vektoru rychlosti, bude tento rovnoměrný pohyb pohybem se zrychlením

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R}} \quad , \qquad (2.12)$$

jehož velikost závisí pouze na poloměru R křivosti dané trajektorie, po níž se hmotný bod pohybuje:

- malý poloměr R křivosti ⇒ větší zakřivení trajektorie ⇒ vyšší hodnota dostředivého zrychlení;
- velký poloměr R křivosti ⇒ menší zakřivení trajektorie ⇒ menší dostředivé zrychlení;

Příklad:
Jaké je zrychlení koncového bodu vteřinové ručičky hodin, je-li její délka 25 cm ?

Koncový bod vteřinové ručičky urazí dráhu

$$s = 2\pi R = 2\pi \,.\, 0{,}25\ \mathrm{m} \doteq 1{,}57\ \mathrm{m}$$

za 60 s, jeho rychlost tedy bude

$$v = \frac{s}{t} = \frac{1{,}57\ \mathrm{m}}{60\ \mathrm{s}} \doteq 0{,}026\ \mathrm{m.s^{-1}} \quad .$$

Normálové zrychlení koncového bodu vteřinové ručičky pak vychází

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(0{,}026\ \mathrm{m.s^{-1}}\right)^2}{0{,}25\ \mathrm{m}} \doteq 2{,}74\,.\,10^{-3}\ \mathrm{m.s^{-2}} \quad .$$

b) Pohyb křivočarý rovnoměrně zrychlený:

I u tohoto typu pohybu dostáváme pro závislosti dráhy respektive rychlosti na čase výrazy ekvivalentní vztahům pro přímočarý rovnoměrně zrychlený (resp. zpomalený) pohyb. Protože se ale v těchto případech mění jak velikost, tak i směr vektoru okamžité rychlosti,

musíme důsledně odlišovat tečné, normálové a celkové zrychlení pohybu **!!!**

Ve vztazích, jež vyjadřují závislost velikosti rychlosti na čase a délku uražené dráhy za určitý čas, bude tudíž vždy vystupovat **tečné zrychlení** a_t . Jelikož se velikost rychlosti u rovnoměrně zrychlených pohybů mění pravidelně (rovnoměrně), musí být tato fyzikální veličina nutně konstantní (a navíc nenulová). Platí

$$a_t = konst. \neq 0\ \mathrm{m.s^{-2}} \quad .$$

A tak dostáváme následující výrazy pro závislost rychlosti na čase

$$\boxed{v = a_t\,.\,t + v_o} \qquad (2.23)$$

a dráhy na čase

$$\boxed{s = \frac{1}{2} a_t\, t^2 + v_o\, t} \quad . \qquad (2.24)$$

Bude-li křivočarý pohyb *rovnoměrně zpomaleným*, budeme psát závislost rychlosti na čase ve tvaru

$$\boxed{v = v_o - a_t\,.\,t} \qquad (2.25)$$

a závislost dráhy na čase

$$\boxed{s = v_o\, t - \frac{1}{2} a_t\, t^2} \quad . \qquad (2.26)$$

Ve vztazích (2.24) a (2.26) pro závislost dráhy na čase uvažujeme – jak je obvyklé – počáteční dráhu s_o nulovou.

Stejně jako u všech křivočarých pohybů, tak i rovnoměrně zrychlený pohyb křivočarý má ještě zrychlení normálové

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(a_t \,.\, t + v_o)^2}{R} \quad . \tag{2.27}$$

Toto zrychlení závisí na více parametrech – na poloměru křivosti trajektorie a na čase, s nímž se mění velikost okamžité rychlosti. A jak je patrné ze vztahu (2.27), obě složky celkového zrychlení pohybu nejsou v tomto případě na sobě nezávislé.

Příklad:
Vlak brzdí v zatáčce o poloměru křivosti 1 000 m tak, že se jeho rychlost rovnoměrně sníží ze 144 km/h na polovinu na dráze 800 m dlouhé. Určete **celkové zrychlení** vlaku na počátku a na konci uvedeného brzdného úseku.

Pohyb vlaku je rovnoměrně zpomalený křivočarý, jeho tečné zrychlení a_t je konstantní, normálové a_n se však s postupně klesající rychlostí zmenšuje, a tím pádem se mění i hodnota celkového zrychlení.

Tečné zrychlení vypočítáme např. pomocí vztahu (2.22). Jeho úpravou dostáváme

$$a_t = \frac{v_o^2 - v^2}{2\,s} = \frac{40^2 - 20^2}{2 \cdot 800}\ \mathrm{m.s^{-2}} = 0{,}75\ \mathrm{m.s^{-2}} \quad .$$

Rychlosti vlaku pochopitelně dosazujeme v jednotkách $\mathrm{m.s^{-1}}$.

Normálové zrychlení na začátku brzdného úseku bude

$$a_{n\,o} = \frac{v_o^2}{R} = \frac{40^2}{1000}\ \mathrm{m.s^{-2}} = 1{,}6\ \mathrm{m.s^{-2}}$$

a na jeho konci

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{20^2}{1000}\ \mathrm{m.s^{-2}} = 0{,}4\ \mathrm{m.s^{-2}} \quad .$$

Hodnota celkového zrychlení vlaku na začátku brzdného úseku tak vychází

$$a_o = \sqrt{a_t^{\,2} + a_{n\,o}^{\,2}} = \sqrt{0{,}75^2 + 1{,}6^2}\ \mathrm{m.s^{-2}} \doteq 1{,}77\ \mathrm{m.s^{-2}}$$

a na jeho konci

$$a = \sqrt{a_t^{\,2} + a_n^{\,2}} = \sqrt{0{,}75^2 + 0{,}4^2}\ \mathrm{m.s^{-2}} = 0{,}85\ \mathrm{m.s^{-2}} \quad .$$

Z těchto dvou konečných výsledků celkem jasně vyplývá, že na začátku brzdného úseku se u rychlosti mění hlavně její směr, na konci už je „dominujícím efektem“ změna velikosti rychlosti vlaku. Stačí si jen uvědomit, která z obou veličin (zda a_t nebo a_n) víc přispívá do hodnoty celkového zrychlení a.

Poznámka na závěr: Při studiu křivočarých pohybů (jako je např. pohyb hmotného bodu po kružnici) je vhodné zavést pro jednodušší popis pohybu systém tzv. **úhlových veličin**. Těmi jsou úhlová dráha φ, úhlová rychlost ω a úhlové zrychlení α. I když se zavádění úhlových veličin může na první pohled jevit jako „zbytečný přepych“, uvidíme později při studiu rotace tuhého tělesa (viz **článek 4.1.2**), že bez těchto veličin bychom zmíněný typ pohybu nebyli vůbec schopni popsat a řešit.

2.1.7 Složené pohyby

V mechanice se často setkáváme s tím, že zkoumaný objekt koná současně dva nebo více pohybů. Typické jsou pohyby těles v pohybujících se prostředích (např. letící letadlo a vítr, loď nebo plavec v proudící vodě v řece), ale setkáváme se s tím i při známých pohybech těles v tíhovém poli Země (vrh svislý vzhůru, vodorovný a šikmý vrh) a u celé řady dalších. V takových případech se uplatní ***zákon nezávislosti pohybů*** – jestliže koná hmotný bod nebo těleso z různých příčin dva nebo více pohybů současně, je jeho výsledná poloha nezávislá na tom, zda koná tyto pohyby současně nebo v libovolném pořadí za sebou (pochopitelně ale každý pohyb vždy po stejný čas t).

Například při skládání dvou pohybů platí pro polohový vektor $\boldsymbol{r}$ výsledného pohybu

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_1(t) + \boldsymbol{r}_2(t) \quad .$$

Jinými slovy – koná-li objekt složený pohyb, je jeho poloha v jistém čase t stejná, jako kdyby konal nejprve po stejný čas první z pohybů, a potom po týž čas pohyb druhý (nebo naopak). Vždy se musí dostat do stejného místa v prostoru.

Pro rychlosti a zrychlení složeného pohybu pak obdobné vztahy

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_1(t) + \boldsymbol{v}_2(t) \quad ,$$
$$\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a}_1(t) + \boldsymbol{a}_2(t) \quad .$$

Pozn.: Stejně jako lze více pohybů konaných současně nahradit jediným složeným pohybem, lze logicky provádět i postup opačný – rozkládat jeden daný pohyb na několik dílčích (většinou jednodušších) pohybů.

2.1.8 Pohyby těles v homogenním tíhovém poli Země

Tato skupina pohybů zahrnuje jednak volný pád těles a jednak pohyby složené, jež označujeme jako vrhy těles. Zde si některé z nich podrobněji rozebereme. Studovat budeme pochopitelně ideální modelové situace, kdy budeme uvažovat, že k těmto pohybům dochází ve vzduchoprázdnu (ve vakuu), abychom vyloučili vliv odporu prostředí.

a) Volný pád

Je z pohybů těles v homogenním tíhovém poli Země pohybem nejjednodušším – jedná se o typický rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb hmotného objektu z klidu (tedy s počáteční nulovou rychlostí), přičemž hodnota konstantního zrychlení je známa – je to tíhové zrychlení $\boldsymbol{g}$. Jeho velikost je 9,806 65 $\mathrm{m.s^{-2}}$ (přesně), ovšem ve většině příkladů (hlavně pro jednoduchost numerického výpočtu) pak obvykle tuto hodnotu zaokrouhlujeme na $g \doteq 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$.

Dráha volně padajícího tělesa, kterou urazí za čas t od počátku pohybu bude v souladu s (2.19) dána vztahem

$$s = \frac{1}{2}.g.t^2 \qquad (2.28)$$

a těleso přitom získá za tento čas rychlost o velikosti

$$v = g.t \quad . \qquad (2.29)$$

Příklad:
Jakou rychlostí by dopadl kámen na dno propasti hluboké 125 m, kdybychom považovali jeho pohyb za ideální volný pád (kdybychom nebrali v úvahu odpor vzduchu)?

Ze vztahů pro dráhu a rychlost volného pádu vyloučíme čas a získáme tak závislost pouze mezi dráhou a rychlostí u tohoto pohybu

$$s = \frac{1}{2}.g.t^2 = \frac{1}{2}.g.\left(\frac{v}{g}\right)^2 = \frac{v^2}{2g}$$

Z této závislosti pak dostáváme pro hledanou rychlost dopadu výraz

$$v = \sqrt{2.g.s} = \sqrt{2.10\ \mathrm{m.s^{-2}}.125\ \mathrm{m}} = \sqrt{2500\ \mathrm{m^2.s^{-2}}} = 50\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

Odpověď: Kámen by dopadl na dno propasti rychlostí 50 $\mathrm{m.s^{-1}}$.

* * *

Složitější případy nastávají tehdy, udělíme-li tělesu v homogenním tíhovém poli jistou nenulovou počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_0$. Hmotný objekt pak bude vždy vykonávat pohyb složený, a to ze dvou pohybů:

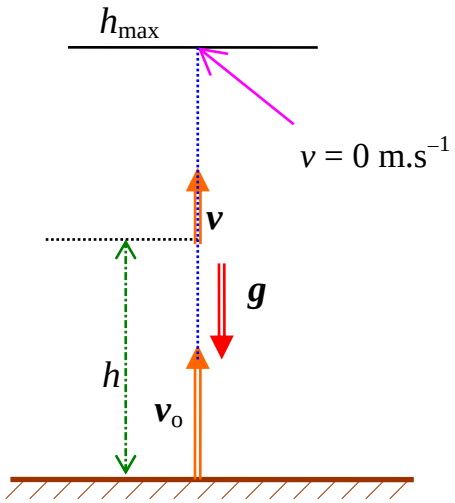
→ 1. rovnoměrného přímočarého pohybu ve směru vektoru počáteční rychlosti $\boldsymbol{v}_0$,

→ 2. volného pádu ve směru vektoru tíhového zrychlení $\boldsymbol{g}$.

Výsledný pohyb pak nazýváme **vrh tělesa**. Podle směru vektoru počáteční rychlosti $\boldsymbol{v}_o$ vzhledem k zemskému povrchu rozlišujeme vrh svislý vzhůru, vodorovný a šikmý. První z nich je stejně jako výše vyložený volný pád pohybem přímočarým rovnoměrně zrychleným (resp. v jeho první fázi zpomaleným) – platí zde totiž, že vektory $\boldsymbol{v}_o \parallel \boldsymbol{g}$ **!!!** Ostatní zbývající vrhy – vrh vodorovný a šikmý – (u nichž vektory $\boldsymbol{v}_o$ a $\boldsymbol{g}$ nejsou navzájem rovnoběžné) jsou pohyby křivočarými a navíc, jak si dokážeme na přednášce, oba jsou pohyby **nerovnoměrně** zrychlené.

b) Vrh svislý vzhůru

Tento druh pohybu koná těleso, jehož počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_o$ je právě opačného směru, než je směr vektoru tíhového zrychlení $\boldsymbol{g}$ (viz připojený obr. 2.10) Pohyb je tudíž přímočarý a až do nejvyššího bodu trajektorie (výška h_{max}) rovnoměrně zpomalený. Z tohoto bodu pak těleso padá zpět volným pádem k Zemi.



Obr. 2.10 – vrh svislý vzhůru

Velikost okamžité rychlosti tělesa v čase t od počátku pohybu je proto možno v souladu s rovnicí (2.17) vyjádřit vztahem

$$v = v_o - g.t \qquad (2.30)$$

a vzdálenost tělesa od místa vrhu (obvykle je to výška h nad povrchem Země) zase na základě rovnice (2.18) výrazem

$$h = v_o.t - \frac{1}{2}.g.t^2 \quad . \qquad (2.31)$$

V obou rovnicích už dosazujeme podle naši dřívější „dohody“ hodnotu zrychlení se záporným znaménkem ($-g$) typickým právě pro zpomalené pohyby.

Pozn.: Uvedené rovnice (2.30) a (2.31) pro rychlost a výšku vrhu svislého vzhůru lze získat i druhým postupem vycházejícím právě z principu skládání pohybů. A to tak, že vlastně od sebe odečteme rychlosti, resp. dráhy proti sobě orientovaných pohybů – rovnoměrného přímočarého svisle vzhůru a volného pádu svisle dolů.

Maximální výšku h_{max} vrhu svislého vzhůru lze určit ze známé skutečnosti, že v tomto bodě je rychlost tělesa právě nulová.

Dosadíme proto její hodnotu do rovnice (2.30)

$$v_o - g \,.\, t = 0$$

a dostáváme pro **dobu t^* výstupu** vztah $t^* = \frac{v_o}{g}$, po jehož dosazení do rovnice (2.31) pro výšku vrhu h a po krátké úpravě (tu si ale proveďte sami!) získáme hledanou maximální výšku výstupu

$$\boxed{h_{max} = \frac{v_o^{\,2}}{2g}} \quad . \qquad (2.32)$$

Jednoduchým výpočtem po dosazení do vztahu pro rychlost volného pádu z výšky h_{max} pak snadno dokážeme, že tato dopadová rychlost musí mít stejnou velikost jako počáteční rychlost v_o svislého vzhůru

$$v = \sqrt{2.g.h_{max}} = \sqrt{2.g\,\frac{v_o^{\,2}}{2.g}} = v_o \quad .$$

Příklad:
Těleso bylo vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí 40 $m.s^{-1}$. Do jaké maximální výšky vystoupá, jestliže zanedbáme odpor vzduchu? Jak dlouho mu potrvá výstup do výšky, jež je rovna právě polovině maximální výšky tohoto vrhu?

Po dosazení do výše uvedeného vztahu (2.32) snadno určíme maximální výšku vrhu

$$h_{max} = \frac{v_o^{\,2}}{2g} = \frac{(40\ \text{m.s}^{-1})^2}{2.10\ \text{m.s}^{-2}} = 80\ \text{m} \qquad \text{(Doba výstupu je přitom } t^* = 4\ \text{s)}$$

Na druhou otázku dá odpověď řešení rovnice (2.31) pro okamžitou výšku vrhu

$h = v_o.t - \frac{1}{2}.g.t^2$, kde $h = 40$ m

Jedná se o kvadratickou rovnici, v níž neznámou je čas t :

$g.t^2 - 2\,v_o\,t + 2\,h = 0$

Jejím řešením je:

$$t_{1,2} = \frac{2v_o \pm \sqrt{4v_o^{\,2} - 8.g.h}}{2.g} \quad .$$

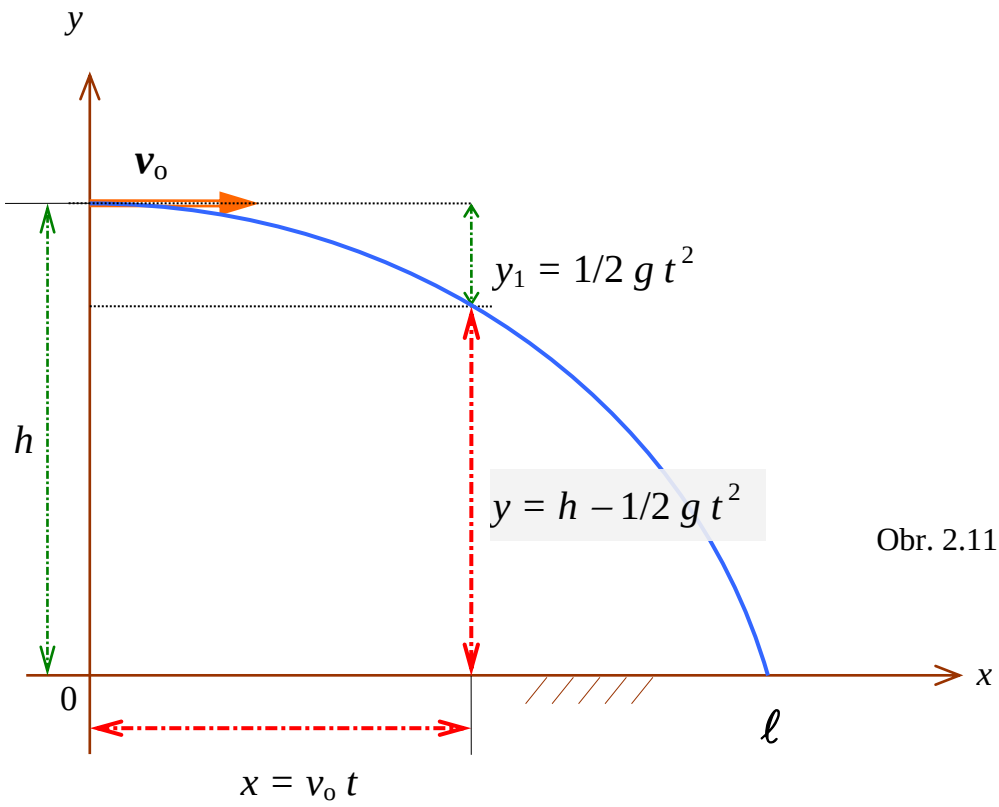
Po dosazení zadaných hodnot pak dostáváme dvě reálná řešení:

$$t_1 \doteq 1{,}2\ \text{s} \ ; \ t_2 \doteq 6{,}8\ \text{s} \quad .$$

První řešení odpovídá první fázi vrhu, kdy těleso stoupá směrem vzhůru pohybem rovnoměrně zpomaleným, druhý čas pak přísluší již zpáteční cestě, kdy se těleso vrací zpět k Zemi volným pádem. Povšimněte si, že obě řešení vycházejí „symetricky“ vzhledem k času $t^* = 4$ s (tedy kolem doby výstupu).

c) Vodorovný vrh

Tento složený pohyb uskutečníme, udělíme-li tělesu počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_o$ ve směru vodorovném s povrchem Země (a tím pádem tedy kolmém na směr vektoru tíhového zrychlení $\boldsymbol{g}$). Pohyb bude křivočarý, není problém dokázat, že jeho trajektorií bude *část paraboly*, jež má svůj vrchol v místě odhodu tělesa.



Obr. 2.11 – vodorovný vrh

Zavedeme si pro řešení tohoto pohybu pravoúhlou souřadnicovou soustavu 0*xy* tak, že *x*-ová souřadnice bude představovat okamžitou délku vrhu a *y*-ová okamžitou výšku vrhu tělesa (viz vedlejší obr. 2.11). Potom v čase *t*, jenž měříme od počátku pohybu, dostáváme tyto souřadnice pohybujícího se tělesa

$$x = v_o . t \quad ; \quad y = h - \frac{1}{2} . g . t^2 \quad , \tag{2.33}$$

kde *h* je výška, z níž bylo těleso vodorovně vyhozeno. **Délku vrhu** ℓ ve vodorovném směru pak určíme snadno z elementární podmínky $x = \ell \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ m}$.

Toto odvození si vyzkoušejte sami – je to celkem nenáročná úloha na úpravu výrazů. Pro délku vrhu musíte nakonec dostat výsledek

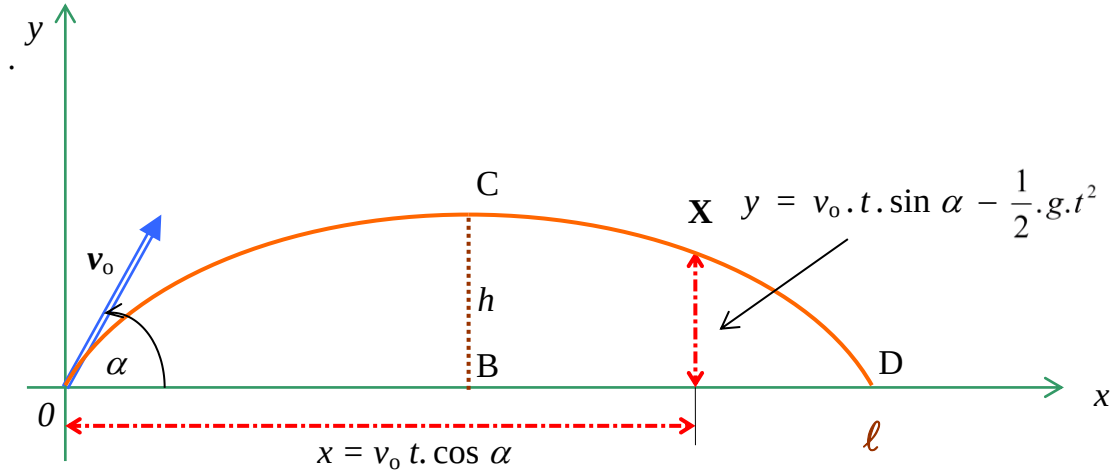
$$\ell = v_o . \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad . \tag{2.34}$$

d) Vrh šikmý vzhůru

Poslední ze zmíněných pohybů probíhá tehdy, když je tělesu udělena počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_o$, jež svírá s vodorovnou rovinou určitý nenulový úhel α (nazývaný též elevační úhel). Trajektorií pohybu je *parabola* mající vrchol v nejvyšším bodě B (viz obr. 2.12 na následující straně). Vzdálenost BC je maximální **výška vrhu** h, vzdálenost OD pak celková **délka vrhu** ℓ.

Zavedeme-li souřadnicovou soustavu *0xy* tak, že počátek *0* je místem odhodu tělesa a *x*-ová souřadnice představuje okamžitou délku, *y*-ová pak okamžitou výšku vrhu tělesa nad Zemí, bude těleso v čase *t* od počátku pohybu v bodě **X** o souřadnicích

$$x = v_o . t . \cos\alpha \quad ; \quad y = v_o . t . \sin\alpha - \frac{1}{2} . g . t^2 \quad . \qquad (2.35)$$



Obr. 2.12 – vrh šikmý vzhůru

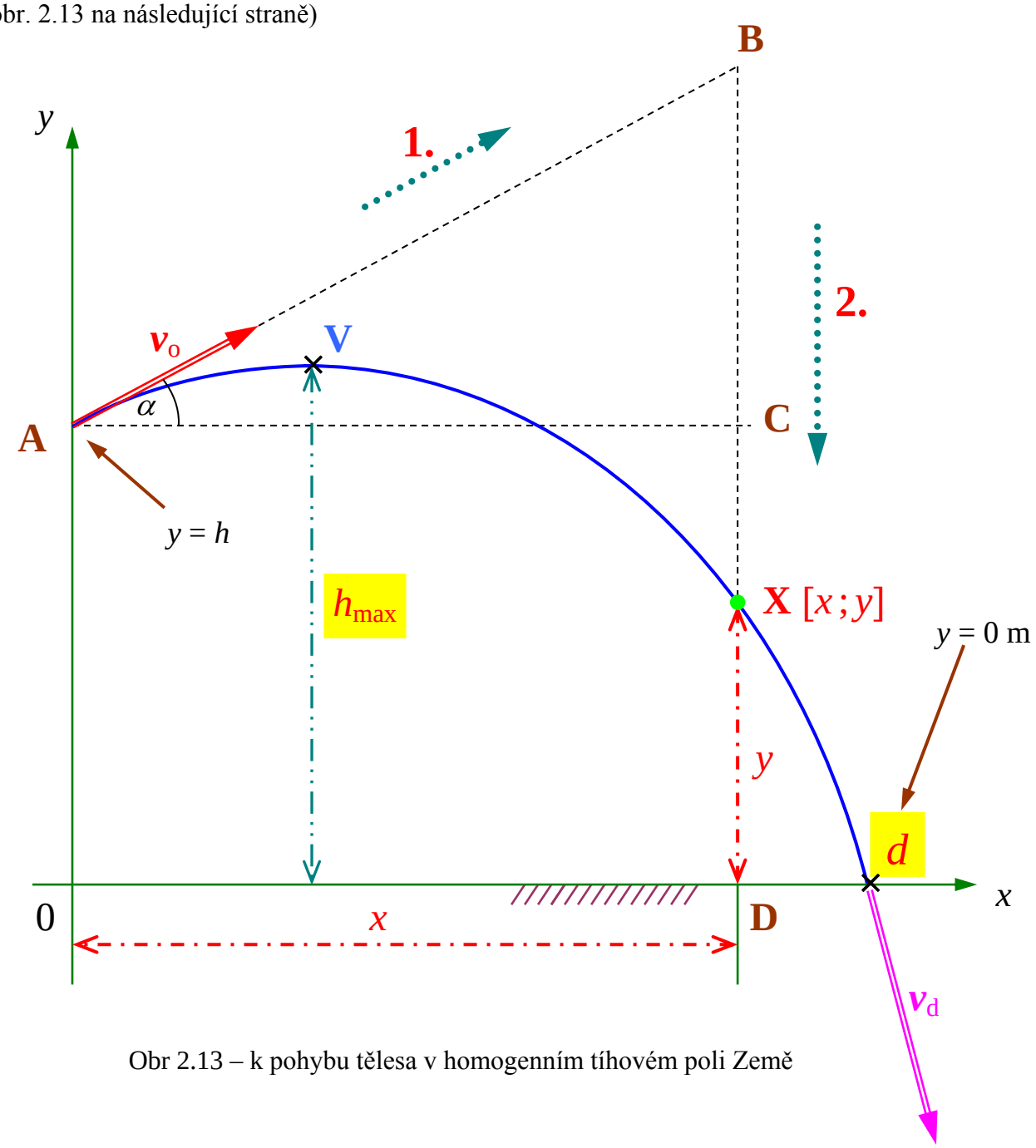
Celkovou **délku šikmého vrhu** ℓ ve vodorovném směru určíme opět z jednoduché podmínky, že v tomto bodě je okamžitá výška vrhu právě nulová ($y = 0$ m pro $x = \ell$). Po kratší úpravě (tu si můžete zase provést sami) pak dostáváme, že

$$\ell = \frac{v^2}{g} . \sin 2\alpha \quad . \qquad (2.36)$$

Z tohoto vztahu pak vyplývá i známá skutečnost, že při určité počáteční rychlosti v_o šikmého vrhu je délka vrhu ℓ největší při elevačním úhlu $\alpha = 45^o$. A také ze vztahu (2.36) plyne ten závěr, že těleso vyhozené pod úhlem α a pod úhlem doplňkovým k němu do pravého úhlu (t.j. $90^o - \alpha$) dopadne do stejné vzdálenosti ℓ.

e) Obecné řešení pohybů v homogenním tíhovém poli Země

Na závěr tohoto článku se podívejme na studovanou problematiku z trochu obecnějšího pohledu. Nezkoumejme pohyby těles v homogenním tíhovém poli Země odděleně každý zvlášť, ale řešme naprosto obecný případ, kdy těleso vyhodíme z bodu **A** v libovolné výšce h nad zemským povrchem počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_o$, jež svírá s vodorovným směrem (tj. povrchem Země) úhel α (viz obr. 2.13 na následující straně)



Obr 2.13 – k pohybu tělesa v homogenním tíhovém poli Země

Pohyb tělesa si můžeme představit jako pohyb složený ze dvou přímočarých pohybů:

→ **1.** rovnoměrný pohyb stálou rychlostí $\boldsymbol{v}_o$ z bodu **A** do bodu **B**;

→ **2.** volný pád se stálým tíhovým zrychlením $\boldsymbol{g}$ z bodu **B** do bodu **X** na parabole.

Musí tedy platit …….$|AB| = v_o . t \Rightarrow |AC| = |0D| = x = v_o . t . \cos\alpha$

$$|BX| = \tfrac{1}{2} g . t^2 \Rightarrow |DX| = y = |BC| + |CD| - |BX| =$$

$$= v_o . t . \sin\alpha + h - \tfrac{1}{2} g . t^2$$

Dostáváme tak parametrické rovnice trajektorie pohybu

$$\begin{aligned} x &= v_o . t . \cos\alpha \\ y &= v_o . t . \sin\alpha + h - \tfrac{1}{2} g . t^2 \end{aligned} \quad , \qquad (2.37)$$

přičemž souřadnice x představuje okamžitou vodorovnou vzdálenost od místa odhodu v čase t a souřadnice y pak okamžitou výšku tělesa na zemským povrchem. Vyloučením času t z obou rovnic pak dostaneme obecnou rovnici *paraboly* (za předpokladu, že elevační úhel α splňuje triviální podmínku $\alpha \neq \pm 90^{\circ}$)

$$y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_o^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2 + \operatorname{tg}\alpha . x + h \quad , \qquad (2.38)$$

jejíž osa je rovnoběžná se zápornou částí osy y. Určíme-li vrchol paraboly, budeme znát maximální výšku h_{max} tělesa nad zemským povrchem během jeho pohybu. K tomu stačí vypočítat první derivaci funkce $y = f(x)$ a položit ji rovnou nule:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g}{v_o^2 \cos^2\alpha} \cdot x + \operatorname{tg}\alpha = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x_V = \frac{v_o^2}{g} \cdot \sin\alpha . \cos\alpha \quad .$$

Tím jsme určili x-ovou souřadnici vrcholu paraboly, zbývá už jen dopočítat ze vztahu (2.38) druhou y-ovou souřadnici, a tím pádem i hledanou maximální výšku h_{max} tělesa nad zemským povrchem, neboť

$$h_{max} = y(x_V) \quad .$$

Po krátké úpravě, kterou si vyzkoušejte sami, tak dostaneme

$$h_{max} = h + \frac{v_o^2}{2g} \cdot \sin^2\alpha \quad . \qquad (2.39)$$

Při určování jiné veličiny – délky d dopadu tělesa (měřeno ve vodorovném směru) – je třeba zvolit jiný postup. Dopadne-li těleso na Zem, bude jeho y-ová souřadnice právě rovna nule. A pak už si můžeme vybrat dvojí cestu k cíli:

1) z parametrických rovnic paraboly (2.38) po dosazení za $y = 0$ m spočítáme čas t_d dopadu a ten následně dosadíme do rovnice pro x ;

2) z obecné rovnice paraboly (2.39) po dosazení za $y = 0$ m spočítáme délku d dopadu přímo.

V obou případech musíme řešit kvadratickou rovnici a v obou případech dostaneme vždy jeden kladný a jeden záporný kořen – z hlediska zadání úlohy však mají pochopitelně fyzikální význam pouze kladný čas t_d a kladná vzdálenost d. Jako výsledek tedy dostáváme

$$t_d = \frac{v_o \sin\alpha + \sqrt{v_o^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g} \qquad \text{a konečně i}$$

$$\boxed{d = v_o \cdot \frac{v_o \sin\alpha + \sqrt{v_o^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g} \cdot \cos\alpha} \quad . \quad (2.40)$$

Posledním naším úkolem bude určení dopadové rychlosti v_d tělesa na zemský povrch. Okamžitou rychlost pohybu tělesa při šikmém vrhu nejsnáze určíme, když vyjdeme z rychlostí v_x a v_y, jimiž se těleso pohybuje vzhledem k souřadnicovým osám. Nutně platí

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_o . \cos\alpha \quad ,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_o . \sin\alpha - g . t \quad .$$

Obě složky okamžité rychlosti jsou na sebe navzájem kolmé, a tak velikost v okamžité rychlosti snadno vypočítáme pomocí Pythagorovy věty

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_o^2 + g^2 t^2 - 2 v_o g t \cdot \sin\alpha} \quad . \qquad (*)$$

Hledanou velikost v_d dopadové rychlosti lze pak získat po dosazení času t_d dopadu do posledního výrazu, což ovšem představuje poměrně komplikovanou úpravu. Jednodušší je vyjít znovu z podmínky $y = 0$ m pro okamžik dopadu tělesa a tu nejprve upravit:

$$y = v_o . t . \sin\alpha + h - \tfrac{1}{2} g . t^2 = 0 \qquad / \ . 2g$$

$$2\,v_o\,g\,t\,.\,\sin\alpha \;=\; g^2t^2 \;-\; 2\,gh \qquad . \qquad \text{viz } (*)$$

Nyní už jen zbývá dosadit za výraz na levé straně do vztahu pod odmocninou pro okamžitou rychlost pohybu

$$v_d \;=\; \sqrt{v_o^{\,2} + g^2t^2 - (g^2t^2 - 2gh)}$$

a dostaneme tak konečný výsledek

$$\boxed{v_d \;=\; \sqrt{v_o^{\,2} + 2gh}} \qquad . \qquad (2.41)$$

Jak je na první pohled patrné, velikost dopadové rychlosti vůbec nezávisí na hodnotě úhlu, pod kterým bylo těleso vzhledem povrchu Země vyhozeno, ale pouze na počáteční výšce h a na velikosti v_o počáteční rychlosti v místě odhodu. !!

Tuto skutečnost lze velmi snadno potvrdit pomocí zákona zachování mechanické energie. Řešíme-li ideální vrh (tedy pohyb ve vakuu), je podmínka platnosti tohoto zákona splněna a musí tedy platit, že celková energie hozeného tělesa je stále stejná. Stejná bude při odhodu

$$E_o \;=\; \tfrac{1}{2}\,m\,v_o^{\,2} \;+\; mgh \quad \text{(a to bez ohledu na směr počáteční rychlosti } v_o\text{)}$$

a stejná bude i při dopadu tělesa na zem

$$E_d \;=\; \tfrac{1}{2}\,m\,v_d^{\,2} \quad .$$

Z rovnosti

$$\tfrac{1}{2}\,m\,v_o^{\,2} \;+\; mgh \;=\; \tfrac{1}{2}\,m\,v_d^{\,2}$$

už bezprostředně vyplývá, že skutečně platí

$$v_d \;=\; \sqrt{v_o^{\,2} + 2gh} \qquad . \qquad (2.41)$$

A na úplný závěr:

Námi odvozené vztahy (2.39), (2.40) a (2.41) získané řešením obecného pohybu tělesa, jež bylo vrženo za ideálních podmínek – s vyloučením odporu prostředí – v homogenním tíhovém poli Země z výšky h nad zemským povrchem jistou počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_o$, v sobě pochopitelně obsahují i výsledky, které jsme obdrželi dříve v odstavcích a) až d), kdy jsme studovali každý jednotlivý pohyb zvlášť.

Stačí totiž do těchto vztahů pouze dosadit příslušné hodnoty počáteční rychlosti $\boldsymbol{v}_o$ (jak její velikost, tak i její směr) a počáteční výšky h. Příklady těchto pohybů jsou uvedeny v závěrečné tabulce na následující straně. Předpokládejme, že se všechny odehrávají v prvním kvadrantu souřadnicového systému, což mimo jiné znamená, že vrhy směrem vzhůru jsou charakterizovány

kladnou hodnotou úhlu α a vrhy směrem dolů naopak zápornou hodnotou tohoto úhlu. Pro vodorovný vrh pochopitelně platí $\alpha = 0^{\circ}$.

Pohyby v homogenním tíhovém poli Země

charakteristické hodnoty počáteční výšky a počáteční rychlosti

Pohyb	Počáteční výška	Počáteční rychlost	
		velikost	směr
Volný pád	$h > 0$ m	$v_o = 0$ m.s^{-1}	$\alpha = -90^{\circ}$
Vrh svislý vzhůru ze Země	$h = 0$ m	$v_o > 0$ m.s^{-1}	$\alpha = +90^{\circ}$
Vrh svislý vzhůru nad Zemí	$h > 0$ m		
Vrh svislý dolů	$h > 0$ m		$\alpha = -90^{\circ}$
Vodorovný vrh	$h > 0$ m		$\alpha = 0^{\circ}$
Šikmý vrh vzhůru ze Země	$h = 0$ m		$0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$
Šikmý vrh vzhůru nad Zemí	$h > 0$ m		
Šikmý vrh dolů	$h > 0$ m		$-90^{\circ} < \alpha < 0^{\circ}$

2.2 Dynamika pohybu hmotného bodu

Dynamika je tou částí klasické mechaniky, jež se zabývá studiem pohybů a zejména příčinami jejich vzniku. Jejím základem jsou tři Newtonovy pohybové zákony formulované tímto geniálním myslitelem už před více jak 300 lety. Základní ideou newtonovské klasické mechaniky je, že pohyb každého hmotného objektu a všechny jeho změny jsou důsledkem působení jiných hmotných objektů. Fyzikální veličina, jež kvalitativně i kvantitativně popisuje toto vzájemné působení mezi hmotnými objekty, je **síla** $\boldsymbol{F}$ (jako typický vektor mající vždy jednoznačně definovaný ***směr***, jenž je dán směrem vzájemného působení mezi hmotnými objekty, dále ***působiště*** – místo, v němž dochází k onomu působení a také určitou ***velikost*** $|\vec{F}|$ vyjadřující míru vzájemného působení mezi objekty).

2.2.1 Vzájemné působení mezi tělesy

Vzájemné silové působení dvou nebo více těles (v literatuře se též běžně používá termínu **interakce** těles) se může projevovat dvěma naprosto odlišnými způsoby. Dochází k němu:

→ **při vzájemném dotyku (bezprostředním kontaktu) obou těles**,

→ **prostřednictvím silových polí**, aniž by se objekty dotýkaly (typická je taková interakce mezi hmotnými objekty v gravitačních polích nebo mezi nabitými tělesy v polích elektrických a magnetických).

Důsledky silového působení mezi tělesy pak lze rovněž rozdělit do dvou rozdílných kategorií:

→ **1. deformace tělesa** – v takovém případě se jedná o statický účinek působící síly,

→ **2. změna pohybového stavu tělesa** – zde hovoříme o dynamických účincích působící síly.

Jak již bylo řečeno, je **síla** $\boldsymbol{F}$ typická vektorová fyzikální veličina. Je vždy určena směrem, velikostí a nesmíme zapomínat na to, že i působištěm. Fyzikální jednotkou síly v soustavě SI je **newton** (N).

Přitom platí, že $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg.m.s^{-2}}$.

Působí-li na určitý hmotný bod několik sil současně (hovoříme pak v takovém případě o **soustavě sil**), můžeme jejich účinek nahradit silou jedinou – tzv. **výslednicí**. Přitom účinek této výslednice $\boldsymbol{F}$ na hmotný bod musí být naprosto stejný, jako je účinek všech skládaných sil. Formálně zapsáno tak platí

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \ldots\ldots + \boldsymbol{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \quad . \tag{2.42}$$

Tento postup se také nazývá **vektorové skládání** (vektorové sčítání) **sil**. Splnění výše uvedené podmínky (2.42) pro skládání sil nám úplně postačí právě v případě, kdy síly působí na jeden hmotný bod a mají tedy všechny stejné působiště. Ale například při působení sil na soustavu hmotných bodů nebo na těleso, mohou síly působit v naprosto různých bodech prostoru, což se může mimo jiné projevit i v různém otáčivém účinku těchto sil – tento účinek charakterizuje fyzikální veličina **moment síly** ***M*** – viz **článek 2.3.6**. Při skládání soustavy sil majících různá působiště pak musí být současně splněna i obdobná momentová podmínka. Ale o tom až o něco později.

V následujícím výkladu (nebude-li výslovně řečeno jinak) budeme vždy pod pojmem „síla“ chápat **sílu výslednou**.

2.2.2 Newtonovy pohybové zákony

Jedná se o tři základní zákony (vlastně axiomy) klasické mechaniky, jež zformuloval Isaac Newton v roce 1687 ve svém stěžejním díle „Philosophiae naturalis principia mathematica“ (Matematické základy přírodní filozofie). ***Vysvětlují pohybové účinky síly*** na hmotné body nebo na tělesa, jež lze hmotnými body nahradit.

Na tomto místě je ale třeba zdůraznit, že existují jisté meze platnosti newtonovské klasické mechaniky. Na jedné straně jsou dány jevy probíhajícími vysokými rychlostmi blížícími se rychlosti světla ve vakuu a velkými hmotnostmi pohybujících se objektů – podobné děje zkoumá a vysvětluje teorie relativity, na druhé straně pak (v oblasti mikrosvěta) musíme použít k vysvětlení určitých jevů závěrů kvantové mechaniky.

Než přistoupíme k formulaci Newtonových pohybových zákonů, definujme jednu fyzikální veličinu, jež charakterizuje pohybový stav konkrétních hmotných objektů. Tou veličinou je **hybnost *p* hmotného bodu (tělesa)**. Je to vektorová fyzikální veličina definovaná jednoduchým vztahem

$$\boldsymbol{p} = m.\boldsymbol{v} \quad , \tag{2.43}$$

kde m je hmotnost daného hmotného bodu (objektu) a $\boldsymbol{v}$ jeho okamžitá rychlost vzhledem k dané vztažné soustavě.

Směr vektoru hybnosti $\boldsymbol{p}$ je tedy totožný se směrem vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$ (vzhledem k tomu, že hmotnost m je vždy kladná, musí mít oba vektory nutně souhlasnou orientaci). Hybnost, jak už její samotný název napovídá, nás vlastně „informuje“, zda je daný hmotný objekt v pohybu či v klidu, a jestliže se pohybuje, jakým směrem se jeho pohyb ubírá – dává nám tak komplexní informaci o tom, jak se příslušný hmotný objekt hýbe.

Pozn.: Význam této fyzikální veličiny je snad patrný i z následujícího porovnání. Rozjetý rychlík, letící fotbalový míč i molekula kyslíku ve vzduchu mohou mít navlas stejně velkou rychlost např. 30 $m.s^{-1}$. Ale – na zastavení rozjetého rychlíku je zapotřebí brzdných sil řádu stovek kN, brzdění určitý čas trvá a vlak přitom ještě urazí dráhu několika stovek metrů. Stejnou rychlostí letící fotbalový míč dokáže kvalitní brankář chytit a tedy zastavit prakticky „na místě“ ve zlomku sekundy (a když ne on, tak určitě síť za jeho zády) a náraz jedné jediné molekuly kyslíku vůbec nezaregistrujeme.

* * *

Pojďme však nyní k samotným pohybovým zákonům. Pozor na to, že jejich pořadí má naprosto jasnou logiku, a proto při jejich vyslovení (např. u zkoušky) není možné s tímto pořadím dle libosti hýbat !!!

1. Newtonův zákon (zákon setrvačnosti) – hmotný bod, jenž je buď v klidu nebo se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem, bude v tomto stavu setrvávat tak dlouho, dokud nebude přinucen působením vnějších sil tento stav změnit.

Lze říci, že první Newtonův pohybový zákon představuje vlastně jakousi „okrajovou podmínku“. Často se ale stává, že bývá mylně interpretován tvrzením:

„Nepůsobí-li na hmotný bod žádná síla (resp. je-li výslednice sil nulová), je hmotný bod nutně v klidu nebo se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem“.

Tento jinak naprosto správný závěr ale vyplývá – jak si ostatně dokážeme později – až z druhého Newtonova pohybového zákona při splnění určitého elementárního předpokladu o hmotnosti *m* daného hmotného objektu !!!

2. Newtonův zákon (zákon síly) – působící síla (resp. výslednice sil) je příčinou změny pohybového stavu hmotného bodu; působící síla vždy změní hybnost hmotného bodu, přičemž změna jeho hybnosti je působící síle vždy přímo úměrná.

Díky definici fyzikální veličiny hybnost (2.43) lze tuto skutečnost formálně vyjádřit jednoduchým matematickým zápisem

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \sim \boldsymbol{F} \quad . \tag{2.44}$$

Jelikož se ale jedná o základní zákon klasické fyziky, je vcelku pochopitelné, že konstantu úměrnosti ve vztahu (2.44) klademe rovnou jedné, a obecný matematický zápis Newtonova zákona síly tak nabývá tvaru

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}} \quad . \tag{2.45}$$

3. Newtonův zákon (zákon akce a reakce) – působení mezi hmotnými objekty je vždy vzájemné; dva hmotné body působí na sebe silami naprosto stejné velikosti, ale opačného směru (***F*** a ***-F***); navíc obě tyto síly mají vždy společnou vektorovou přímku procházející danými hmotnými body a vznikají i zanikají ve stejný okamžik.

Obr. 2.14 – síly akce a reakce

* * *

Pozn. č. 1: Nejpodstatnější z obsahu zákona akce a reakce je tvrzení, že pro vznik síly „musí existovat dva“ objekty (viz obr. 2.14). Jeden jediný objekt sám na sebe silově nikdy působit nebude **!!!**

Pozn. č. 2: Síla akce i síla reakce působí sice každá na jiný hmotný objekt, ale jejich výslednice je z pohledu takové soustavy dvou hmotných bodů vždy nulová → celková hybnost obou bodů zůstává konstantní a pro síly akce a reakce platí **zákon zachování hybnosti**.

Pozn. č. 3: Ve 2. Newtonově zákoně se hovoří o změně hybnosti hmotného bodu. Je však třeba mít na paměti, že změna hybnosti hmotného objektu může nastat jak změnou jeho rychlosti, tak i změnou hmotnosti – a právě v dopravní problematice to nebývá zrovna jev neobvyklý (např. spotřeba paliva dopravního prostředku, apod.), známý je i nárůst hmotnosti u objektů pohybujících se rychlostmi blízkými rychlosti světla.

!!

Je-li však hmotnost m hmotného bodu stálá (jak ostatně budeme v našich dalších postupech většinou uvažovat), pak Newtonův zákon síly přejde v jednodušší tvar. Působením síly se v takových případech změní pouze vektor okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$ hmotného bodu, a tedy musí platit, že

příslušná síla $\boldsymbol{F}$ bude udílet hmotnému bodu m jisté zrychlení $\boldsymbol{a}$.

Velikost a tohoto zrychlení je vždy přímo úměrná velikosti působící síly F a ***směr*** obou dvou vektorů ($\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{F}$) je totožný (souhlasně rovnoběžný). Tyto skutečnosti shrnuje vám už ze střední školy dobře známý, ale vzhledem k výše uvedenému předpokladu $m = konst.$ **ne však obecně platný** vztah

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} \quad . \qquad (2.46)$$

- Zákon síly je vlastně základním pohybovým zákonem pro posuvný pohyb. Umožňuje nám řešit jakýkoliv pohyb, známe-li sílu $\boldsymbol{F}$ působící na hmotný bod m a jeho pohybový stav (tj. okamžitou rychlost $\boldsymbol{v}$), v němž se daný bod nachází → tím máme dány tzv. počáteční podmínky. Při známé síle snadno vyjádříme zrychlení $\boldsymbol{a}$ hmotného bodu, a pak dalším matematickým postupem (někdy jednoduchým výpočtem, ale mnohem častěji integrací nebo dokonce řešením diferenciálních rovnic) získáme i rychlost $\boldsymbol{v}$ hmotného bodu, jeho polohový vektor $\boldsymbol{r}$ i příslušnou délku uražené dráhy s za libovolný čas t.

- Můžeme však jít také opačnou cestou od důkladné znalosti pohybu a jeho kinematického popisu k určení působící síly, jak to např. provedl Newton při odvození svého gravitačního zákona, když vyšel ze známých zákonitostí o pohybech planet, jež zhruba o 70 let dříve odhalil Johannes Kepler.

- Vztahu (2.46) však lze také využít k „vážení“ hmotnosti objektů právě na základě známých pohybových účinků známé síly. Tímto způsobem lze určit např. hmotnosti jinak nezvážitelné, jako jsou na jedné straně Slunce, planety, či jejich měsíce a na straně druhé elementární částice mikrosvěta. I takovými úlohami se ještě v průběhu tohoto kurzu setkáme.

Ale vraťme se ještě k rovnici (2.46). Při její aplikaci je nutné si v první řadě uvědomit, že zrychlení $\boldsymbol{a}$, jež síla $\boldsymbol{F}$ hmotnému bodu m udílí, je **zrychlení celkové !!!** Síla může tedy **měnit nejen velikost**, ale **i směr vektoru okamžité rychlosti**.

Naštěstí zde platí jedno poměrně jednoduché pravidlo, které mějte neustále na paměti:

→ o pohybových účincích každé působící síly rozhoduje **v první řadě její směr** ; konkrétně to, jak je daná síla orientována vzhledem ke směru pohybu hmotného bodu na nějž působí, tedy vůči směru vektoru okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$ (resp. hybnosti $\boldsymbol{p}$). Velikost působící síly pak určí „pouze“ míru daných účinků, nic víc.

Představme si případ silového působení tak, jak je naznačen na následujícím obr. 2.15. Na hmotný bod o hmotnosti m působí síla $\boldsymbol{F}$, jejíž směr je vzhledem ke směru pohybu hmotného bodu (tj. ke směru vektoru jeho okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$) obecně ***různoběžný***.

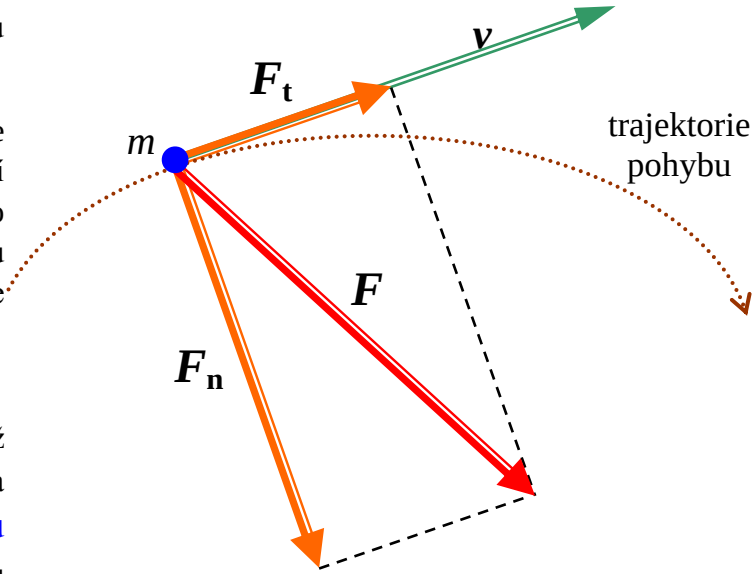
Abychom pochopili důsledky takto nasměrovaného silového působení na pohyb našeho hmotného bodu, musíme působící sílu $\boldsymbol{F}$ nejprve rozložit na dvě navzájem kolmé složky. A to na tečnou sílu $\boldsymbol{F}_t$ do směru pohybu (do směru okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$) a na normálovou sílu $\boldsymbol{F}_n$, jež je k tečné síle kolmá.

Tečná složka $\boldsymbol{F}_t$ je silou, jež může měnit pouze velikost okamžité rychlosti a udílet tak hmotnému bodu jisté tečné zrychlení $\boldsymbol{a}_t$.

Má-li souhlasný směr s rychlostí $\boldsymbol{v}$, je silou tažnou, má-li směr opačný, působí jako pak jako síla brzdná. Je-li tato složka nulová, bude (za předpokladu $m = konst.$) pohyb objektu rovnoměrný se stále stejně velkou rychlostí.

Normálová složka $\boldsymbol{F}_n$ (též nazývaná podle směru své orientace síla ***dostředivá***) je pak pouze příčinou změny směru pohybu hmotného bodu a udílí mu tak jisté normálové zrychlení $\boldsymbol{a}_n$.

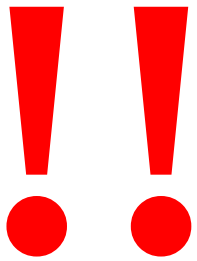
Je-li tato složka nenulová, bude pohyb bodu **vždy křivočarý**, má-li nulovou velikost, bude pohyb hmotného bodu **přímočarý**,



Obr. 2.15 – rozklad síly $\boldsymbol{F}$ na tečnou $\boldsymbol{F}_t$ a normálovou (dostředivou) $\boldsymbol{F}_n$ složku

Závěr: **přímočaré pohyby** jsou vždy působeny silou mající stejný směr jako vektor okamžité rychlosti pohybu hmotného bodu ($\boldsymbol{F} \parallel \boldsymbol{v}$);

pohyby křivočaré působí takové síly, jež jsou vzhledem ke směru pohybu (tj. vektoru okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$) různoběžné.



Pozn.: 1) Výše uvedené tvrzení o přímočarých pohybech platí i v případě nulové (tedy nepůsobící) síly. Nulový vektor je – jak by mělo být známo z matematiky – vždy rovnoběžný s jakýmkoli nenulovým vektorem. Tudíž i nulová síla $\boldsymbol{F}$ má zaručeně stejný směr jako vektor okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$.

2) Působí-li naopak nenulová síla $\boldsymbol{F}$ na hmotný bod, jenž je v klidu ($\boldsymbol{v} = \mathbf{0}\ \mathrm{m.s^{-1}}$) , opět je formálně splněna podmínka $\boldsymbol{F} \parallel \boldsymbol{v}$. Síla v takovém případě uvede hmotný bod do pohybu přímočarého po trajektorii (konkrétně polopřímce) ve směru jejího působení.

To, že o charakteru pohybu rozhoduje v první řadě směr působící síly, se lze snadno přesvědčit na pohybech těles v homogenním tíhovém poli Země – volný pád i všechny vrhy jsou ve vzduchoprázdnu vyvolány vždy působením jedné a téže tíhové síly

$$\boldsymbol{F}_G = m.\boldsymbol{g} \quad .$$

Trajektorie příslušného pohybu (přímka či parabola) závisí právě na tom, jak je orientována působící tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ vůči počáteční rychlosti $\boldsymbol{v}_0$ daného hmotného objektu. Navíc lze snadno dokázat, že pohyby přímočaré (tj. volný pád a vrhy svislé) jsou pohyby **rovnoměrně** zrychlené, zatímco pohyby křivočaré (vodorovný a šikmé vrhy) jsou pohyby **nerovnoměrně** zrychlené.

2.2.3 Aplikace Newtonových pohybových zákonů

Máme-li nyní vyjasněnu otázku směru působící síly, můžeme se v dalším výkladu podrobněji soustředit na její velikost.

A) $F = 0$ N

Jak jsme si již vyložili v předcházejícím článku, síla mající nulovou velikost automaticky splňuje podmínku stejného směru s vektorem okamžité rychlost ($\boldsymbol{F} \parallel \boldsymbol{v}$) → nepůsobí-li na hmotný bod žádná síla (nebo když se působící síly navzájem ruší a dávají nulovou výslednici), bude pohyb hmotného bodu **vždy přímočarý !!!**

Neomezujme se zatím podmínkou stálé hmotnosti m hmotného objektu a řešme tento fyzikální „problém“ pomocí obecné matematické formulace 2. Newtonova zákona (2.45):

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}\ \mathrm{N}\ .$$

Platí

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v} + m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v} + m.\boldsymbol{a} = 0\ .$$

Z poslední rovnice $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v} + m.\boldsymbol{a} = 0$ pak pro zrychlení $\boldsymbol{a}$ hmotného objektu vyplývá

$$\boldsymbol{a} = -\frac{1}{m}.\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}\ .$$

Tento vztah mezi vektory $\boldsymbol{v}$ okamžité rychlosti a $\boldsymbol{a}$ celkového zrychlení pohybu jen potvrzuje, že námi studovaný pohyb je přímočarý …. $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{v}$ (vektory na obou stranách tohoto vztahu musejí mít přeci stejný směr) **!!!**

Pro velikost rychlosti pak platí následující závěry:

→ klesá-li hmotnost pohybujícího se objektu (např. při spotřebě paliva), je $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} < 0\ \mathrm{kg.s^{-1}}$ a vektory $\boldsymbol{v}$ okamžité rychlosti a zrychlení $\boldsymbol{a}$ mají **souhlasný** směr (u obou nakonec vychází stejné znaménko) …….. pohyb hmotného objektu bude v tomto případě **zrychlený**;

→ vzrůstá-li hmotnost (např. při tankování letadla za letu), je $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} > 0\ \mathrm{kg.s^{-1}}$ a vektory $\boldsymbol{v}$ okamžité rychlosti a zrychlení $\boldsymbol{a}$ mají **opačný** směr (vychází nám u nich totiž opačné znaménko) ……. pohyb hmotného objektu bude v takovém případě **zpomalený**;

→ zůstává-li hmotnost stále stejná ($m = konst$), je $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0\ \mathrm{kg.s^{-1}} \Rightarrow \boldsymbol{a} = 0\ \mathrm{m.s^{-2}}$;

pohyb hmotného objektu bude buď **rovnoměrný**, nebo bude objekt **v klidu** – viz poznámka pod formulací 1. Newtonova zákona (zákona setrvačnosti) na stránce 57.

* * *

V dalších úvahách se pro jednoduchost budeme věnovat **pouze přímočarým pohybům** a navíc takovým, při nichž zůstává hmotnost objektu konstantní nebo ji můžeme v prvním přiblížení za konstantní považovat. Tím se nám řada fyzikálních problémů značně zjednoduší.

Bude totiž platit

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v} + m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = m.\boldsymbol{a} \quad .$$

$$= 0\ \mathrm{kg.m.s^{-2}}$$

Dostáváme tak jen jiné vyjádření již dříve uvedeného vztahu (2.46)

$$\boxed{\boldsymbol{F} = m.\boldsymbol{a}} \quad . \qquad (2.47)$$

Podívejme se nyní podrobněji na některé případy působících sil. Za sílu, kterou budeme dosazovat do vztahu (2.47), budeme považovat vždy sílu výslednou.

B) $F = konst. \neq 0$ N & $\boldsymbol{F} \,||\, \boldsymbol{v}$

Z (2.46) okamžitě plyne $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{konst} \neq \boldsymbol{0}$ m.s^{-2} (navíc $\boldsymbol{a} \,||\, \boldsymbol{v}$). Pohyb hmotného objektu bude **přímočarý rovnoměrně zrychlený** (případně zpomalený), pro velikost okamžité rychlosti a pro dráhu pohybu budou přitom platit známé vztahy

$$\boxed{v = a.t + v_o \;;\; s = \frac{1}{2}a.t^2 + v_o t} \quad , \qquad \text{viz (2.15) a (2.16)}$$

resp.

$$\boxed{v = v_o - a.t \;;\; s = v_o.t - \frac{1}{2}.a.t^2} \quad . \qquad \text{viz (2.17) a (2.18)}$$

Příklady:

1) Za jak dlouho a na jak dlouhé vodorovné dráze dosáhne při rozjezdu automobil hmotnosti 1 200 kg rychlosti 72 km.h^{-1}, je-li tažná síla jeho motoru 1 800 N ?

Jelikož se v zadání nehovoří o žádných dalších silách (zjevně je v této úloze zanedbáván odpor prostředí i síly tření), je tažná síla motoru auta současně výslednou vnější silou na toto těleso působící a udílí mu proto zrychlení o velikosti

$$a = \frac{F}{m} = \frac{1\,800\ \mathrm{N}}{1\,200\ \mathrm{kg}} = 1{,}5\ \mathrm{m.s^{-2}} \quad .$$

Působící síla má stálou velikost, a tudíž udílí autu stálé (konstantní) zrychlení → jelikož je počáteční rychlost auta nulová (auto se rozjíždí), bude nutně pohyb auta **rovnoměrně zrychlený přímočarý** z klidu.

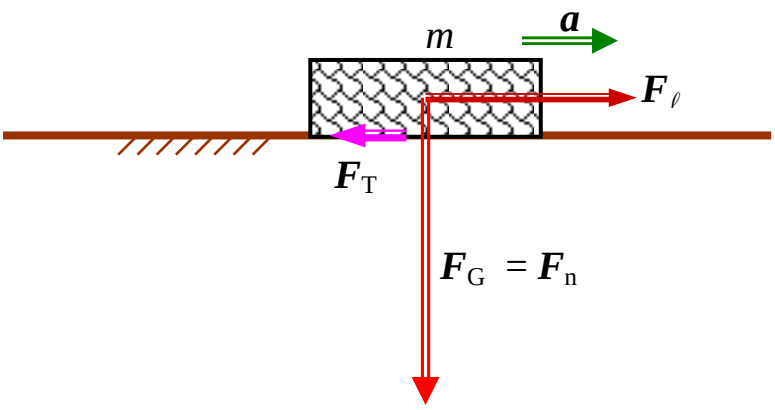
Hledaný čas i dráhu pak vypočítáme ze vztahů jež pro tyto veličiny platí u zmíněného typu pohybu:

$$t = \frac{v}{a} = \frac{20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}{1{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}} = 13\ ⅓\ \mathrm{s}\ ,$$

$$s = \frac{1}{2}a.t^2 = \frac{v^2}{2a} = \frac{\left(20\ \mathrm{m.s^{-1}}\right)^2}{2.1{,}5\ \mathrm{m.s^{-2}}} = 133\ ⅓\ \mathrm{m}\ .$$

Odpověď: Auto dosáhne uvedené rychlosti na dráze 133 ⅓ metru za 13 ⅓ sekundy.

2) Na vlak o hmotnosti 300 t působí při rozjezdu stálá tažná síla lokomotivy o velikosti 96 kN. Koeficient tření mezi koly vlaku a kolejnicí je 0,014. Na jaké vodorovné dráze dosáhne vlak rychlosti 144 $\mathrm{km.h^{-1}}$?



V zadání úlohy se tentokráte hovoří o dvou působících silách – jednak je to F_ℓ tažná síla lokomotivy a jednak F_T síla tření (i v této úloze je zanedbáván odpor prostředí). Orientace obou působících sil je přitom opačná (viz obr.), jejich výslednice bude mít tudíž velikost danou rozdílem velikostí těchto sil.

Síla tření F_t má vždy velikost danou vztahem

$$F_t = f\,.\,F_n\ ,$$

kde F_n je velikost kolmé normálové síly (vzhledem k podložce) a f příslušný koeficient tření.

Kolmou normálovou silou je v našem případě síla svou velikostí rovná velikosti síly tíhové, a proto

$F_t = f\,.\,mg = 0{,}014\,.\,3.10^5\ \mathrm{kg}\,.\,9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}} \doteq 41{,}2\ \mathrm{kN}\ .$

Velikost výslednice obou sil je potom

$F = F_\ell - F_T = 96\ \mathrm{kN} - 41{,}2\ \mathrm{kN} \doteq 54{,}8\ \mathrm{kN}\ .$

Působící výsledná síla má stejně jako v předcházejícím příkladě stálou velikost, a tudíž bude udílet vlaku stálé (konstantní) zrychlení. Jeho pohyb opět bude **přímočarý a rovnoměrně zrychlený** se zrychlením, jehož velikost

$$a = \frac{F}{m} = \frac{5{,}48.10^{4}\ \mathrm{N}}{3.10^{5}\ \mathrm{kg}} \doteq 0{,}183\ \mathrm{m.s^{-2}} \quad .$$

Hledaná dráha je pak

$$s = \frac{v^2}{2a} = \frac{(40\ \mathrm{m.s^{-1}})^2}{2.0{,}183\ \mathrm{m.s^{-2}}} \doteq 4\,380\ \mathrm{m}$$

Odpověď: Vlak dosáhne uvedené rychlosti na dráze přibližně 4,4 kilometru.

* * *

C) $F \neq konst.$ & $\boldsymbol{F} \parallel \boldsymbol{v}$

Ze vztahu (2.46) v takovém případě vyplývá, že zrychlení pohybu $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{konst}$. Platí-li navíc, že $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{v}$, jedná se pochopitelně o zrychlení tečné. Tím pádem se ale bude měnit velikost rychlosti hmotného objektu nepravidelně a jeho pohyb bude sice **přímočarý**, ale **NE**rovnoměrně zrychlený (resp. zpomalený). Velikost okamžité rychlosti a délku uražené dráhy musíme v těchto případech řešit obecně metodami integrálního počtu. Pro řešení konkrétního pohybu ale musíme znát, jak se velikost příslušné síly, jež je jeho příčinou, mění. Zde uvedu výsledky působení dvou typických sil, s nimiž se ještě v našem fyzikálním výkladu později setkáme.

1. Síla odporu prostředí

Odpor prostředí proti pohybu tělesa (např. ve vzduchu či ve vodě) charakterizuje odporová síla $\boldsymbol{F}_o$, jejíž směr je vždy namířen proti pohybu tělesa (a tedy i proti vektoru $\boldsymbol{v}$ okamžité rychlosti). Při menších rychlostech pohybu tělesa je velikost F_o této odporové síly přímo úměrná velikosti rychlosti v. Vyjádřeno ve vektorovém zápisu

$$\boldsymbol{F}_o = -R_m.\boldsymbol{v} \quad , \qquad (2.48)$$

kde veličina R_m je tzv. **mechanický odpor prostředí** závisející jednak na prostředí samém, ale také na rozměrech a tvaru pohybujícího se tělesa. Jak lze snadno odvodit je fyzikální jednotkou této veličiny

$$[R_m] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m.s^{-1}}} = \frac{\mathrm{kg.m.s^{-2}}}{\mathrm{m.s^{-1}}} = \mathrm{kg.s^{-1}} \quad . \qquad (2.49)$$

Předpokládejme jednoduchou modelovou situaci, kdy těleso o hmotnosti m se pohybuje a má počáteční rychlost o velikosti v_o. Právě od tohoto časového okamžiku na něj bude působit jako jediná jen síla odporu prostředí (jež je v tomto případě pochopitelně silou brzdnou). Aplikujeme-li na tuto situaci zákon síly (2.47), musí nutně platit

$$F_o = m.a = m\frac{dv}{dt} = -R_m.v \quad .$$

Z poslední rovnosti pak dostáváme vcelku jednoduchou diferenciální rovnici

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{R_m}{m}.v$$

snadno řešitelnou metodou separace proměnných

$$\frac{dv}{v} = -\frac{R_m}{m}\,dt \quad .$$

Odtud už vede krátká cesta k cíli – další výpočet už si laskavě vyzkoušejte sami. Jeho výsledkem je časová závislost rychlosti, kterou charakterizuje klesající exponenciální funkce

$$\boxed{v = v_o.e^{-\frac{R_m}{m}.t}} \quad . \qquad (2.50)$$

Následnou integrací rychlosti (viz (2.6)) pak snadno dostaneme i závislost délky uražené dráhy za příslušný čas t, po nějž působila brzdná odporová síla. Mělo by vám vyjít

$$\boxed{s = \frac{m\,v_o}{R_m}\left(1-e^{-\frac{R_m}{m}.t}\right)} \quad . \qquad (2.51)$$

Pozn.: Jak je ze získaných výsledků patrné, pokles rychlosti až na nulovou hodnotu (tedy do klidového stavu tělesa) by teoreticky trval nekonečně dlouhý čas. Ale dráha uražená tělesem až do zastavení má v tomto případě pochopitelně konečnou hodnotu. Platí

$$s_{max} = \lim_{t\to\infty}\frac{m\,v_o}{R_m}\left(1-e^{-\frac{R_m}{m}.t}\right) = \frac{m\,v_o}{R_m} \quad . \qquad (2.52)$$

Tento výsledek potvrzuje i vcelku očekávaný závěr, že delší brzdnou dráhu bude mít těleso mající původně větší hybnost. Na druhé straně – při různých odporech prostředí – bude mít kratší brzdnou dráhu těleso, vůči němuž bude prostředí klást logicky větší odpor.

2. Síla vyvolávající harmonické kmity

S problematikou harmonického kmitavého pohybu se ještě v tomto semestru podrobně seznámíme. Toto kmitání, které lze dobře demonstrovat např. pohybem tělesa o hmotnosti m na pružině tuhosti k,, je vyvoláno silou, jejíž velikost přímo úměrně vzrůstá s narůstající výchylkou z rovnovážné polohy tělesa a jejíž orientace je taková, že vždy míří do rovnovážné polohy tělesa.

Výchylku z rovnovážné polohy označujeme obvykle jako ***y*** – kmity tělesa na pružině se totiž odehrávají nejčastěji ve svislém směru. Působící harmonická síla „má snahu“ vrátit kmitající těleso zpět do rovnovážné polohy, má tedy vždy směr opačný vůči směru vektoru ***y***. Uvedené skutečnosti lze pak snadno matematicky charakterizovat vztahem

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{h}} = -k.\boldsymbol{y} \quad . \tag{2.53}$$

K vyřešení tohoto pohybu opět použijeme matematickou formulaci zákona síly (2.47); v tomto případě platí, že

$$F_{\mathrm{h}} = m.a = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -k.y \quad .$$

Úpravou poslední rovnosti dostáváme homogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}.y = 0 \quad . \tag{2.54}$$

Podle teorie diferenciálních rovnic se její řešení provádí pomocí tzv. charakteristické rovnice, a jak si můžete vyzkoušet sami, je na jeho konci jako výsledek harmonický časový průběh okamžité výchylky *y*.

Jestliže se kmitající těleso na počátku (v čase $t_{\mathrm{o}} = 0$ s) nacházelo právě v rovnovážné poloze ($y_{\mathrm{o}} = 0$ m), bude v libovolném čase *t* hodnota jeho okamžité výchylky *y* dána výrazem

$$\boxed{y = y_{\mathrm{m}}.\sin\omega t} \quad , \tag{2.55}$$

v němž fyzikální veličina y_{m} představuje maximální možnou výchylku z rovnovážné polohy, tzv. **amplitudu výchylky**, a

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{2.56}$$

je **úhlová frekvence** kmitů, jejíž hodnotu lze na základě řešení diferenciální rovnice jednoduše vyjádřit jako

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad . \tag{2.57}$$

Časový průběh okamžité rychlosti *v* a okamžitého zrychlení *a* bychom následně snadno získali na základě známých vztahů mezi veličinami pohybu

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \quad \text{a} \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad .$$

To si ale ponechme na pozdější výklad v **kapitole 5**.

2.2.4 Impulz síly

Impulz $\boldsymbol{I}$ určité síly $\boldsymbol{F}$ působící na hmotný bod je vektorová fyzikální veličina, jež charakterizuje účinek této síly na hmotný bod v jistém časovém úseku

$$\Delta t = t_2 - t_1 > 0\ \mathrm{s} \quad .$$

Impulz síly je jednoduše definován vztahem

$$\boldsymbol{I} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t \quad . \tag{2.58}$$

Jestliže je ale působící síla $\boldsymbol{F}$ v celém časovém intervalu Δt konstantní (co do velikosti i co do směru), lze její impulz $\boldsymbol{I}$ vyjádřit snadno součinem

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}.\,\Delta t = \boldsymbol{F}.\,(t_2 - t_1) \quad . \tag{2.59}$$

Jestliže je působící síla $\boldsymbol{F}$ **silou výslednou**, dostaneme okamžitě z 2. Newtonova zákona (2.45) vztah mezi impulzem této síly a změnou hybnosti daného hmotného bodu. Platí, že

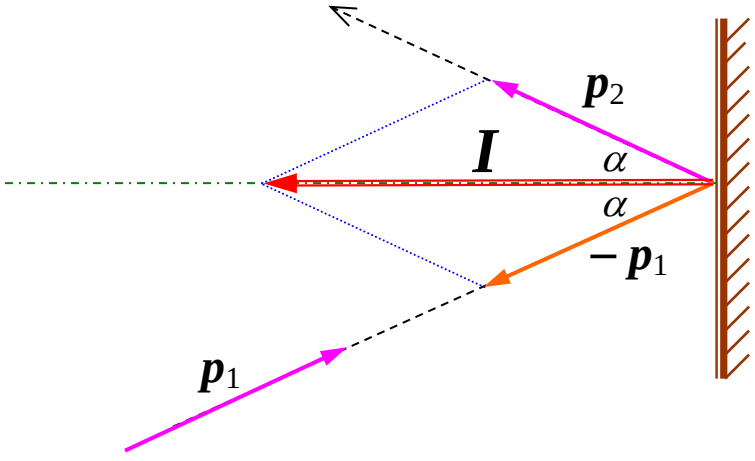
$$\boldsymbol{I} = \Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}\,(t_2) - \boldsymbol{p}\,(t_1) \quad . \tag{2.60}$$

Působení síly v určitém časovém intervalu $< t_1 ; t_2 >$ má za důsledek změnu hybnosti hmotného bodu z počáteční hodnoty $\boldsymbol{p}\,(t_1)$ v čase t_1 na konečnou hodnotu $\boldsymbol{p}\,(t_2)$ v čase t_2.

Příklad:

Míč hmotnosti 400 g narazí pod úhlem 30 ° na zeď (měřeno ke kolmici) rychlostí 25 $\mathrm{m.s^{-1}}$ a odrazí se od ní pod stejně velkým úhlem. Jak velkou silou působila zeď na míč při odrazu, jestliže náraz trval jednu desetinu sekundy? Jak velkou silou působil míč na zeď?

Jestliže se míč odrazil od zdi pod stejně velkým úhlem, jako je úhel dopadu, jednalo se o ***srážku pružnou***, a proto musí mít jeho rychlost po odrazu stejnou velikost → 25 $\mathrm{m.s^{-1}}$. Vektor hybnosti se ale po odrazu změnil (rychlost má jiný směr než před dopadem), a právě z této změny hybnosti určíme velikost působící síly.



$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}.\,\Delta t = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1$$

Velikost hybnosti je stejná před dopadem i po odrazu a má hodnotu

$$p_1 = p_2 = m.v_1 = m.v_2 = 0{,}4\ \text{kg} \,.\, 25\ \text{m.s}^{-1} = 10\ \text{kg.\ m.s}^{-1} \quad .$$

Velikost impulzu síly I pak určíme jako úhlopříčku ve vektorovém rovnoběžníku (v tomto případě dokonce kosočtverci) – viz obr. na předcházející straně.

Evidentně musí platit

$$I = 2\,p_1 \,.\, \cos\alpha = 2\,.\,10\ \text{kg.\ m.s}^{-1} \,.\, \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 17{,}3\ \text{N.s} \quad .$$

Následně okamžitě dostáváme hodnotu hledané síly

$$F = \frac{I}{\Delta t} = \frac{17{,}3\ \text{N.s}}{0{,}1\ \text{s}} \doteq 173\ \text{N} \quad .$$

Odpověď: Zeď působí na míč při odrazu silou o velikosti přibližně 170 N, její směr je totožný se směrem impulzu ***I***, tedy doleva (viz obr.); podle principu akce a reakce pak stejně velkou ale opačně orientovanou silou – tj. doprava – působí při dopadu míč na zeď.

2.2.5 Mechanická práce a výkon

Práce W určité síly $\boldsymbol{F}$ je typická skalární fyzikální veličina vyjadřující dráhový účinek síly při přemísťování hmotného bodu (nebo tělesa) – tato fyzikální veličina vlastně charakterizuje působení této síly po nějaké (libovolně dlouhé) dráze s bez ohledu na čas.

Již v kapitole **ÚVOD** jsme o této veličině hovořili v souvislosti se skalárním součinem (viz stránka 14 tohoto textu). Byl tam uveden vztah, jenž nám umožňuje práci vypočítat v takových „příznivých“ případech, kdy práci koná síla $\boldsymbol{F}$ stálé velikosti i směru při přemístění tělesa po přímé trajektorii (viz obr. 2.16 dole). V takovém případě platí, že práce W je na dráze délky s rovna výrazu

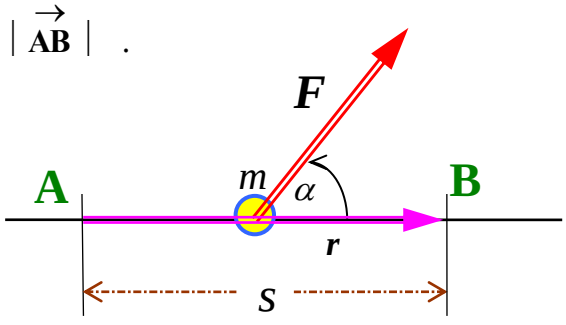
$$W = F.s.\cos\alpha \quad , \tag{2.61}$$

přičemž lze tento vztah formálně vyjádřit právě skalárním součinem

$$W = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{r} \quad , \tag{2.62}$$

v němž vektor $\boldsymbol{r}$ posunutí splňuje podmínku

$$|\boldsymbol{r}| = s = |\overrightarrow{\mathbf{AB}}| \quad .$$



Obr. 2.16 – ke vztahu pro mechanickou práci stálé síly

Ze vztahu (2.61) je dobře patrné, že:

a) největší práci vykoná daná síla právě tehdy, bude-li mířit ve směru posouvání tělesa, kdy úhel $\alpha = 0^{\circ}$; pak musí platit

$$W = F.s \quad ;$$

b) naopak žádnou práci nekoná síla mířící stále kolmo ke směru pohybu tělesa (takovou silou je např. síla dostředivá); pak nutně

$$W = F.s.\cos 90^{\circ} = 0 \text{ J} \quad ;$$

c) míří-li ovšem síla proti směru posouvání tělesa, kdy úhel $\alpha > 90^{\circ}$ (typické je to např. pro brzdné síly, síly tření a síly odporu prostředí), vychází nám hodnota práce W záporná; v takovém případě říkáme, že síla **práci spotřebovává**.

Jak známo, jednotkou veličiny práce v soustavě SI je jeden **joule** (J). Z uvedeného vztahu (2.61) pro výpočet práce lze snadno odvodit, že platí

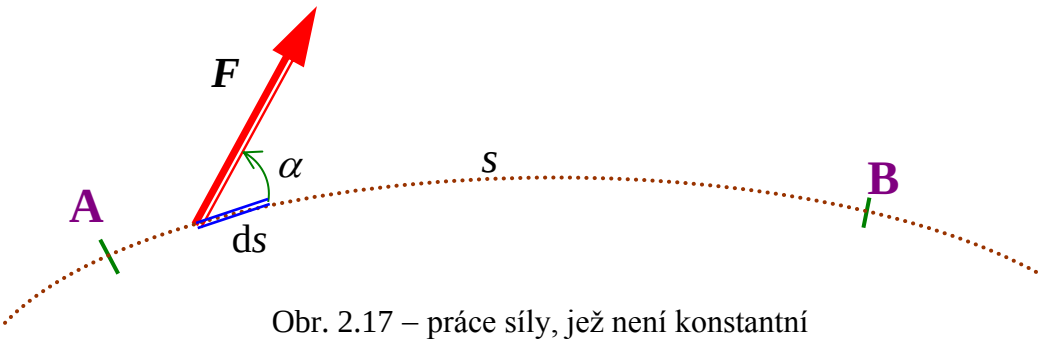
$$1 \text{ J} = 1 \text{ N.m} = 1 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-2} \quad .$$

Daleko častější jsou však případy, kdy síla $\boldsymbol{F}$ není konstantní co do velikosti nebo mění svůj směr během přemísťování hmotného bodu (resp. tělesa). S takovou situací se např. setkáme při výpočtu práce síly, jež postupně natahuje pružinu z její nezkrácené polohy, neboť velikost této síly postupně s narůstajícím prodloužením pružiny vzrůstá – viz příklad níže.

Výpočet práce měnící se síly je logicky složitější, a jak už bylo naznačeno v závěru kapitoly **ÚVOD**, je nutné jej provést integrací – viz obr. 2.17.

Znovu si tak zopakujme, že v případě, kdy počítáme **práci proměnné síly $\boldsymbol{F}$**, musíme dráhu s mezi body **A** a **B**, na níž síla působí, rozdělit na nekonečně mnoho nekonečně malých elementů ds a na každém spočítat infinitezimální práci

$$\mathrm{d}W = F.\cos\alpha\,\mathrm{d}s \quad .$$



Obr. 2.17 – práce síly, jež není konstantní

K určení hodnoty práce W vykonané na celé dráze s je pak třeba provést integraci všech elementů práce dW.

Jako výsledek tohoto postupu nakonec dostaneme, že práce vykonaná obecnou silou ***F*** na dráze *s* mezi body **A** a **B** je vyjádřena vztahem

$$W = \int_A^B F \,.\cos\alpha \; \mathrm{d}s \quad . \qquad (2.63)$$

A jak jsme si už ukázali, tento obecně platný výraz pro výpočet mechanické práce jakékoli síly ***F*** na dráze *s* v sobě pochopitelně zahrnuje i případ, kdy práci koná stálá síla na přímé dráze, neboť pro $F = konst.$ & $\cos\alpha = konst.$ okamžitě dostáváme

$$W = \int_A^B F \,.\cos\alpha \; \mathrm{d}s = F.\cos\alpha \int_A^B \mathrm{d}s = F.s.\cos\alpha \quad ,$$

tedy vztah (2.61).

Příklad:
Jak velkou práci musíme vykonat, abychom pružinu, jejíž tuhost je 160 $\mathrm{N.m^{-1}}$, natáhli z její původně nezkrácené podoby o 45 cm ?

Jak si ukážeme dále v **kapitole 3.2**, platí mezi silou, která pružně deformuje těleso, a mírou deformace přímá úměrnost. Tedy v našem případě musí pro velikost síly platit, že

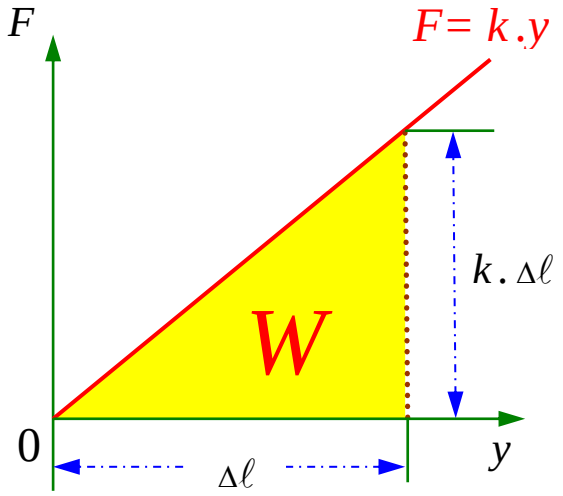
$$F = k \,.\, y \quad ,$$

kde k je tuhost pružiny a y její příslušné prodloužení.

Potřebnou práci spočítáme podle (2.63), přičemž $\cos\alpha = 1$ (deformující síla působí ve směru prodloužení) a integraci budeme provádět od nuly až do $\Delta\ell = 0{,}4$ m.

$$W = \int_{y=0}^{\Delta\ell} F \,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{\Delta\ell} k.y \,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{2} k.y^2\right]_{y=0}^{\Delta\ell} = \frac{1}{2}\, k \,.\, (\Delta\ell)^2 \quad .$$

Pozn.: Tento výsledek bychom dostali i bez předchozího výpočtu jen na základě grafické interpretace integrálu jako obsahu plochy pod grafem funkce (viz **článek 1.2.2** a vedlejší obrázek).



Ať tak či tak – výsledek našeho příkladu bude

$W = ½ \,.\, 160\ \mathrm{N.m^{-1}}.\,(0{,}45\ \mathrm{m})^2 = 16{,}2\ \mathrm{J}$.

Odpověď: Při natahování pružiny vykonáme práci 16,2 J.

Tím, že síla koná mechanickou práci, působí nejen po určité dráze, ale také po určitý čas. Ve vztahu pro práci však čas v žádném případě nevystupuje !!! K tomu, abychom vyjádřili, jak velká práce byla danou silou vykonána za určitý čas t, musíme zavést další fyzikální veličinu, a tou je **výkon**.

Výkon P je skalární fyzikální veličina charakterizující „rychlost“ konání mechanické práce. Jestliže je v určitém časovém intervalu Δt vykonána práce ΔW, pak **průměrný výkon** za tuto dobu definujeme výrazem

$$P_{\mathrm{p}} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad . \tag{2.64}$$

Průměrný výkon ovšem nevyjadřuje, jestli je či není práce danou silou konána rovnoměrně (tj. zda byla nebo nebyla ve stejných časových intervalech vykonána práce stejně velká). Proto kromě průměrného výkonu zavádíme i **výkon okamžitý** postupem naprosto stejným jako u fyzikálních veličin průměrná a okamžitá rychlost.

Jestliže známe funkční závislost vykonané práce W na čase $W = f(t)$, můžeme okamžitý výkon snadno určit jako „časovou změnu práce“ (matematicky vzato jako derivaci práce podle času)

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\,t} \quad . \tag{2.65}$$

Fyzikální jednotkou veličiny výkon je jeden **watt** (W). Platí, že

$$1\ \mathrm{W} \ = \ 1\ \mathrm{J.s^{-1}} \ = \ 1\ \mathrm{kg.m^2.s^{-3}} \ .$$

Okamžitý výkon lze ale vyjádřit i dalším důležitým vztahem, jenž získáme krátkou úpravou posledního výrazu (2.65). Platí totiž

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{v} \quad .$$

Okamžitý výkon tak můžeme vyjádřit pomocí působící síly a okamžité rychlosti hmotného objektu. Bude-li navíc působící síla mířit ve směru pohybu ($\boldsymbol{F} \,||\, \boldsymbol{v}$), dostáváme pro okamžitý výkon jednoduchý výraz

$$P = F.v \quad . \tag{2.66}$$

Z tohoto vztahu je např. patrné i to, že při pohybu přímočarém rovnoměrně zrychleném (vyvolaném silou stálé velikosti působící ve směru pohybu) musí okamžitý výkon této síly s pravidelně narůstající rychlostí též rovnoměrně vzrůstat.

Účinnost η stroje pak definujeme jako podíl výkonu P tohoto stroje a jemu dodávaného příkonu P_o. Nebo ji lze také vyjádřit jako podíl práce W strojem v určitém časovém úseku vykonané a energie E „dodané“ („přiváděné“) stroji za tutéž dobu

$$\eta = \frac{P}{P_o} = \frac{W}{E} \quad . \tag{2.67}$$

Účinnost η strojů je příkladem fyzikální veličiny, jež fyzikální jednotku nemá (používá se rovněž často formulace, že se jedná o fyzikální veličinu „bezrozměrnou“. Její hodnotu obvykle vyjadřujeme v procentech.

Příklad:
Elektrická lokomotiva působí při rozjezdu na vlak tažnou silou stálé velikosti 150 kN a po 2 minutách od začátku pohybu dosáhne souprava rychlosti 108 km.h^{-1}. Jak velkou práci lokomotiva vykoná a jaký je průměrný výkon jejích motorů?

Jak je v zadání úlohy psáno, lokomotiva působí na vlak stálou tažnou silou (což je samozřejmě proti reálnému rozjezdu vlaku značné zjednodušení a navíc se v tomto případě neberou vůbec v úvahu odporové síly !!!); z tohoto předpokladu, ale jednoznačně vyplývá, že pohyb vlaku bude **rovnoměrně zrychlený** se zrychlením o velikosti

$$a = \frac{v}{t} = \frac{30\ \text{m.s}^{-1}}{120\ \text{s}} = 0{,}25\ \text{m.s}^{-2} .$$

Za danou dobu vlak ujede dráhu

$$s = \frac{1}{2} a\, t^2 = \frac{1}{2} . 0{,}25\ \text{m.s}^{-2} . (120\ \text{s})^2 = 1\,800\ \text{m} \ .$$

Tažná síla tudíž na této dráze vykoná práci

$$W = F.s = 150\,000\ \text{N} . 1\,800\ \text{m} = 2{,}7.10^8\ \text{J} = 270\ \text{MJ} \ .$$

Průměrný výkon motorů lokomotivy za danou dobu pak bude

$$P_p = \frac{W}{t} = \frac{2{,}7.10^8\ \text{J}}{120\,\text{s}} = 2{,}25.10^6\ \text{W} = 2\,250\ \text{kW} \ .$$

Odpověď: Práce tažné síly lokomotivy má hodnotu 270 MJ a průměrný výkon jejích motorů při rozjezdu vlaku je 2,25 MW.

2.2.6 Energie hmotného bodu, zákon zachování mechanické energie

Energie E hmotného bodu (tělesa) je rovněž skalární fyzikální veličina, se kterou se často v dynamice pohybu hmotného bodu (ale i v jiných fyzikálních partiích) setkáváme. Její jednotka je naprosto stejná jako fyzikální jednotka veličiny práce – **joule**, což často vede k nesprávnému chápání této veličiny a jejímu ztotožnění s mechanickou prací. Podstata obou fyzikálních veličin je však naprosto odlišná, i když mezi nimi existuje poměrně úzká vazba.

Práce v žádném případě není energií a energie není prací !!!

→ **Práce** totiž **charakterizuje** (viz předcházející článek) **působení určité síly** po určité dráze. Toto působení navíc není záležitostí okamžitou, ale odehrává se vždy po jistý kratší či delší čas. Práce je vždy spojena s konkrétní sílou. Zdůrazňujeme to i tím, že používáme slovního obratu **„síla koná práci“** (při přemísťování daného hmotného objektu).

→ Naproti tomu **energie** je fyzikální veličinou **charakterizující přímo příslušný hmotný objekt**, a to v daném bodě a v daném časovém okamžiku („tady a teď“). Energie je tzv. veličinou *stavovou* popisující stav daného hmotného objektu. Říkáme, že **„těleso má určitou energii“**, že jeho energie nabývá takových či onakých hodnot, že vzrůstá nebo klesá apod.

Definice fyzikální veličiny energie:

1. Jestliže síla na hmotném objektu **nekoná** práci, zůstává energie hmotného objektu konstantní

$$W = 0\ \mathrm{J} \quad \Rightarrow \quad E = \text{konst.} \quad . \tag{2.68}$$

Tato formulace je vlastně **zákonem zachování energie** – energie se zachovává, jestliže je soustava (kterou ovšem může tvořit i jediný hmotný objekt) **izolovaná** od sil, jež by na ní mohly konat práci.

2. Jestliže síla na hmotném objektu (nebo soustavě) **vykoná** určitou práci *W*, **změní** se energie hmotného objektu a to tak, že tato **změna energie je vykonané práci rovna**

$$W \neq 0\ \mathrm{J} \quad \Rightarrow \quad \Delta E = W \quad . \tag{2.69}$$

Fyzikální veličina energie může mít nejrůznější formy – v mechanice hmotného bodu zavádíme jednak **energii pohybovou** (kinetickou) a také **energii polohovou** (potenciální).

Kinetická energie E_k hmotného bodu je skalární fyzikální veličina charakterizující pohybový stav hmotného bodu vzhledem k dané vztažné soustavě. Jakákoli její změna (ať už přírůstek nebo úbytek) ΔE_k musí být rovna práci sil, jež na hmotný bod působí při změně jeho rychlosti z počáteční hodnoty $\boldsymbol{v}_o$ na konečnou hodnotu $\boldsymbol{v}$. Obecným postupem lze celkem snadno spočítat (provedeme si to na přednášce), že tato práce W je rovna výrazu

$$W = \Delta E_k = E_k - E_{ko} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 \quad .$$

Kinetická energie E_k hmotného bodu o hmotnosti m, jenž se pohybuje rychlostí o velikosti v, je pak tedy dána vztahem

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}mv^2} \quad . \qquad (2.70)$$

Potenciální energie E_p hmotného bodu je skalární fyzikální veličina vycházející ze vzájemného silového působení mezi tělesy. Charakterizuje polohu určitého hmotného objektu (bodu nebo tělesa) v silovém poli objektu jiného. Protože známe nejrůznější případy takových vzájemných působení, setkáváme i se i s odlišnými formami potenciální energie, ne jen s jednou jedinou **!!!**

POZOR !!! Polohovou energii hmotného objektu nelze ale definovat v každém silovém poli. Toto lze provést pouze v tzv. **potenciálových polích**, v nichž síla $\boldsymbol{F}$ působící na hmotný bod **závisí jen na poloze hmotného bodu v tomto poli**. Navíc **práce** touto silou vykonaná (nebo práce vykonaná stejně velkou silou $-\boldsymbol{F}$ působící proti síle pole) **závisí jen na výchozí a konečné poloze hmotného bodu a nezávisí na tvaru trajektorie**, po níž je hmotný objekt při konání práce přemisťován.

Sílu $\boldsymbol{F}$ působící na hmotný bod (obecně pak na příslušný objekt) nacházející se v potenciálovém silovém poli nazýváme **síla konzervativní**. Příkladem takové síly je např. síla gravitační nebo síla elektrostatická, naopak konzervativními silami nejsou např. síly tření, síla magnetická a mnohé další.

A ještě jedna důležitá skutečnost platí pro práci konanou konzervativní silou v potenciálovém poli – je-li práce konána touto silou po uzavřené trajektorii, je vždy nulová.

Potenciální energii hmotného bodu můžeme definovat dvojím naprosto ekvivalentním postupem. První možností je vyjít z výpočtu práce kterou musíme vykonat **proti konzervativní síle** působící mezi tělesy při přemísťování hmotného bodu v potenciálovém silovém poli z počáteční polohy do polohy konečné. Takto vykonané práci W pak bude roven **přírůstek ΔE_p polohové energie hmotného bodu** a musí platit

$$\Delta E_p = E_{p\,kon} - E_{p\,poč} = W \quad . \qquad (2.71)$$

Druhý, ekvivalentní postup vychází při definování polohové energie přímo **z práce konané konzervativní silou**. V takovém případě ale evidentně platí, že práce konzervativní síly má jen opačné znaménko a že tedy musí být naopak rovna **úbytku polohové energie hmotného bodu** při jeho přemísťování v potenciálovém silovém poli z jedné polohy do druhé.

Jak již bylo řečeno, známe různé druhy potenciální energie (postupně se s nimi budeme v našem výkladu seznamovat) a každá má své specifické vlastnosti právě podle podstaty silového působení mezi objekty.

Nejznámější z nich je patrně **tíhová potenciální energie E_p hmotného bodu v homogenním tíhovém poli Země**. Její změna (přírůstek) je rovna práci, kterou je třeba vykonat, abychom příslušný hmotný bod přemístili z původní výšky h_o do jiné větší výšky h. Snadno lze odvodit, že velikost vykonané práce bez ohledu na tvar trajektorie, po níž je hmotný bod zvedán, udává výraz

$$W = \Delta E_p = E_p - E_{po} = m.g.h - m.g.h_o \ .$$

V řadě úloh je základní výška h_o totožná s povrchem Země, kdy obvykle volíme $h_o = 0$ m. Potom je potenciální tíhová energie hmotného bodu o hmotnosti m ve výšce h dána známým výrazem

$$\boxed{E_p = m.g.h} \ . \qquad (2.72)$$

Později si ukážeme, že polohovou energii lze zavést i tělesu konajícímu kmity v pružném prostředí a že lze definovat např. i polohovou energii elektrického náboje v poli elektrostatickém. Ale mějte na paměti, že podobný postup nelze aplikovat u sil, jež nejsou konzervativní **!!!** Takovým případem jsou třeba magnetické síly, síly tření, síly odporu prostředí a mnohé další.

Celková mechanická energie E hmotného bodu je pak dána součtem jeho kinetické a potenciální energie vzhledem ke zvolené vztažné soustavě

$$E = E_k + E_p \ .$$

Zákon zachování energie lze pak vyslovit i v následující formě:

Jestliže je soustava izolovaná od vnějších (nekonzervativních) sil schopných na ni konat práci, zůstává celková mechanická energie takové soustavy stálá. Jednotlivé formy energií se však přitom měnit mohou. Dojde-li ke změně (přírůstku, resp. úbytku) určité formy energie, musí být potom přírůstek jedné formy energie stejně velký jako úbytek jiné formy energie.

Zákon zachování mechanické energie můžeme aplikovat například u všech pohybů těles v tíhovém poli Země (volný pád a vrhy), jestliže se odehrávají **ve vzduchoprázdnu**, nebo při pohybech těles po nakloněné rovině **bez tření**. V uvedených případech vnější síly (tj.odpor prostředí, resp. síly tření) nepůsobí a tudíž ani nemohou konat práci („ve hře“ zůstává pouze konzervativní tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$) – celková energie těles zůstává stálá, změna polohové energie je „vyrovnána“ změnou energie pohybové, případně naopak.

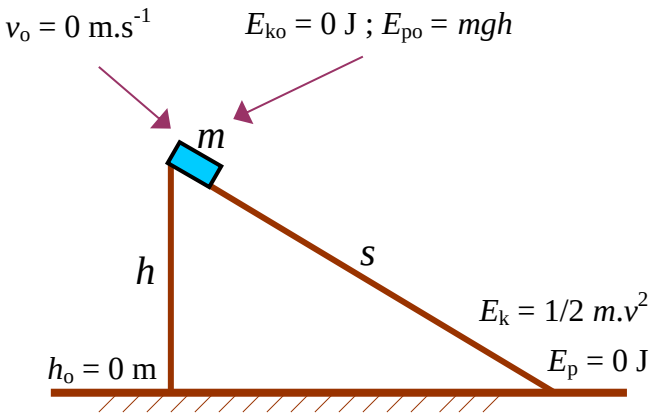
Příklad:
Na dokonale hladké nakloněné rovině určité délky s ve vzduchoprázdnu je položen kvádr v jejím nejvyšším bodě. Po proběhnutí celé nakloněné roviny dosáhne kvádr rychlost o velikosti 3 $\mathrm{m.s^{-1}}$. Určete výšku nakloněné roviny.

Jak ze zadání této úlohy vyplývá, na kvádr nepůsobí žádné vnější síly (odpor prostředí neuvažujeme a síly tření jsou nulové). Musí proto platit zákon zachování mechanické energie – součet energie potenciální a kinetické „na začátku“ v nejvyšším bodě nakloněné roviny musí být stejný jako na jejím dolním konci.

Platí

$$E_{ko} + E_{po} = E_k + E_p$$

přičemž $E_{ko} = 0$ J ; $E_p = 0$ J (viz vedl.obr.).



Dostáváme tedy

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \ ,$$

z čehož nám vychází hledaná výška

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(3\ \mathrm{m.s^{-1}})^2}{2.10\ \mathrm{m.s^{-2}}} = 0{,}45\ \mathrm{m} \ .$$

Odpověď: Výška nakloněné roviny je 0,45 m.

Uvědomte si, že dostáváme výsledek je naprosto stejný, jako kdyby těleso padalo z výšky h volným pádem. V obou případech je totiž počáteční pohybová energie nulová a v obou případech se naprosto stejně změní (poklesne) hodnota energie polohové.

Kdyby ovšem podložka nakloněné roviny dokonale hladká nebyla, (kdyby existovalo tření mezi tělesem a podložkou), působila by **proti** pohybu tělesa vnější síla tření $\boldsymbol{F}_T$, jež by konala práci, a celková energie tělesa by už nebyla stálá – došlo by k jejímu **poklesu**. A čím by byla délka s nakloněné roviny větší (čím by byl úhel sklonu menší), tím více by se energie tělesa zmenšila. Protože by ale pokaždé došlo ke stejnému poklesu polohové energie ($\Delta E_p = m.g.h$), musel by se úbytek celkové energie projevit v menší hodnotě energie pohybové na dolním konci nakloněné roviny. Tím pádem by musela být v takovém případě i menší konečná rychlost tělesa.

!!

2.2.7. Inerciální a neinerciální vztažné soustavy, síla setrvačná

Newtonovy pohybové zákony platí pouze v tzv. inerciálních soustavách. V takové soustavě se hmotný bod, na nějž nepůsobí žádné síly nebo jejichž výslednice je nulová, nachází v klidu nebo se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem.

Běžně nám za takovou soustavu slouží souřadná soustava spojená s povrchem Země (pokud ovšem pomineme její rotaci), více se pak ideálu blíží souřadná soustava spojená se Sluncem a s pozicí vzdálených hvězd. Navíc platí, že každá další souřadná soustava, jež se vůči původní inerciální soustavě **pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem**, je taky inerciální.

Lze se přesvědčit, že všechny mechanické děje, jež probíhají v jedné inerciální soustavě, probíhají naprosto stejně i v jiných inerciálních soustavách. Tuto skutečnost pak vyjadřuje tzv. **Galileiho princip relativity:**

Zákony mechaniky jsou stejné ve všech inerciálních soustavách a rovnice, jež je popisují, mají ve všech inerciálních soustavách stejný tvar.

V různých inerciálních soustavách působí na daný hmotný bod vždy stejné síly. Ať jste v klidu nebo jedete stálou rychlostí v autě nebo ve vlaku, bude na vás Země působit vždy stejnou tíhovou silou $\boldsymbol{F}_G$. Kostka ledu ve sklenici s vodou je nadlehčována podle Archimédova zákona stejně velkou statickou vztlakovou silou $\boldsymbol{F}_v$ na Zemi i v letadle letícím v určité výšce stálou rychlostí. A bylo by možné uvést celou řadu dalších příkladů.

Naopak každá vztažná soustava, jež se pohybuje vůči inerciální soustavě jinak než pohybem rovnoměrným přímočarým, je soustava neinerciální. Příkladem takové soustavy je vztažná soustava, jež se vůči soustavě inerciální pohybuje zrychleným (nebo zpomaleným) pohybem, nebo soustava, jež se vůči inerciální soustavě otáčí.

⇒ Neinerciální vztažné soustavy jsou takové, jež se pohybují vůči inerciálním vztažným soustavám **se zrychlením** (ať už tečným nebo normálovým či obojím).

Bezprostředním důsledkem pohybu neinerciální vztažné soustavy se zrychlením je existence sil, jež nemají původ ve vzájemném působení mezi tělesy, ale vznikají právě (a pouze) díky pohybu soustavy s příslušným zrychlením. Tyto síly se nazývají **síly setrvačné** $\boldsymbol{F}_S$.

Jejich směr je vždy opačný, než je směr zrychlení $\boldsymbol{a}$ dané neinerciální soustavy. Působí-li v neinerciální vztažné soustavě setrvačná síla $\boldsymbol{F}_S$ na hmotný objekt o hmotnosti m, platí pro ni vztah

$$\boldsymbol{F}_S = -m \,.\, \boldsymbol{a} \quad . \tag{2.73}$$

Setrvačné síly skutečně působí jen v neinerciálních vztažných soustavách. Protože nejsou vyvolány vzájemným působením mezi tělesy, nikdy nemají k sobě sílu reakce → **3. Newtonův zákon pro ně v žádném případě neplatí**. !!!

Pro pozorovatele v neinerciální soustavě jsou ale stejně reálné, jako „klasické“ síly, jež jsou důsledkem vzájemného působení mezi tělesy. A navíc → setrvačné síly se samozřejmě mohou s těmito „klasickými“ silami normálně skládat, což v konečném důsledku může vést k zajímavým jevům v inerciálních soustavách nepozorovatelným.

Příkladem setrvačných sil může být např.:

1. Síla vznikající při rozjezdu nebo brzdění každého dopravního prostředku

Rozjíždí-li se dopravní prostředek se zrychlením $\boldsymbol{a}$, začne na vás okamžitě působit setrvačná síla (2.73) o velikosti $F_s = m \,.\, a$ směrem „dozadu“; naopak při brzdění vás setrvačná síla téže velikosti tlačí „dopředu“. Podobně při přepravě tekutin působí při těchto situacích setrvačné síly na jednotlivé molekuly a mohou být příčinou vzniku značných tlaků v tekutině, v jejichž důsledku může dojít např. i k proražení stěny cisterny apod.

2. Síla vznikající v otáčející se soustavě – síla odstředivá

Otáčí-li se vztažná soustava s úhlovou rychlostí ω, působí na hmotný objekt ve vzdálenosti r od osy otáčení setrvačná síla odstředivá, jejíž velikost je

$$F_s = m \,.\, r \,.\, \omega^2 \qquad (2.74)$$

a její směr je vždy od osy otáčení, tedy přesně opačný než je směr síly dostředivé. Klasickým příkladem existence odstředivé síly je působení naší Země na tělesa v jejím gravitačním poli. Tím, že se Země otáčí s úhlovou rychlostí $\omega = 7{,}27 \,.\, 10^5\ \mathrm{s}^{-1}$, působí na každý objekt na jejím povrchu kromě gravitační síly $\boldsymbol{F}_g$ též setrvačná síla odstředivá o velikosti $F_s = m \,.\, r \,.\, \omega^2$, kde r je kolmá vzdálenost objektu od zemské osy. Výslednicí těchto dvou sil je tzv. **síla tíhová**

$$\boldsymbol{F}_G = \boldsymbol{F}_g + \boldsymbol{F}_s \quad ,$$

jejíž velikost je vždy (s výjimkou zemských pólů) menší než velikost síly gravitační a navíc se závisí i na zeměpisné šířce příslušného místa na povrchu Země.

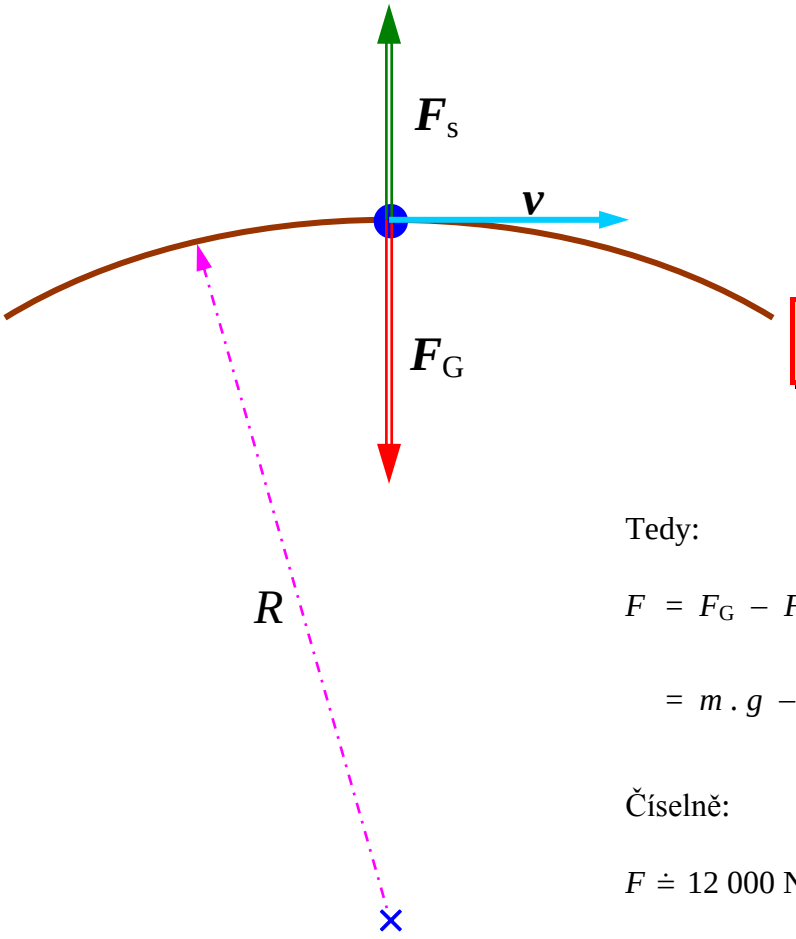
Podobná situace ale může nastat, když se např. dopravní prostředek pohybuje po vypuklé vozovce, jak ukazuje i následující úloha.

Příklad:

Automobil o hmotnosti 1,2 t jede po vypuklém mostním oblouku o poloměru křivosti 85 m stálou rychlostí 100 $\mathrm{km.h}^{-1}$. Jak velkou silou působí automobil na vozovku v nejvyšším místě mostu?

Silové působení automobilu na vozovku je schématicky znázorněno na obrázku na následující straně. Toto působení bude dáno výslednicí dvou sil - tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$ Země mířící svisle dolů a odstředivé setrvačné síly $\boldsymbol{F}_s$, jejíž směr je naopak svisle vzhůru. Pro velikost výslednice pak musí platit

$$F = F_G - F_s \quad .$$



$v = r \,.\, \omega$

Tedy:

$$F = F_G - F_S = m \,.\, g - m \,.\, r \,.\, \omega^2 =$$

$$= m \,.\, g - m \,\frac{v^2}{r} \quad .$$

Číselně:

$F \doteq 12\,000$ N $- 10\,900$ N

$F \doteq 1\,100$ N

Odpověď: Automobil působí v nejvyšším bodě oblouku na vozovku silou přibližně jen 1,1 kN.

Pozn.: Působením setrvačných sil a jejich skládáním s „normálními“ silami může dokonce dojít i k tzv. „**beztížnému stavu**“ těles pohybujících se spolu s neinerciální vztažnou soustavou.

→ Nachází-li se hmotný objekt v tělese padajícím volným pádem (tedy v neinerciální vztažné soustavě pohybující se s tíhovým zrychlením $\boldsymbol{g}$ směrem dolů), působí na něj svisle vzhůru setrvačná síla $\boldsymbol{F}_S = -\, m \,.\boldsymbol{g}$. Výslednicí této setrvačné síly a stejně velké opačně orientované síly tíhové $\boldsymbol{F}_G = m \,.\boldsymbol{g}$ bude síla nulová a těleso se bude nacházet v beztížném stavu – bude se (např. uvnitř padajícího výtahu) volně vznášet.

→ Nachází-li se kosmonaut na družici obíhající kolem Země (tedy v neinerciální vztažné soustavě otáčející se s jistou úhlovou rychlostí ω), působí na něj ve směru od Země setrvačná odstředivá síla stejně velká jako opačně orientovaná přitažlivá gravitační síla Země. Výslednice těchto dvou sil je opět síla nulová a kosmonaut se tak bude na družici nacházet v beztížném stavu.

3. Mechanika soustav hmotných bodů

3.1 Síly působící na soustavu hmotných bodů

Jak jsme si ukázali v předcházejícím výkladu, je příčinou změny pohybového stavu hmotného objektu neboli příčinou změny jeho hybnosti síla, jež na něj působí, resp. výslednice na něj působících sil. Podobně tak tomu bude i u **soustav** hmotných objektů (soustav hmotných bodů); opět o změnách jejich pohybových stavů budou rozhodovat síly, jež na jednotlivé součásti takových soustav působí. Zde ale musíme zásadně rozlišit, kdo toto silové působení vyvolal. Podle toho pak rozdělujeme síly působící na soustavu hmotných bodů do dvou základních skupin:

a) Síly vnitřní – to jsou takové síly, jimiž na sebe vzájemně působí pouze hmotné objekty dané soustavy. Jsou to tedy vždy jen síly akce a reakce, a protože mají tyto síly u každých dvou bodů soustavy stejnou velikost, ale opačný směr, bude jejich výslednice pokaždé nulová. Protože platí

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \quad \text{pro sílu akce a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{F} \quad \text{pro sílu reakce,}$$

dostáváme jejich součtem

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} + (-\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{0}\ \mathrm{N} \quad .$$

Jelikož

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) = \boldsymbol{0}\ \mathrm{N} \quad ,$$

musí být součet hybností $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$ obou hmotných bodů konstantní.

Z toho je zřejmé, že vnitřní síly soustavy nemohou změnit její celkový pohybový stav (její celkovou hybnost) → soustava „sama od sebe“ svůj pohybový stav nikdy změnit nemůže.

Ale pozor !!! Protože každá z vnitřních sil soustavy působí na jiný hmotný objekt, může pohybový stav tohoto objektu pochopitelně měnit. Co se však nezmění, je **celková hybnost soustavy** – ta zůstává konstantní. **!!**

b) Síly vnější – to jsou takové síly, jež charakterizují působení na soustavu „cizími“ objekty (jinými tělesy, jinými hmotnými body), tedy objekty, jež do dané soustavy ***nepatří***. Tyto síly (pokud ovšem dávají nenulovou výslednici) pohybový stav soustavy – neboli celkovou hybnost soustavy – **vždy změní**.

3.2 Změna hybnosti soustavy hmotných bodů; zákon zachování hybnosti

Jak bylo řečeno v úvodním článku této kapitoly, dochází ke změnám hybnosti soustavy hmotných bodů právě v těch případech, kdy se vnější silové působení na danou soustavu nevyruší. Vyřešme si nyní tuto situaci.

Předpokládejme, že soustava bude tvořena n hmotnými body (m_1, m_2, ….., m_n) a na každý bude působit určitá vnější síla ($\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, ….., $\boldsymbol{F}_n$). Podle druhého Newtonova zákona (2.45) musí pro změnu hybnosti každého hmotného bodu v soustavě platit

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{F}_1 \quad , \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{F}_2 \quad , \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_n}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{F}_n \quad . \end{aligned}$$

Sečteme-li jednotlivé rovnice

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{\mathrm{d}t} + \cdots\cdots + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_n}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots\cdots + \boldsymbol{F}_n$$

dostaneme na levé straně součet časových změn jednotlivých hybností. Ale součet změn je přeci totéž co změna součtu, neboli změna celkové hybnosti soustavy $\boldsymbol{p}_{\mathrm{soust}}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \cdots\cdots + \boldsymbol{p}_n) = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots\cdots + \boldsymbol{F}_n \quad .$$

Na pravé straně pak máme součet vnějších sil působících na soustavu hmotných bodů, tedy jejich výslednici $\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}$. Touto jednoduchou úpravou se tak dostáváme ke konečnému výrazu

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{\mathrm{soust}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}} \quad . \tag{3.1}$$

Z něj jednoznačně vyplývá, že

časová změna hybnosti soustavy hmotných bodů je rovna výslednici vnějších sil na soustavu působících.

Právě odvozený vztah (3.1) bývá nazýván „**První věta impulzová**“ (též „**Věta o hybnosti soustavy hmotných bodů**“). Jak se můžeme snadno přesvědčit, je v této větě obsažen i jeden ze základních fyzikálních zákonů – **zákon zachování hybnosti**.

Podmínka platnosti tohoto zákona je jednoduchá. Aby nedocházelo ke změnám hybnosti, tedy aby

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{\mathrm{soust}}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0}\ \mathrm{kg.m.s^{-2}} \quad ,$$

musí být výslednice $\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}$ vnějších sil působících na soustavu nulová ($\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}} = \mathbf{0}$ N).

Zákon zachování hybnosti → je-li výslednice $\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}$ všech **vnějších sil** působících na soustavu hmotných bodů ***nulová***, je **celková** hybnost takové soustavy konstantní (co do velikosti i co do směru). Platí

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{konst.} \quad . \qquad (3.2)$$

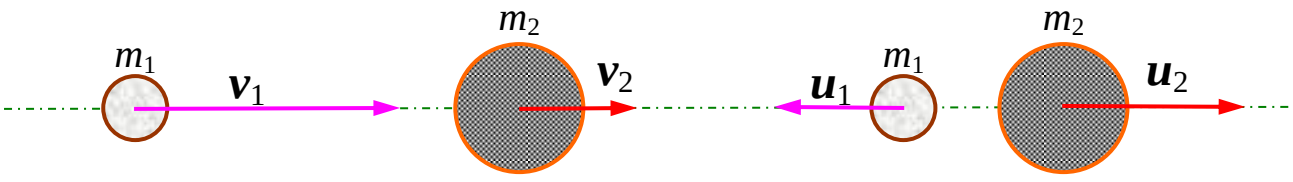
Jak jsme si dokázali v předcházejícím článku, hybnost soustavy se nezmění, když v ní působí pouze síly vnitřní. Zákon zachování hybnosti proto platí výhradně v tzv. **silově izolovaných soustavách**. Jsou to takové soustavy, na něž ***nepůsobí vnější síly*** nebo se tyto síly ***navzájem ruší***.

Zákon zachování hybnosti můžeme aplikovat například u různých srážek těles, u explozí a v podobných situacích, kdy mezi objekty v soustavách působí skutečně jen vnitřní síly akce a reakce. Typickým příkladem je centrální srážka (neboli ráz) dvou těles.

3.3 Centrální ráz dvou těles

K centrálnímu rázu dvou těles dojde, když se tělesa pohybují po jedné přímce proložené jejich hmotnými středy (těžišti), tudíž vektory okamžitých rychlostí leží na této přímce. Předpokládejme dále, že i bod dotyku obou těles při srážce leží na této přímce, a tím pádem budou na ní ležet i síly akce a reakce, které při rázu mezi oběma tělesy působí ⇒ i po srážce se budou tělesa po původní přímce pohybovat.

Jako vhodný modelový příklad nám poslouží centrální ráz dvou homogenních koulí (viz následující obr. 3.1). Předpokládejme, že se obě tělesa pohybují posuvným pohybem, přičemž jejich hmotné středy (těžiště) leží stále na jedné přímce – na středné obou koulí. Známe hmotnosti m_1 a m_2 obou koulí a pro odlišení budeme jejich rychlosti před srážkou označovat $\boldsymbol{v}_1$ a $\boldsymbol{v}_2$, po srážce pak $\boldsymbol{u}_1$ a $\boldsymbol{u}_2$.



Obr. 3.1 – centrální ráz dvou koulí

Jedná se o izolovanou soustavu, pro níž **platí zákon zachování hybnosti**, tudíž

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = m_1 \boldsymbol{u}_1 + m_2 \boldsymbol{u}_2 \quad . \tag{3.3}$$

Při srážce působí sice jen síly akce a reakce, ale ty mohou na každém tělese způsobit trvalou deformaci tím, že konají práci. Soustava tak není izolována od sil schopných konat práci, a proto **zákon zachování mechanické energie obecně neplatí**. Mechanická energie se zachovává pouze v případě, že se jedná o tzv. ***srážku pružnou***, po níž zůstane tvar těles původní, nedeformovaný.

Předpokládáme-li, že se tělesa pohybují ve stále stejné výšce, stačí se zabývat pouze otázkou pohybové energie. Je jasné, že v tomto případě splňují pohybové energie obou těles podmínku

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 \geq \tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 u_2^2 \quad . \tag{3.4}$$

K určení rychlostí těles po srážce tedy obecně potřebujeme kromě hmotností znát také tři ze čtyř rychlostí nebo obě rychlosti původní a procento ztrát pohybové energie při srážce.

Jednoduché je řešení tohoto problému ve dvou krajních případech – jednak při už zmíněné srážce pružné, kdy jsou splněny současně oba zákony zachování, a potom při srážce dokonale nepružné, kdy obě tělesa při deformaci splynou v jedno jediné těleso o hmotnosti $m_1 + m_2$, a našim úkolem je pak určit jen jedinou rychlost tohoto „celku“ po srážce.

a) pružná srážka dvou těles

Předpokládejme, že známe jak hmotnosti m_1 a m_2 obou těles, tak i jejich původní rychlosti před srážkou $\boldsymbol{v}_1$ a $\boldsymbol{v}_2$ (jak velikosti, tak i směry). Protože se tělesa pohybují po vodorovné přímce, můžeme snadno přejít v zákoně zachování hybnosti od vektorového zápisu k zápisu skalárnímu. Přitom uplatníme následující znaménkovou konvenci:

→ pohybuje-li se těleso zleva doprava, budeme jeho rychlost považovat za kladnou,

← pohybuje-li se naopak těleso zprava doleva, budeme jeho rychlost záporná.

Tím pádem nám pak znaménko výsledku jednoznačně určí směr rychlostí $\boldsymbol{u}_1$ a $\boldsymbol{u}_2$ po srážce.

Ze vztahů (3.3) a (3.4) tak dostáváme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, jimiž jsou rychlosti u_1 a u_2 obou těles po srážce.

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 u_2^2 \quad / \cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_1 (v_1 - u_1) &= m_2 (u_2 - v_2) \\ m_1 (v_1^2 - u_1^2) &= m_2 (u_2^2 - v_2^2) \end{aligned}$$

Vydělíme druhou rovnici rovnicí první a dostaneme jednoduchý vztah pouze pro rychlosti

$$\boxed{v_1 + u_1 = u_2 + v_2} \quad . \tag{3.5}$$

Součet rychlostí obou těles (samozřejmě s ohledem na znaménko) před i po srážce je stejný bez ohledu na hmotnosti obou těles. Tělesa si při pružné srážce své rychlosti jakoby „vymění“.

Vyjádříme-li ze vztahu (3.5) např. rychlost u_2 a dosadíme-li jí do první rovnice (zákona zachování hybnosti), dostaneme po krátké úpravě, kterou ponechám na vaši iniciativě, výsledek pro hledanou rychlost prvního tělesa po srážce

$$\boxed{u_1 = \frac{(m_1 - m_2)\cdot v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}} \quad . \tag{3.6}$$

a následně i pro rychlost tělesa druhého

$$\boxed{u_2 = \frac{(m_2 - m_1)\cdot v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}} \quad . \tag{3.7}$$

Rozborem uvedených výrazů dostáváme zajímavé výsledky u dvou význačných případů.

1) Budou-li hmotnosti obou těles stejné

$$m_1 = m_2 = m \quad ,$$

pak okamžitě dostáváme

$$u_1 = v_2 \quad ; \quad u_2 = v_1 \quad .$$

Koule tak si dokonale „prohodí“ svoje rychlosti. Bude-li navíc druhá koule původně v klidu, pak po rázu zůstane v klidu koule první a druhá se bude pohybovat stejnou rychlostí (co do velikosti i co do směru), jakou se pohybovala před srážkou koule první.

2) Nechť má druhé těleso mnohonásobně větší hmotnost než těleso prvé a navíc, ať je před srážkou v klidu:

$$m_2 \gg m_1 \ \ \& \ \ v_2 = 0\ \mathrm{m.s^{-1}} \quad .$$

V tomto případě vychází

$$u_1 = -v_1 \quad ; \quad u_2 \doteq 0\ \mathrm{m.s^{-1}} \quad .$$

To znamená, že druhé těleso mající podstatně větší hmotnost zůstane i po pružné srážce v klidu, zatímco první těleso se od něj odrazí nazpět stejně velkou rychlostí.

b) dokonale nepružná srážka dvou těles

Výjimečností této srážky je skutečnost, že při ní obě tělesa deformací způsobenou silami akce a reakce splynou v jedno jediné těleso o celkové hmotnosti $m_1 + m_2$. Zbývá tak vyřešit pouze jediné, a to velikost a směr rychlosti $\boldsymbol{v}$ této spojené hmotnosti po srážce.

Předpokládejme, že opět známe jak hmotnosti m_1 a m_2 obou těles, tak i jejich původní rychlosti před srážkou $\boldsymbol{v}_1$ a $\boldsymbol{v}_2$. Uplatníme úplně stejnou znaménkovou konvenci jako v případě pružné srážky; znaménko výsledné rychlosti u nám pak určí její směr.

K řešení máme velice jednoduchou rovnici o jedné neznámé

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, v \quad ,$$

takže okamžitě dostáváme výsledek

$$\boxed{v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}} \quad . \tag{3.8}$$

Příklad:
Na jedné přímce se pohybují dvě tělesa o hmotnostech 2 kg a 8 kg. První má rychlost o velikosti 15,0 m.s^{-1}, druhé pak 3,5 m.s^{-1}. Určete:

1) jakou rychlostí se budou pohybovat po pružné srážce,
   a) je-li původní směr pohybu obou těles stejný,
   b) pohybují-li se před srážkou proti sobě;
2) jakou rychlostí se budou pohybovat po dokonale nepružné srážce,
   c) je-li původní směr pohybu obou těles stejný,
   d) pohybují-li se před srážkou proti sobě,
   e) o kolik procent se při těchto nepružných srážkách změní celková energie soustavy.

Úloha 1)

a) $u_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)\cdot v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{(2-8)\cdot 15{,}0 + 2\cdot 8\cdot 3{,}5}{2+8}$ m.s^{-1} $= -3{,}4$ m.s^{-1}

$u_2 = \dfrac{(m_2 - m_1)\cdot v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \dfrac{(8-2)\cdot 3{,}5 + 2\cdot 2\cdot 15{,}0}{2+8}$ m.s^{-1} $= +8{,}1$ m.s^{-1}

Těleso s menší hmotností „dohání“ těleso o hmotnosti čtyřikrát větší. Při pružné srážce bude větší těleso víc jak dvakrát urychleno logicky v původním směru pohybu; menší těleso se ale odrazí a bude se po srážce pohybovat směrem opačným.

b) Zde je třeba dosadit dle znaménkové konvence $v_2 = -3{,}5$ m.s^{-1} **!!!**

$u_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)\cdot v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{(2-8)\cdot 15{,}0 + 2\cdot 8\cdot (-3{,}5)}{2+8}$ m.s^{-1} $= -14{,}6$ m.s^{-1}

$u_2 = \dfrac{(m_2 - m_1)\cdot v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \dfrac{(8-2)\cdot (-3{,}5) + 2\cdot 2\cdot 15{,}0}{2+8}$ m.s^{-1} $= +3{,}9$ m.s^{-1}

Obě dvě tělesa při této pružné srážce změní směr svého pohybu. Velikosti obou rychlostí se změní jen o malou hodnotu, ale dojde k podstatné změně **vektorů** obou okamžitých rychlostí.

Jak se ale můžete snadno přesvědčit jednoduchým výpočtem, pohybová energie soustavy v obou výše rozebraných případech zůstává zachována

$$E_{\mathrm{k\ soust}} = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 u_2^2 = 274\ \mathrm{J}\ .$$

Úloha 2)

c) $v = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{2 \cdot 15{,}0 + 8 \cdot 3{,}5}{2 + 8}\ \mathrm{m.s^{-1}} = +5{,}8\ \mathrm{m.s^{-1}}$

Celkem pochopitelně se spojené těleso pohybuje menší rychlostí, než byla původní rychlost v_1 prvního („rychlejšího“) tělesa, a naopak vyšší rychlostí, než byla původní rychlost v_2 „pomalejšího“ druhého tělesa. Navíc se lze snadno přesvědčit, že mezi rychlostmi a hmotnostmi platí zajímavá úměra

$$\frac{v_1 - v}{v - v_2} = \frac{m_2}{m_1}\ . \qquad (3.9)$$

Rychlost tělesa o menší hmotnosti (v našem případě m_1) se při spojení do celku po srážce změní více než rychlost tělesa o hmotnosti větší. A to přesně v opačném poměru než jsou hmotnosti obou srážejících se těles. Jak se ale můžete snadno přesvědčit, vztah (3.9) je vlastně jen přepisem výrazu (3.8) a oba vzorce jsou navzájem ekvivalentní.

Pozn.: Se stejnou úměrou se ve fyzice setkáme častěji, a to i u dějů kvalitativně naprosto rozdílných, jako je např. míchání horké a studené vody, paralelní spojování dvou různě nabitých kondenzátorů aj. Početní postupy, jak se ostatně ještě v tomto semestru přesvědčíme, jsou u těchto dějů úplně stejné – fyzika skutečně není složitá.

d) Tělesa se pohybují proti sobě, nechť tedy $v_2 = -3{,}5\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 15{,}0 + 8 \cdot (-3{,}5)}{2 + 8}\ \mathrm{m.s^{-1}} = +0{,}2\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

Výsledná rychlost je téměř nulová (celek by se nepohyboval jen v tom případě, že by hybnosti obou těles před srážkou byly stejně velké), kladné znaménko výsledku znamená, že směr pohybu celku po srážce je stejný jako směr pohybu prvního tělesa o hmotnosti m_1. A opět zde platí úměra

$$\frac{v_1 - v}{v - v_2} = \frac{m_2}{m_1}\ , \qquad (3.9)$$

pozor však, že i s ohledem na zavedená znaménka rychlostí.

e) Zbývá už jen poslední úkol – zjistit procento ztrát pohybové energie při obou nepružných srážkách. Pohybovou energii soustavy před srážkou známe

$$E_{\mathrm{k\ soust}} = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = 274\ \mathrm{J}\ .$$

Po srážce pak tuto hodnotu spočítáme jako

$$E_{\mathrm{k\ po}} = \tfrac{1}{2} (m_1 + m_2)\, v^2\ ,$$

což dává při srážce c) výsledek 168,2 J a při srážce d) pouhé 0,2 J.

Pohybují-li se tělesa stejným směrem činí ztráty pohybové energie zhruba 39 %, při srážce v protisměru pak více jak 99,9 %. Tyto ztráty jsou rovny deformační práci, kterou vykonají síly akce a reakce při dokonale nepružné srážce, a je vcelku pochopitelné, že následky deformace jsou v případě d) podstatně výraznější.

3.4 Hmotný střed soustavy

Hmotnost soustavy hmotných bodů bývá v prostoru nějakým způsobem rozložena a popis jejího pohybu jako celku může být proto velmi složitý. Přesto jisté zjednodušení tady provést lze. Pohybový stav soustavy charakterizuje její celková hybnost daná vektorovým součtem hybností jednotlivých hmotných bodů

$$\boldsymbol{p}_{\text{soust}} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \ldots\ldots + \boldsymbol{p}_n \quad . \tag{3.10}$$

Tuto hybnost by ale šlo vyjádřit i jako součin hmotnosti celé soustavy

$$m = m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n \tag{3.11}$$

a jisté rychlosti $\boldsymbol{v}_S$, jíž se tato jediná celková hmotnost posouvá.

A právě umístění této celkové hmotnosti soustavy m v prostoru vede k zavedení pojmu **hmotný střed soustavy hmotných bodů**. Je to jen jistý **geometrický bod v prostoru**, jehož pozice je dána tím, jak jsou jednotlivé hmotné body soustavy v prostoru rozmístěny. Ve zvolené soustavě souřadnic pozici hmotného středu jednoznačně určuje **polohový vektor**

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i}{m} \quad , \tag{3.12}$$

kde → m_i jsou hmotnosti jednotlivých hmotných bodů soustavy a

→ $\boldsymbol{r}_i$ jejich polohové vektory v příslušné soustavě souřadnic.

Dá se celkem snadno dokázat, že poloha hmotného středu **S** soustavy (míněno vzhledem k jednotlivým hmotným bodům této soustavy) **nezáleží** na volbě systému souřadnic **!!!**

Posuvný pohyb soustavy hmotných bodů jako celku pak lze vyjádřit jako pohyb její celkové hmotnosti m umístěné v hmotném středu a rychlostí posunu $\boldsymbol{v}_S$ tohoto bodu prostorem.

S pojmem hmotného středu se také setkáváme u těles, v nichž je hmotnost většinou spojitě rozložena. Pro tyto objekty pak sumu ve vztahu (3.12) nahradí integrál. Pro polohu hmotného středu tělesa tak platí

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{\int_{(m)} \boldsymbol{r}\, \mathrm{d}m}{m} \quad , \tag{3.13}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor libovolného elementu tělesa o hmotnosti dm.

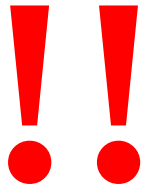
Výpočty hmotných středů různých soustav hmotných bodů anebo těles jsou vcelku vděčnými matematickými úlohami. Jejich výsledky můžete nalézt v příslušné literatuře.

Pozor: Hmotný střed soustavy hmotných bodů nebo tělesa nemusí být nutně bodem, v němž se skutečně nějaká hmotnost nachází (vezměte si třeba prsten, rouru, hrníček, dutou kouli a další tělesa). Jedná se pouze o **geometrický prvek**, místo, kam by šlo veškerou hmotnost soustavy (resp. tělesa) soustředit a „přetvořit“ ji fakticky na hmotný bod z důvodů výše zmíněných.

Pojem hmotný střed bývá často zaměňován s pojmem **těžiště** soustavy. Oba termíny však znamenají přeci jen něco „trochu jiného“.

Těžiště je ve skutečnosti užší pojem než hmotný střed – je to bod, v němž se nachází působiště výslednice tíhových sil, jež na soustavu (resp. na těleso) v tíhovém poli Země působí. Navíc jeho poloha nemusí být obecně totožná s polohou hmotného středu.

Taková situace nastává **pouze v homogenním tíhovém poli !!!**



3.5 Moment hybnosti a moment síly

Soustava hmotných bodů (a pochopitelně i těleso) může na rozdíl od hmotného bodu vykonávat kromě pohybů posuvných také pohyby otáčivé, a to buď kolem pevného bodu (ty bývají složitější), nebo kolem pevné osy (na ty se zejména později u těles zaměříme). Popřípadě může vykonávat oba typy pohybu – posuvný i rotační – současně (jak je tomu např. u valivého pohybu kol dopravních prostředků).

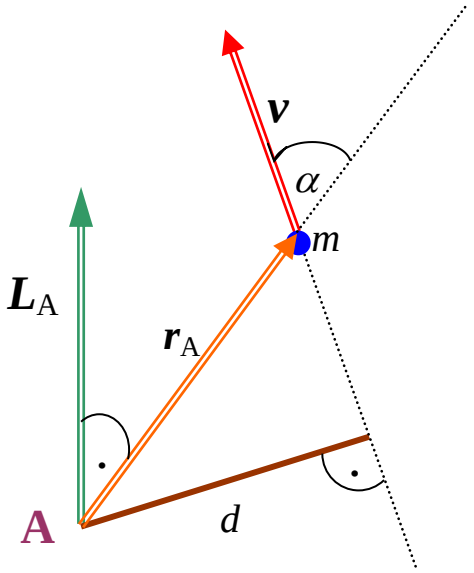
Při studiu dynamiky rotačního pohybu se potvrzuje, že pro otáčivý účinek síly na danou soustavu (resp. těleso) je podstatný nejen její směr a velikost, ale v první řadě její **působiště**. Síla jedné a téže velikosti, jednoho a téhož směru může mít na pohyb soustavy (tělesa) naprosto rozdílný účinek podle toho, v jakém bodě tělesa právě působí. Z tohoto důvodu proto zavádíme novou fyzikální veličinu – **moment síly**. Její fyzikální význam spočívá v tom, že jednoznačně charakterizuje **otáčivý účinek dané síly** vzhledem k danému bodu nebo vzhledem k dané ose.

Podobně pak pro hmotný bod (a později i pro soustavu hmotných bodů a pro těleso) zavádíme veličinu vystihující jeho (jejich) **pohybový stav vzhledem k danému bodu v prostoru nebo vzhledem k dané ose**. Touto fyzikální veličinou je **moment hybnosti** hmotného bodu (soustavy, či tělesa) vzhledem k danému bodu v prostoru nebo vzhledem k rotační ose.

* * *

Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ hmotného bodu je vektorová fyzikální veličina, jež charakterizuje – jak již bylo řečeno – pohybový stav tohoto hmotného bodu vzhledem k danému bodu v prostoru (resp. k dané ose), kolem něhož (níž) se hmotný bod pohybuje.

Definice momentu hybnosti hmotného bodu **vzhledem k danému bodu v prostoru** je poměrně jednoduchá. Nechť se daný hmotný bod o hmotnosti m pohybuje okamžitou rychlostí $\boldsymbol{v}$ kolem jistého bodu **A** v prostoru. Polohu hmotného bodu m vzhledem k bodu **A** přitom charakterizuje jeho polohový vektor $\boldsymbol{r}_A$ (viz následující obr. 3.2).



Obr. 3.2 – moment hybnosti $\boldsymbol{L}_A$ hmotného bodu vzhledem k pevnému bodu **A**

Velikost L_A momentu hybnosti hmotného bodu m vzhledem k bodu **A** je rovna součinu velikosti hybnosti

$$p = m\,v$$

a tzv. ramene d, což je vlastně kolmá vzdálenost bodu **A** od vektorové přímky rychlosti $\boldsymbol{v}$ (resp. hybnosti $\boldsymbol{p}$)

$$\boxed{L_A = p.d = m.v.d} \quad . \qquad (3.14)$$

Směr momentu hybnosti $\boldsymbol{L}_A$ je přitom kolmý na rovinu tvořenou vektory $\boldsymbol{r}_A$ a $\boldsymbol{p}$ a jeho orientace je dána podle pravidla pravé ruky.

Tyto skutečnosti lze jednoduše vyjádřit vztahem ve tvaru vektorového součinu

$$\boxed{\boldsymbol{L}_A = \boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{p}} \quad , \qquad (3.15)$$

neboť kolmé rameno $d = r_A . \sin \alpha$.

Jak je z této definice patrné, bude moment hybnosti roven nule, jestliže se hmotný bod bude pohybovat tak, že vektorová přímka jeho rychlosti prochází bodem **A**. Moment hybnosti bude nenulový jen tehdy, když bude hmotný bod **v pohybu „mimo“ bod A**.

!!

Jak vyplývá ze vztahu (3.14) je jednotkou momentu hybnosti v soustavě SI $kg.m^2.s^{-1}$.

Při určení momentu hybnosti hmotného bodu m **vzhledem k rotační ose** o je podstatná vzájemná poloha vektorové přímky, na níž leží vektor $\boldsymbol{v}$ okamžité rychlosti hmotného bodu, a rotační osy.

Jak známo z geometrie, existují celkem 4 případy vzájemných poloh dvou přímek v prostoru:

→ přímky totožné;

→ přímky různoběžné;

→ přímky rovnoběžné;

→ přímky mimoběžné.

První tři případy, kdy vektor $\boldsymbol{v}$ okamžité rychlosti leží na ose, je s ní různoběžný nebo rovnoběžný, dávají jako výsledek momentu hybnosti vždy nulu. Odpovídá to ostatně fyzikálnímu významu této veličiny, která – znovu si to připomeňme – charakterizuje pohybový stav hmotného bodu, jenž se pohybuje kolem příslušné osy. A kolem osy se může hmotný bod pohybovat jen v tom případě, když je vektor $\boldsymbol{v}$ jeho okamžité rychlosti vůči ose o **mimoběžný**.

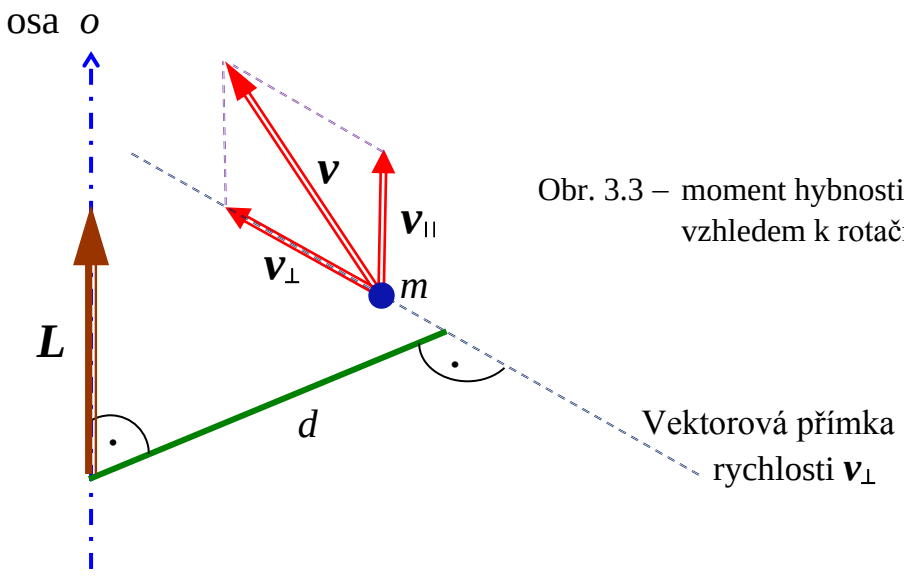
V takovém případě zvolíme dál následující postup:

1) Vektor $\boldsymbol{v}$ okamžité rychlosti nejprve rozložíme do dvou navzájem kolmých směrů – do směru vůči rotační ose kolmého a do směru s ní rovnoběžného (viz obr. 3.3). U složky rychlosti $\boldsymbol{v}_{||}$ s rotační osou rovnoběžné vychází moment hybnosti hmotného bodu m nulový, takže dále stačí počítat pouze se složkou $\boldsymbol{v}_{\perp}$ kolmou.

2) ***Velikost*** L hledaného momentu hybnosti pak bude dána jednoduchým výrazem

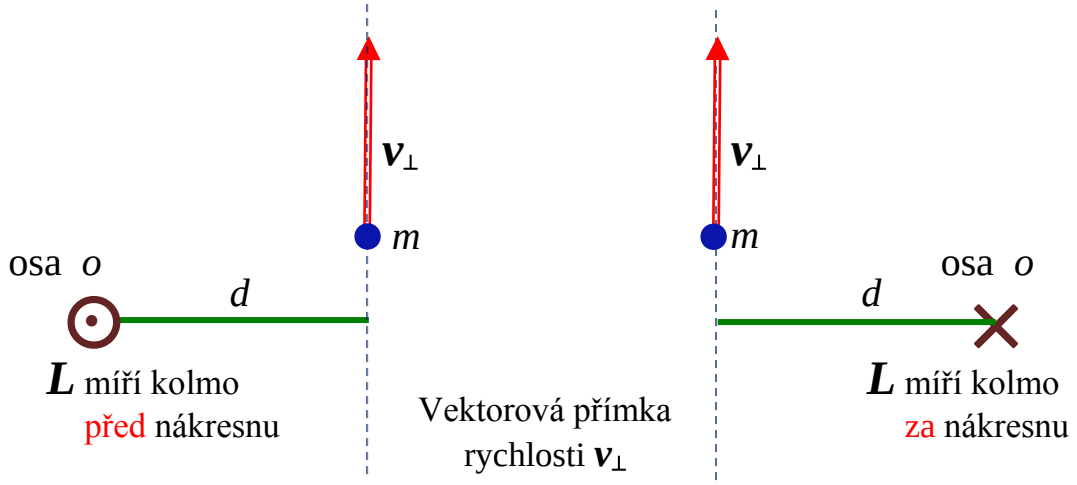
$$L = m.v_{\perp}.d \quad , \tag{3.16}$$

kde d je kolmá vzdálenost vektorové přímky rychlosti $\boldsymbol{v}_{\perp}$ a rotační osy o (tedy vlastně příčka těchto dvou mimoběžek).



Obr. 3.3 – moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ hmotného bodu vzhledem k rotační ose

Vektor $\boldsymbol{L}$ přitom leží na rotační ose o a jeho ***směr*** je dán pravidlem pravé ruky (viz obr. 3.4).



Obr. 3.4 – orientace momentu hybnosti hmotného bodu vzhledem k rotační ose

Na obrázku vlevo míjí hmotný bod osu ve směru proti chodu hodinových ručiček (tzv. směr přímý) a vektor $\boldsymbol{L}$ momentu hybnosti míří kolmo **před** nákresnu – schematicky znázorněno ⊙ .

Vpravo pak hmotný bod míjí osu ve směru chodu hodinových ručiček (tzv. směr zpětný) a vektor $\boldsymbol{L}$ momentu hybnosti míří kolmo **za** nákresnu, což schematicky znázorňuje ✕.

* * *

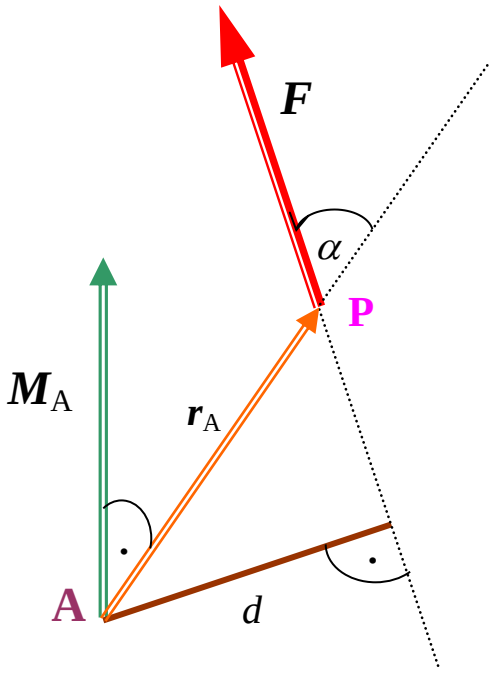
Nyní přejděme k momentu síly. Jak už bylo řečeno výše, je **moment síly** $\boldsymbol{M}$ vektorová fyzikální veličina charakterizující otáčivý účinek příslušné síly $\boldsymbol{F}$ vůči určitému bodu v prostoru nebo vůči rotační ose. O tomto otáčivém účinku nerozhoduje jen velikost dané síly a její směr, ale zejména její poloha vzhledem k onomu bodu v prostoru (resp. vzhledem k ose otáčení).

Definice momentu síly vzhledem k danému bodu v prostoru je z matematického hlediska velice podobná předchozí definici momentu hybnosti hmotného bodu, takže není důvodu, proč už jednou osvědčený postup nezopakovat – viz obr. 3.5 na následující stránce.

Působí-li v určitém bodě **P** prostoru síla $\boldsymbol{F}$ a je-li poloha jejího působiště **P** vzhledem k jistému bodu **A** určena polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_A$, je ***velikost*** M_A momentu síly $\boldsymbol{F}$ (vzhledem k bodu **A**) rovna součinu velikosti působící síly $\boldsymbol{F}$ a ramene d, což je v tomto případě kolmá vzdálenost bodu **A** od vektorové přímky působící síly.

Platí

$$M_A = F.d \quad . \tag{3.17}$$



Obr. 3.5 – moment síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k pevnému bodu **A** v prostoru

Směr vektoru momentu síly $\boldsymbol{M}_A$ je opět kolmý na rovinu tvořenou tentokráte vektory $\boldsymbol{r}_A$ a $\boldsymbol{F}$. Jeho orientace je podobně jako u momentu hybnosti dána pravidlem pravé ruky. Tudíž i moment síly $\boldsymbol{M}_A$ lze vyjádřit jako vektorový součin

$$\boldsymbol{M}_A = \boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{F} \quad , \tag{3.18}$$

přičemž opět kolmé rameno $d = r_A . \sin \alpha$.

Z definice momentu síly opět vyplývá, že tato veličina bude rovna nule, jestliže vektorová přímky síly $\boldsymbol{F}$ prochází bodem **A** (síla v takovém případě směřuje buď od bodu **A**, nebo k němu, nebo dokonce v bodě **A** působí .. **P** = **A**). Moment síly bude nenulový jen tehdy, když bude působící síla $\boldsymbol{F}$ mířit **„mimo“ bod A** a ten tedy nebude ležet na vektorové přímce síly $\boldsymbol{F}$.

Jednotkou momentu síly v soustavě SI je N.m = kg.m^2.s^{-2}. **Pozor !!!** – je to jednotka naprosto stejná jako jednotka práce nebo energie (**z matematického hlediska** se v obou případech jedná o „násobení síly a vzdálenosti“) ale **fyzikální podstata** obou veličin je naprosto odlišná.

Práce → skalární fyzikální veličina charakterizující účinek síly působící **na nějaké dráze** (např. při zvedání tělesa do určité výšky nebo při postupném uvádění tělesa do pohybu).

Moment síly → vektorová fyzikální veličina charakterizující otáčivý účinek síly působící **v daném bodě** prostoru vzhledem k jinému bodu v prostoru.

Při určení otáčivého účinku síly $\boldsymbol{F}$ **vzhledem k dané rotační ose** o se dostaneme ke stejné diskuzi jako u momentu hybnosti – opět bude záležet na vzájemné poloze vektorové přímky, na níž příslušná síla leží, a rotační osy.

A i zde dojdeme k naprosto stejným závěrům. Pokud bude síla $\boldsymbol{F}$ ležet na rotační ose nebo pokud s ní bude různoběžná nebo rovnoběžná, bude její otáčivý účinek (moment $\boldsymbol{M}$) nulový. Ani v jenom z těchto tří případů není taková síla schopná čímkoli otáčet, jak se snadno můžeme přesvědčit třeba u dveří, oken nebo u tabule s otočnými křídly. Otáčivý účinek může mít pouze taková síla, jejíž vektorová přímka je vůči rotační ose **mimoběžná**.

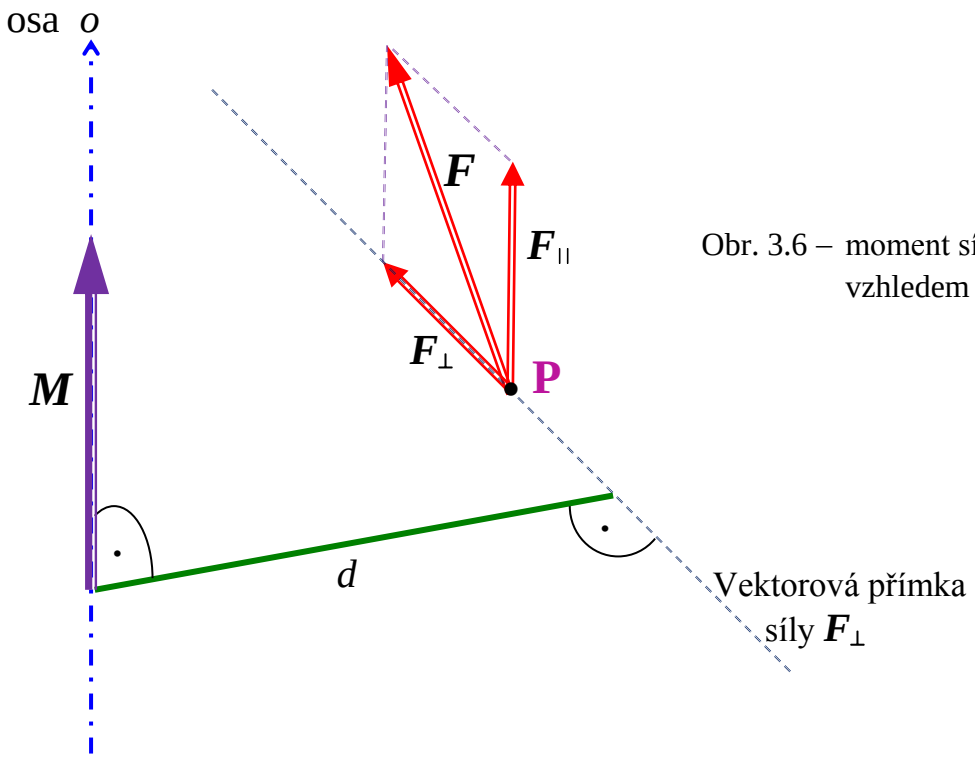
Následující postup už známe:

1) Vektor $\boldsymbol{F}$ působící síly rozložíme do dvou navzájem kolmých směrů – do směru vůči rotační ose kolmého a do směru s ní rovnoběžného (viz obr. 3.6). U složky síly $\boldsymbol{F}_{||}$ s rotační osou rovnoběžné vychází otáčivý účinek nulový, takže stačí počítat pouze s kolmou složkou $\boldsymbol{F}_{\perp}$.

2) ***Velikost*** M hledaného momentu síly pak bude

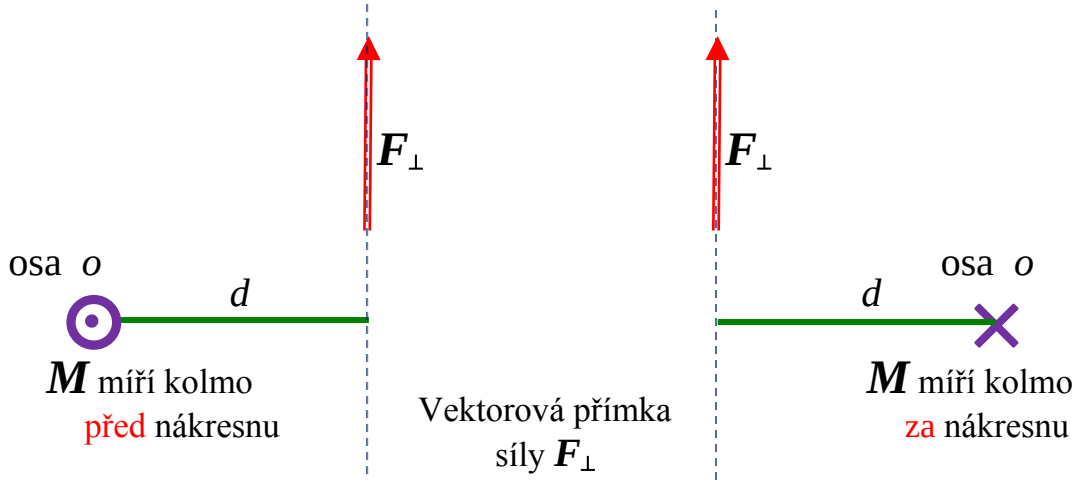
$$M = F_{\perp} . d \quad , \tag{3.19}$$

kde rameno d je kolmá vzdálenost vektorové přímky síly $\boldsymbol{F}_{\perp}$ a rotační osy o (příčka těchto dvou mimoběžek).



Obr. 3.6 – moment síly vzhledem k rotační ose

Vektor $\boldsymbol{M}$ přitom leží na rotační ose o a jeho ***směr*** je opět dán pravidlem pravé ruky (viz obr. 3.7 na následující straně).



Obr. 3.7 – orientace momentu síly vzhledem k rotační ose

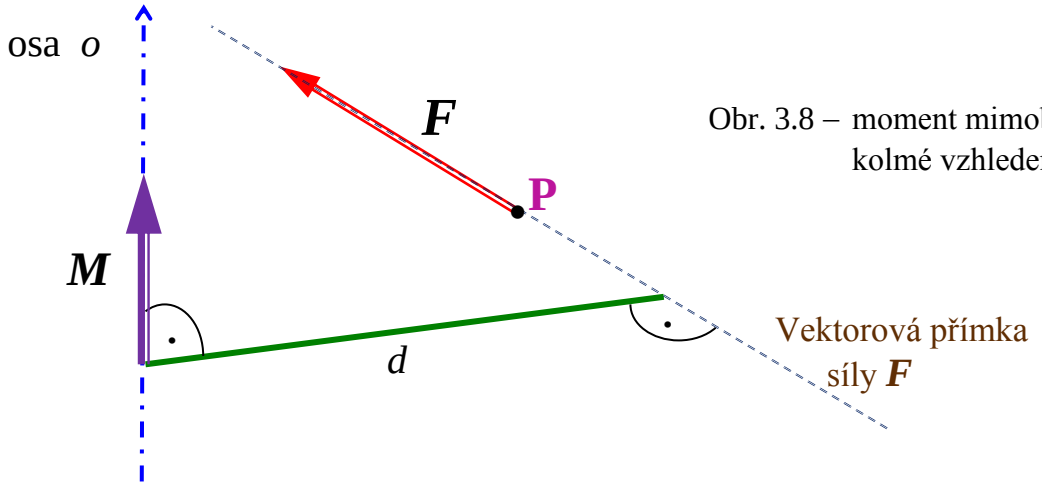
Vlevo na obrázku způsobí síla $\boldsymbol{F}$ otáčení proti chodu hodinových ručiček, orientace momentu síly $\boldsymbol{M}$ je v tomto případě kolmo **před** nákresnu – schematicky znázorněno ⊙.

Vpravo pak síla $\boldsymbol{F}$ způsobí naopak otáčení ve směru chodu hodinových ručiček a orientace momentu síly $\boldsymbol{M}$ bude taková, že míří kolmo **za** nákresnu, což schematicky znázorňuje ⊗ .

Nejjednodušším případem výpočtu momentu síly, s nímž se ostatně budeme brzy velice často setkávat u studia rotace těles, je situace, kdy působící **mimoběžná** síla je navíc vůči rotační ose **kolmá**. V takovém případě nemusíme provádět žádný rozklad síly $\boldsymbol{F}$ a její otáčivý účinek tak bude mít přímo velikost

$$M = F.d \quad , \tag{3.20}$$

přičemž rameno d je kolmá vzdálenost vektorové přímky síly $\boldsymbol{F}$ a rotační osy o (viz obr. 3.8).



Obr. 3.8 – moment mimoběžné síly navíc kolmé vzhledem k rotační ose

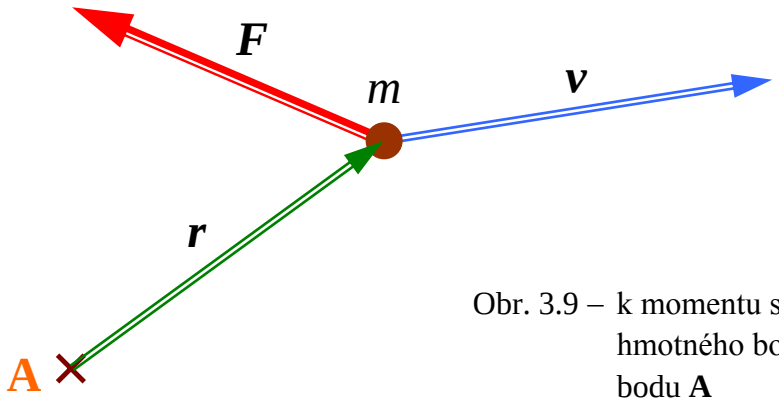
Z posledního vztahu (3.20) je rovněž na první pohled patrné, že většího otáčivého účinku dosáhneme, když bude daná kolmá síla $\boldsymbol{F}$ působit co nejdále od rotační osy.

3.6 Pohybová rovnice rotačního pohybu

Pohyb každého hmotného bodu je obecně popsán Newtonovým 2. pohybovým zákonem (zákonem síly), jenž hovoří o změně hybnosti hmotného bodu v důsledku působení síly (resp. výslednice sil) $\boldsymbol{F}$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}} \quad . \tag{2.45}$$

Podívejme se nyní, jaký vztah platí mezi otáčivým účinkem síly (momentem síly $\boldsymbol{M}$) a pohybovým stavem hmotného bodu m (momentem hybnosti $\boldsymbol{L}$) vzhledem k jistému bodu v prostoru – viz následující obr. 3.9. Jak si dokážeme dále, bude to vztah z formálního matematického úhlu pohledu úplně stejný.



Obr. 3.9 – k momentu síly $\boldsymbol{F}$ a momentu hybnosti hmotného bodu m vzhledem k pevnému bodu **A**

Předpokládejme, že v určitém bodu prostoru se nachází hmotný bod o hmotnosti m, pohybuje se okamžitou rychlostí $\boldsymbol{v}$ a současně na něj působí síla $\boldsymbol{F}$. Tato síla způsobí změnu hybnosti hmotného bodu tak, jak je popsáno pohybovou rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \quad . \tag{2.45}$$

Polohu hmotného bodu m i působiště síly $\boldsymbol{F}$ vůči jistému pevnému bodu **A** v prostoru jednoznačně charakterizuje polohový vektor $\boldsymbol{r}$. Právě vzhledem k tomuto bodu **A** budeme počítat oba příslušné momenty (tj. $\boldsymbol{M}$ i $\boldsymbol{L}$). Vynásobme proto obě strany rovnice (2.45) **zleva** polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$. Dostáváme tak

$$\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \quad .$$

Veličina na pravé straně rovnice je už přímo momentem $\boldsymbol{M}$ síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k bodu **A**. Zbývá tedy už jen upravit levou stranu.

Formálně lze psát

$$\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{p} \quad , \tag{3.21}$$

protože druhý člen v uvedeném součtu je nulový vektor

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{p} \;=\; \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{p} \;=\; \boldsymbol{0} \quad (\text{neboť } \boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{p} \;\textbf{!!!}) \qquad .$$

a přičtením nuly nikdy výsledek nezměníme.

Pokračujme v úpravě výrazu (3.21) a postupně dostáváme

$$\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \;=\; \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \;+\; \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{p} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) \;=\; \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} \qquad .$$

Touto úpravou tak dojdeme ke druhé pohybové rovnici, k **pohybové rovnici rotačního pohybu**, jež vyjadřuje vztah mezi momentem $\boldsymbol{M}$ působící síly a momentem hybnosti $\boldsymbol{L}$ hmotného bodu m vzhledem k jistému bodu v prostoru. Tento vztah je skutečně z formálního matematického hlediska dokonalým ekvivalentem rovnice (2.45). Platí, že

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} \;=\; \boldsymbol{M}} \qquad . \tag{3.22}$$

Časová změna momentu hybnosti hmotného bodu je rovna momentu působící síly.

3.7 Zákon zachování momentu hybnosti

Zkoumejme nyní opět soustavu n hmotných bodů a podívejme se na její celkový moment hybnosti $\boldsymbol{L}_{\text{soust.}}$ Podobně jako u veličiny hybnost nebudou mít na celkový moment hybnosti vliv síly vnitřní (tj. síly akce a reakce). Mají stejnou velikost, ale opačný směr, leží navíc na jedné vektorové přímce, a tudíž mají evidentně obě stejné rameno d. Jejich otáčivý účinek je sice stejně velký, ale směrově opačný, takže výslednice silových momentů každé síly akce a síly reakce je vždy nulová.

Ke změnám momentu hybnosti soustavy hmotných bodů dochází tak pouze v těch případech, kdy na soustavu působí síly vnější a navíc jejich **momenty dávají nenulovou výslednici**. Předpokládejme, že na n hmotných bodů (m_1, m_2, ….., m_n) soustavy bude působit n vnějších sil majících momenty (vzhledem k nějakému pevně zvolenému bodu v prostoru) $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$, ….., $\boldsymbol{M}_n$. Podle pohybové rovnice (3.22) musí pro každý hmotný bod soustavy platit

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{M}_1 \quad , \\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{M}_2 \quad , \\
&\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots \\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_n}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{M}_n \quad .
\end{aligned}$$

Sečteme-li jednotlivé rovnice, dostaneme na levé straně součet změn momentů hybnosti – ale součet změn je opět změna součtu, neboli změna celkového momentu hybnosti soustavy $\boldsymbol{L}_{\text{soust}}$. Na pravé straně pak součtem momentů jednotlivých sil dostáváme výsledný moment $\boldsymbol{M}_{\text{ext}}$ vnějších sil na soustavu působících

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2}{\mathrm{d}t} + \ldots\ldots + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\mathrm{n}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 + \ldots\ldots + \boldsymbol{L}_\mathrm{n}) = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \ldots\ldots + \boldsymbol{M}_\mathrm{n}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\text{soust}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_{\text{ext}}} \quad . \qquad (3.23)$$

Slovy: **„Časová změna momentu hybnosti soustavy hmotných bodů je rovna výslednici momentů vnějších sil působících na tuto soustavu“**.

Vztah (3.23) bývá v literatuře nazýván „**Druhá věta impulzová**“ (též „**Věta o momentu hybnosti soustavy hmotných bodů**“). Z této věty vyplývá mimo jiné i další důležitý fyzikální zákon – **zákon zachování momentu hybnosti**.

Podobně jako zákon zachování hybnosti i tento zákon zachování **nemá** obecnou platnost. Moment hybnosti soustavy se opět zachovává výhradně v **izolovaných soustavách**. Izolovanost však v tomto případě znamená, že na soustavu ***nepůsobí vnější silové momenty*** nebo, že se tyto vnější silové momenty ***navzájem ruší***. Pak evidentně platí

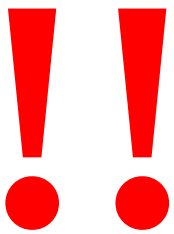
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\text{soust}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0}\ \text{N.m} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{L}_{\text{soust}} = \boldsymbol{konst.} \quad .$$

Zákon zachování momentu hybnosti → je-li výslednice $\boldsymbol{M}_{\text{ext}}$ **momentů** všech **vnějších sil** působících na soustavu hmotných bodů ***nulová***, je **celkový** moment hybnosti takové soustavy konstantní (co do velikosti i co do směru). Platí

$$\boxed{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \boldsymbol{L}_\mathrm{i} = \boldsymbol{konst.}} \quad . \qquad (3.24)$$

Zákon zachování momentu hybnosti platí například u pohybu planet kolem Slunce, u pohybu elektronů kolem jádra atomu a v řadě dalších případů, jež podmínku platnosti tohoto zákona splňují.

Pozor !!! Oba zákony zachování (hybnosti a momentu hybnosti) mají různý okruh platnosti. Platnost jednoho automaticky neznamená i platnost druhého. Jsou přeci známy případy, kdy se síly skládáním nevyruší, ale mají dohromady nulový moment (stačí, aby měly všechny nulové rameno). Na straně druhé se může čistě silový účinek dvou sil rušit (výslednice bude nulová), ale výsledný moment je nenulový (přímo klasickým případem je tzv. dvojice sil).



4. MECHANIKA TĚLES

4.1 Mechanika tuhého tělesa

4.1.1 Tuhé těleso a jeho pohyb

Tato oblast mechaniky se zabývá tělesy, jež nelze nahradit hmotným bodem. Rozměry a tvar tělesa mohou být v řadě mechanických problémů rozhodující a mohou podstatně ovlivňovat účinky sil na tato tělesa působících.

Jak již bylo řečeno v kapitole „**Dynamika pohybu hmotného bodu**“, mohou se důsledky silového působení mezi tělesy projevit jednak ve **změně jejich pohybového stavu**, jednak jejich **deformací**. V našem dalším výkladu se nejprve zaměříme na první oblast – objektem našeho zkoumání budou tzv. tělesa tuhá a jejich pohybový stav. O deformacích těles si budeme povídat později.

Je třeba říci, že **tuhé těleso** je pouze určitou fyzikální abstrakcí; je totiž absolutně nedeformovatelné, takže při jakýchkoli dějích se vzájemné vzdálenosti libovolných bodů takového tělesa nikdy nemění. U skutečných těles, jež při působení sil svůj tvar změní, lze použít závěrů vyslovených pro tuhé těleso jen tehdy, můžeme-li případnou deformaci zanedbat.

Významným bodem je **těžiště tuhého tělesa**. Je to bod, v němž se nachází působiště tíhové síly, t.j. výslednice všech tíhových sil působících na jednotlivé elementy d*m* hmotnosti tuhého tělesa při jakékoli poloze tělesa v prostoru. Pozor na to, že těžiště tělesa nemusí být nutně bodem daného tělesa (např. to vidíme u prstenu, roury, duté koule, apod.). Platí, že u ***homogenních*** **tuhých těles** majících střed souměrnosti (jako je např. koule, krychle, válec, atd.) se těžiště nachází právě v tomto bodě symetrie. A jak již bylo vysvětleno v předcházející kapitole, v homogenním tíhovém poli Země je těžiště tělesa totožné s **hmotným středem**, jenž ale představuje z pohledu mechaniky obecnější pojem.

Tuhé těleso na rozdíl od hmotného bodu může vykonávat jak pohyb posuvný, tak i pohyb otáčivý, a to buď kolem pevného bodu (ten bývá obvykle složitější), nebo kolem pevné osy (na ten se v dalším výkladu podrobněji zaměříme), popřípadě může vykonávat oba pohyby současně (tzv. pohyb valivý)..

→ Posuvný pohyb tuhého tělesa

Je takovým typem pohybu, kdy všechny body daného tělesa konají naprosto identické pohyby, mají v každém čase *t* stejné rychlosti ***v*** a zrychlení ***a*** (co do velikosti i co do směru); **trajektorie všech bodů tělesa mají totožný tvar**, jsou jen v prostoru příslušně posunuty podle toho, jak jsou jednotlivé body od sebe vzdáleny. Proto je možné z hlediska kinematiky posuvný pohyb tuhého tělesa jednoznačně popsat pohybem kteréhokoli jeho bodu. V takovém případě využijeme poznatků získaných v předcházejícím výkladu.

→ Otáčivý pohyb tuhého tělesa vzhledem k nehybné ose *o*

Pro rotaci tuhého tělesa je charakteristické to, že všechny body ležící na ose otáčení jsou trvale v klidu a ostatní pak opisují kružnice, jejichž středy leží vždy na ose otáčení *o*, přičemž roviny, v nichž tyto kružnice leží, jsou k ose otáčení kolmé. Různé body tuhého tělesa opíší za stejný čas různě dlouhé dráhy (kruhové oblouky) *s*, ale všechny se otočí za tuto dobu o stejný úhel φ (urazí stejnou úhlovou dráhu φ); různé body tělesa mají v daném čase *t* různě velké rychlosti *v* (čím dále jsou od osy otáčení, tak tím bude rychlost *v* větší), všechny body tuhého tělesa však mají v daném okamžiku stejnou úhlovou rychlost ω; stejná zákonitost platí u nerovnoměrných pohybů i pro zrychlení – různé body tělesa mají v daném čase *t* různě velké tečné (ale i normálové) zrychlení a_t (opět tím větší, čím dále jsou od osy otáčení), ale všechny body tuhého tělesa mají v daném okamžiku stejné úhlové zrychlení α.

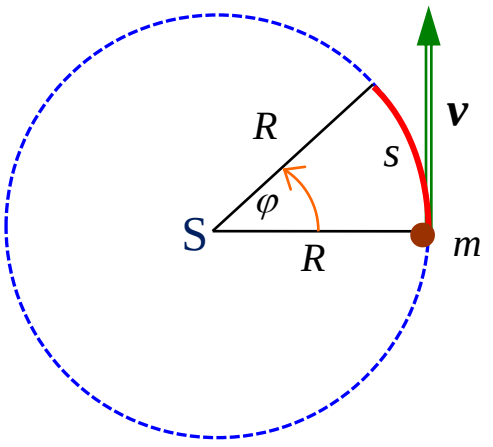
Proto k popisu rotačního pohybu používáme **zásadně úhlových veličin**. **!!!**

4.1.2 Pohyb hmotného bodu po kružnici; zavedení úhlových veličin

Jak bylo právě řečeno výše, při rotaci tuhého tělesa všechny body mimo rotační osu opisují kružnice se středy na této ose. Konají tak vlastně velice jednoduchý křivočarý pohyb po trajektorii, jejíž poloměr křivosti *R* je stálý. Podívejme se proto nyní podrobněji na takový pohyb hmotného bodu a ukažme si, že je možné jej popsat i jinými (právě úhlovými) veličinami.

Vůbec nejjednodušším případem pohybu nějakého hmotného bodu (např. právě elementu d*m* tuhého tělesa) po kružnici je **pohyb rovnoměrný**. Jako u každého rovnoměrného pohybu i v tomto případě urazí hmotný bod za stejný čas *t* vždy stejnou dráhu (v tomto případě stejně dlouhý kruhový oblouk) *s*, přičemž musí platit

$$v = \frac{s}{t} \quad .$$



Obr. 4.1 – rovnoměrný pohyb hmotného bodu po kružnici

Přitom průvodiče počátečního a koncového bodu tohoto kruhového oblouku vymezí jistý úhel φ (viz předcházející obr. 4.1), jehož velikost bude při rovnoměrném pohybu hmotného bodu za stejný čas t také vždy stejná. Mezi poloměrem kružnice R (velikostí průvodiče hmotného bodu), dráhou s (délkou kruhového oblouku) a příslušným úhlem φ platí vztah známý z geometrie

$$\varphi = \frac{s}{R} \quad . \tag{4.1}$$

Velikost úhlu φ (při studiu pohybů se pro tuto fyzikální veličinu používá termín **úhlová dráha**) přitom měříme v **radiánech** (rad). Velikost rychlosti v je pak možno vyjádřit vztahem

$$v = \frac{s}{t} = \frac{R.\varphi}{t} \quad , \tag{4.2}$$

přičemž podíl $\frac{\varphi}{t} = \omega$ definuje novou fyzikální veličinu, tzv. **úhlovou rychlost**. Tato veličina obecně charakterizuje, jak se velikost úhlové dráhy mění s časem. Její jednotkou je sekunda na minus prvou (s^{-1}), používá se též radián za sekundu ($rad.s^{-1}$). Při výpočtech ale obvykle dosazujeme toto veličinu pouze s jednotkou s^{-1}, aby nám jednotkově vycházela rovnice (4.2).

Pro velikost rychlosti v pak platí vztah podobný vztahu mezi dráhou a úhlovou dráhou

$$v = R . \omega \quad . \tag{4.3}$$

Poněvadž je u rovnoměrného pohybu velikost rychlosti stálá (v = konst.), bude také úhlová rychlost pohybu ω = konst. Za určitou dobu t opíše průvodič hmotného bodu úhel

$$\varphi = \omega . t + \varphi_0 \quad , \tag{4.4}$$

kde φ_0 je úhel průvodiče v čase $t_0 = 0$ s.

Časový úsek, za nějž hmotný bod opíše kružnici právě jedenkrát, je tzv. **oběžná doba** T (**perioda**); platí přitom

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad , \tag{4.5}$$

její převrácená hodnota $f = \frac{1}{T}$ je tzv. **frekvence** pohybu hmotného bodu po kružnici. Jednotkou frekvence je **hertz** (Hz). Platí 1 Hz = 1 s^{-1}.

Celkový počet oběhů kružnice za určitou dobu t je pak při rovnoměrném pohybu dán výrazem

$$N = f . t = \frac{\varphi}{2\pi} \quad . \tag{4.6}$$

Zrychlení pohybu $\boldsymbol{a}$ je u rovnoměrného pohybu po kružnici rovno pouze zrychlení normálovému $\boldsymbol{a}_n$, jeho velikost je pak dána

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R . \omega^2 \quad . \tag{4.7}$$

Příklady:

1) Hmotný bod koná rovnoměrný pohyb po kružnici o průměru 150 cm s frekvencí 4,0 Hz. Určete velikost jeho rychlosti a normálového zrychlení.

Velikost rychlosti v vypočítáme ze vztahu

$$v = R \,.\, \omega \quad ,$$

přičemž úhlovou rychlost ω vyjádříme pomocí známé frekvence

$$\omega = 2\pi f \quad .$$

Hledaná rychlost tedy bude

$$v = R \,.\, 2\pi f = 0{,}75\ \mathrm{m} \,.\, 2\pi .\, 4\ \mathrm{s^{-1}} = 0{,}75\ \mathrm{m} \,.\, 8\pi\ \mathrm{s^{-1}} = 6\pi\ \mathrm{m.s^{-1}} \doteq 19\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

Normálové zrychlení je pak dáno vztahem

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{R} = \frac{(6\pi\ \mathrm{m.s^{-1}})^2}{0{,}75\ \mathrm{m}} \doteq 470\ \mathrm{m.s^{-2}} \quad ,$$

resp.

$$a_\mathrm{n} = R \,.\, \omega^2 = 0{,}75\ \mathrm{m} \,.\, (8\pi\ \mathrm{s^{-1}})^2 \doteq 470\ \mathrm{m.s^{-2}} \quad .$$

Odpověď: Hmotný bod se pohybuje po kružnici stálou rychlostí o velikosti přibližně 19 $\mathrm{m.s^{-1}}$, jeho normálové zrychlení má přibližně velikost 470 $\mathrm{m.s^{-2}}$.

---

2) Určete úhlovou rychlost rotace Země (R_Z = 6 378 km), okamžitou rychlost bodu na jejím rovníku a normálové zrychlení tohoto bodu.

Úhlovou rychlost ω Země snadno určíme ze známé doby T její rotace

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24\ \mathrm{hod}} = \frac{2\pi}{86\,400\ \mathrm{s}} \doteq 7{,}27 \,.\, 10^{-5}\ \mathrm{s^{-1}} \quad .$$

Velikost rychlosti bodu na zemském rovníku tak vychází

$$v = R \,.\, \omega = 6{,}378 \,.\, 10^6\ \mathrm{m} \,.\, 7{,}27 \,.\, 10^{-5}\ \mathrm{s^{-1}} \doteq 464\ \mathrm{m.s^{-1}} \quad ,$$ tedy téměř 0,5 $\mathrm{km.s^{-1}}$.

Normálové zrychlení tohoto bodu má velikost

$$a_\mathrm{n} = R \,.\, \omega^2 = 6\,378\,000\ \mathrm{m} \,.\, (7{,}27 \,.\, 10^{-5}\ \mathrm{s^{-1}})^2 \doteq 0{,}0337\ \mathrm{m.s^{-2}} \quad .$$

Odpověď: Úhlová rychlost rotace Země je přibližně 7,27 $.10^{-5}$ $\mathrm{s^{-1}}$, rychlost bodu na jejím rovníku má velikost přibližně 464 $\mathrm{m.s^{-1}}$, jeho normálové zrychlení 0,0337 $\mathrm{m.s^{-2}}$.

* * *

Nyní se podívejme na **nerovnoměrný pohyb** hmotného bodu po kružnici. Jak víme, u nerovnoměrných pohybů se s časem mění velikost okamžité rychlosti, a tím pádem i velikost rychlosti úhlové. Pro velikost okamžité rychlosti platí

$$v = \frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t} = \frac{R\ \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\,t} = R\,.\,\omega \quad , \tag{4.8}$$

přičemž **okamžitá hodnota úhlové rychlosti** ω je dána časovou změnou úhlové dráhy

$$\boxed{\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\,t}} \quad . \tag{4.9}$$

Změnu **velikosti** rychlosti charakterizuje – viz (2.10) – fyzikální veličina tečné zrychlení

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{R\ \mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\,t} = R\,.\,\alpha \quad . \tag{4.10}$$

V tomto vztahu dostáváme novou fyzikální veličinu označenou symbolem α, jež vyjadřuje, jak se mění úhlová rychlost ω s časem

$$\boxed{\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\,t}} \quad . \tag{4.11}$$

Touto veličinou je tzv. **úhlové zrychlení**. Jednotkou úhlového zrychlení je sekunda na minus druhou (s^{-2}), používá se též radián za sekundu na druhou ($\mathrm{rad.s}^{-2}$). Při výpočtech ale opět dosazujeme pouze s jednotku s^{-2}, aby nám jednotkově souhlasila rovnice (4.10).

Vidíme, že mezi příslušnými úhlovými a „obyčejnými“ (již dříve zavedenými) kinematickými veličinami existují tři velice jednoduché (a z ryze formálního matematického hlediska vlastně totožné) vztahy (4.1), (4.3) a (4.10). Platí

$$s = R\,.\,\varphi \ ; \ v = R\,.\,\omega \ ; \ a_{\mathrm{t}} = R\,.\,\alpha \ .$$

Toto velmi jednoduché vzájemně jednoznačné přiřazení mezi oběma skupinami veličin se pak přenáší i do výrazů, jež charakterizují časové závislosti úhlových veličin u příslušných pohybů.

Pohyb rovnoměrný po kružnici

Už výše jsme si ukázali, že platí:

$$\begin{aligned} v = konst. \quad &\Leftrightarrow \quad \omega = konst. \quad ; \\ s = v\,.\,t \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi = \omega\,.\,t \quad . \end{aligned} \tag{4.4}$$

U nerovnoměrných pohybů je to zcela stejné:

Pohyb rovnoměrně zrychlený po kružnici

$$a_t = konst. \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = konst. \quad ;$$

$$v = a_t \,.\, t + v_o \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \alpha \,.\, t + \omega_o \quad ; \qquad (4.12)$$

$$s = \frac{1}{2} a.t^2 + v_o.t + s_o \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{1}{2}\alpha.t^2 + \omega_o.t + \varphi_o \quad . \qquad (4.13)$$

Pohyb rovnoměrně zpomalený po kružnici

$$a_t = konst. \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = konst. \quad ;$$

$$v = v_o - a_t \,.\, t \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \omega_o - \alpha \,.\, t \quad ; \qquad (4.14)$$

$$s = v_o.t - \frac{1}{2} a.t^2 + s_o \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \omega_o.t - \frac{1}{2}\alpha.t^2 + \varphi_o \quad . \qquad (4.15)$$

Příklad:
Válec se roztáčí z klidu tak, že po třech minutách dosáhne 1 500 otáček za minutu. Jaké je zrychlení jeho pohybu a kolik otáček celkem za tyto tři minuty vykoná? Předpokládejte, že se jednalo o pohyb rovnoměrně zrychlený.

Válec dosáhne po zmíněné době frekvence otáček

$$f = \frac{n}{60} = \frac{1\,500}{60\ \mathrm{s}} = 25\ \mathrm{Hz}$$

a jeho úhlová rychlost z počáteční nulové hodnoty tak vzroste na

$$\omega = 2\pi \,.\, f = 50\,\pi\ \mathrm{s}^{-1} \ .$$

Úhlové zrychlení pohybu spočítáme ze vztahu (4.12). Platí

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_o}{t} = \frac{50.\pi\ \mathrm{s}^{-1}}{180\ \mathrm{s}} \doteq 0{,}87\ \mathrm{s}^{-2} \quad .$$

Celkový počet otáček můžeme spočítat jednak přes celkovou uraženou úhlovou dráhu (4.13)

$$N = \frac{\varphi}{2.\pi} = \frac{\frac{1}{2}\alpha.t^2}{2.\pi} = \frac{\frac{1}{2}.0{,}87\ \mathrm{s}^{-2}.(180\ \mathrm{s})^2}{2.\pi} = 2\,250 \quad ,$$

jednak přes průměrnou hodnotu frekvence otáček.

V tomto případě vyjdeme ze skutečnosti, že frekvence otáček válce **vzrůstá rovnoměrně** (tedy pravidelně) z počáteční nulové hodnoty na konečnou 25 Hz během třech minut pohybu. Tím pádem je možné velice snadno určit průměrnou hodnotu frekvence otáček v tomto časovém intervalu jako aritmetický průměr obou krajních hodnot

$$f_\mathrm{p} = \frac{f_\mathrm{o} + f}{2} = \frac{0 + 25}{2}\ \mathrm{Hz} = 12{,}5\ \mathrm{Hz} \quad .$$

Celkový počet otáček tak bude

$$N = f_\mathrm{p} \,.\, t = 12{,}5\ \mathrm{s}^{-1} \,.\, 180\ \mathrm{s} = 2\,250 \quad .$$

Odpověď: Válec se při svém pohybu roztáčí se stálým úhlovým zrychlením velikosti přibližně 0,87 s^{-2} a během uvedených tří minut od začátku pohybu vykoná celkem 2 250 otáček kolem osy.

4.1.3 Skládání a rozklad sil působících na tuhé těleso

Při studiu **dynamiky rotačního pohybu** (ale též u statiky těles) se potvrzuje, že pro účinek síly na dané těleso je podstatná nejen její velikost a směr, ale stejně tak i její působiště. Právě proto zavádíme veličinu **moment síly** (vzhledem k danému bodu nebo vzhledem k dané ose), jež všechny tyto tři charakteristiky vektoru síly v sobě obsahuje – její definice byla podrobně vyložena v předcházející kapitole.

Při skládání soustavy několika sil působících na tuhé těleso se snažíme účinek těchto sil nahradit působením síly jediné tzv. **výslednice**. Musí být však při tom zachován jak posuvný, tak i otáčivý účinek původní soustavy sil, to znamená, že výslednice $\boldsymbol{F}$ takové soustavy bude dána vektorovým součtem skládaných sil

$$\boldsymbol{F} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k \qquad (4.16)$$

a navíc i její moment počítaný vzhledem k libovolnému bodu resp. libovolné ose bude dán vektorovým součtem momentů skládaných sil počítaných k témuž bodu resp. k téže ose

$$\boldsymbol{M} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_k \quad . \qquad (4.17)$$

Pozn.: Při skládání sil působících na tuhé těleso stačí vyšetřovat **pouze působení sil vnějších**, neboť síly vnitřní jsou jednak kompenzovány pevností vazeb mezi atomy látky a navíc mají stejně vždy nulovou výslednici i nulový výsledný moment. **!!**

Rovnovážná poloha tělesa

Tuhé těleso se nachází v rovnovážné poloze, je-li v dané vztažné soustavě v klidu. **Nutnou podmínkou** pro to, aby tuhé těleso v rovnovážné poloze bylo, je rovnováha vnějších sil, jež na těleso působí ***a současně*** také rovnováha momentů těchto sil.

a) Rovnováha vnějších sil působících na tuhé těleso

→ soustava vnějších sil $\boldsymbol{F}_i$ (i = 1, 2, ... n), jež působí na tuhé těleso, je v rovnováze právě tehdy, je-li jejich výslednice nulová. To znamená, že **vektorový součet** všech těchto sil musí být roven nule:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + ... + \boldsymbol{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}\ \mathrm{N} \quad . \qquad (4.18)$$

b) Rovnováha momentů vnějších sil působících na tuhé těleso

→ podobně momenty $\boldsymbol{M}_i$ vnějších sil působících na tuhé těleso počítané vzhledem k určitému nehybnému bodu O v prostoru (nebo vzhledem k ose o) jsou v rovnováze právě tehdy, je-li jejich výsledný moment vzhledem k témuž bodu (resp. k téže ose) nulový:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \boldsymbol{M}_3 + ... + \boldsymbol{M}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{0}\ \mathrm{N.m} \quad . \qquad (4.19)$$

Vidíme, že působí-li na těleso několik sil současně, bude se jejich **otáčivý účinek** rušit pouze tehdy, když bude výsledný moment všech těchto sil nulový. Tento závěr se též nazývá **momentová věta** a dá se mimo jiné výhodně využít při určování působiště výslednice při skládání rovnoběžných sil působících v různých bodech tuhého tělesa nebo naopak při rozkladech tíhové síly u různých nosníků, podpěr, úchytů, apod.

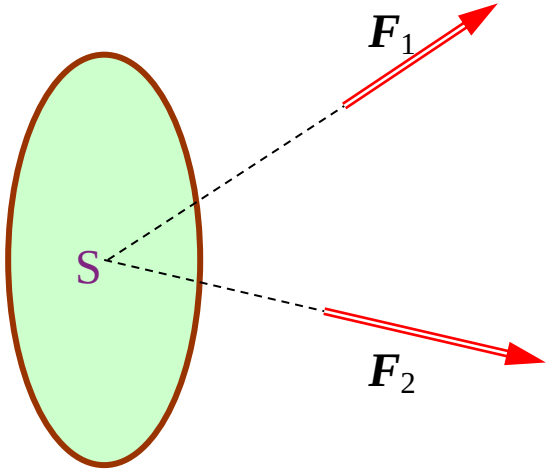
Jestliže všechny vnější síly působí **v jednom jediném bodě** tuhého tělesa, je postačující podmínkou pro to, aby bylo těleso v rovnovážné poloze, podmínka rovnováhy těchto sil (4.18). V takovém případě je totiž podmínka pro rovnováhu momentů (4.19) splněna automaticky. Všechny skládané síly mají totiž stejné působiště a jeho polohový vektor vzhledem k libovolnému bodu v prostoru je pro všechny síly i pro sílu výslednou identicky stejný. Vynásobením rovnice (4.18) tímto polohovým vektorem pak okamžitě dostáváme rovnici (4.19).

Budou-li ale vnější síly působit **v různých bodech** tuhého tělesa, musí být skutečně splněny současně obě dvě výše uvedené podmínky (4.18) i (4.19), neboť platnost (či neplatnost) jedné z nich automaticky nezaručuje i platnost (či neplatnost) druhé – viz dva následující příklady uvedené na obr. 4.2 na další straně. **!!**

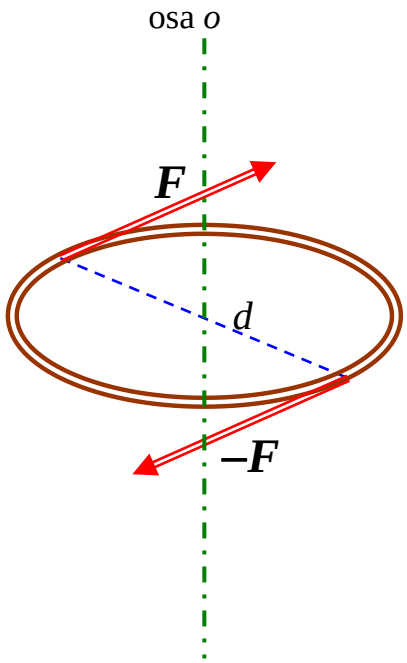
Př. 1.: Dvě síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ působí na tuhé těleso tak, že obě jejich vektorové přímky procházejí hmotným středem tělesa S. Výslednice sil $\boldsymbol{F}$ je nenulová, výsledný silový moment $\boldsymbol{M}$ počítaný vzhledem k hmotnému středu nulový je. Těleso koná pouze **posuvný pohyb**, jehož zrychlení

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} \quad ,$$

kde m je hmotnost tělesa.



Obr. 4.2 – dva příklady skládání sil, při nichž nejsou současně splněny obě podmínky rovnováhy



Př. 2.: Na těleso působí dvojice sil $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$. Jejich výslednice je evidentně nulová, ale výsledný silový moment je nenulový (jeho velikost $M = F.d$). Jak si ukážeme v dalším výkladu, koná těleso v takovém případě pouze **rotační pohyb** s úhlovým zrychlením

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{M}}{J} \quad ,$$

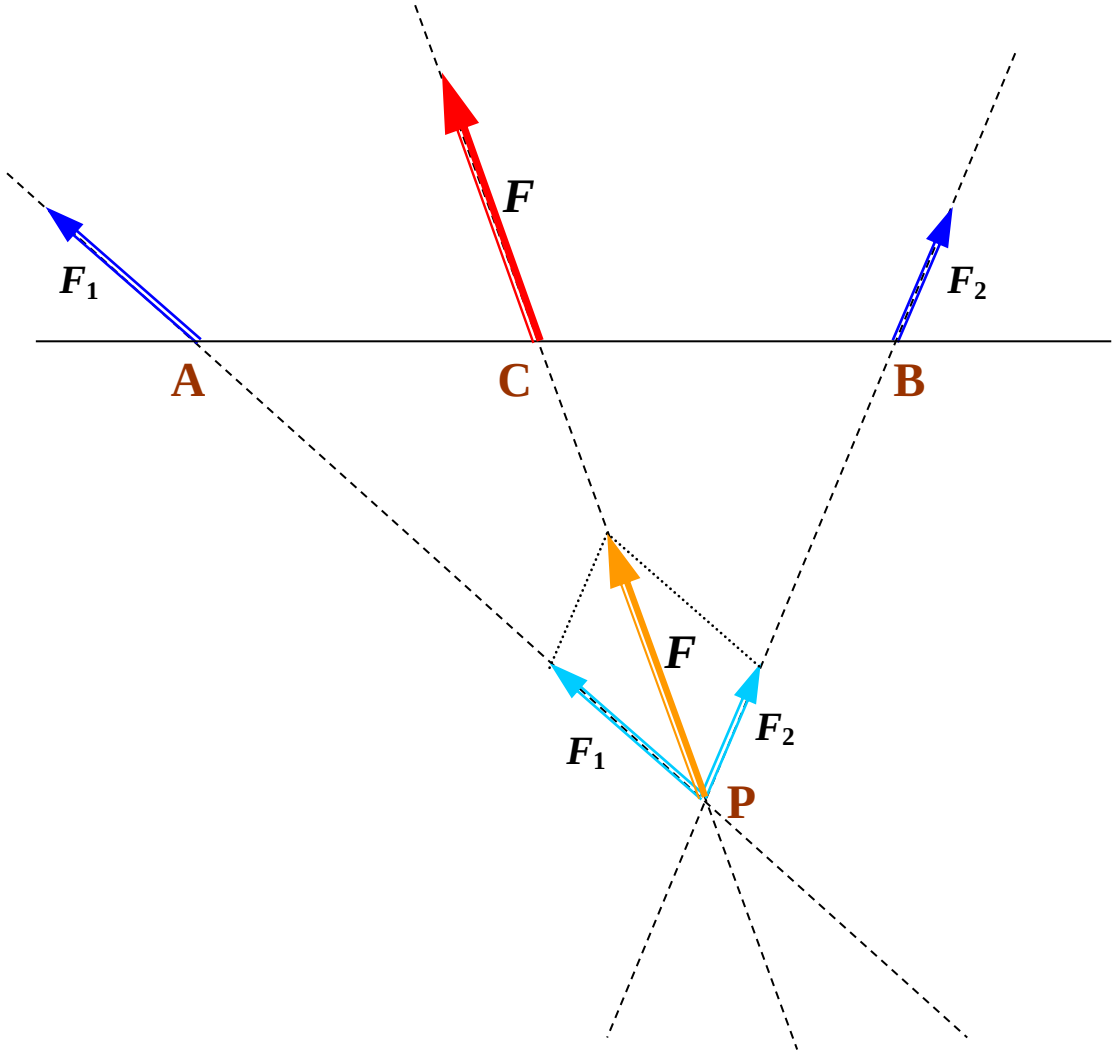
kde J je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k rotační ose.

Rozklad sil je vlastně jen opačným postupem, při němž ale musíme dodržovat stejné zásady jako u skládání sil. Nesmíme nikdy zapomenout na skutečnost, že síla a moment síly jsou **vektorové** fyzikální veličiny, a proto je třeba vždy postupovat podle pravidel vektorové algebry platných pro sčítání (skládání a rozklad) vektorů.

* * *

Zaměřme se nyní podrobněji na různé případy, jež mohou nastat při skládání dvou sil. Poměrně jednoduché je jejich skládání, když obě síly působí v jednom jediném bodě (viz **článek 1.1.3 a)** v úvodní kapitole našeho výkladu).

Působí-li dvě síly ve dvou různých bodech (např. **A**, **B** – viz následující obr. 4.3) a jsou-li navíc **různoběžné** (to ale současně znamená, že leží v jedné a téže rovině !!!), posuneme je do průsečíku **P** jejich vektorových přímek, kde je už snadno složíme podle známého pravidla o vektorovém rovnoběžníku. Výslednici pak posuneme na spojnici působišť původních sil po její vektorové přímce – tedy do bodu **C**.



Obr. 4.3 – skládání dvou různoběžných sil
působících v různých bodech roviny

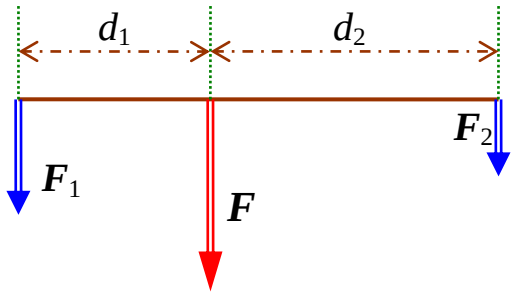
Jsou-li dvě skládané (resp. rozkládané) síly **navzájem rovnoběžné**, ale přitom leží na dvou různých vektorových přímkách, je situace odlišná. Zde platí následující pravidla:

→ **Pro dvě síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ stejného směru** (vedlejší obr. 4.4) bude velikost jejich výslednice F rovna součtu velikostí obou sil

$$F = F_1 + F_2 \quad . \qquad (4.20)$$

Vzdálenosti působišť d_1 a d_2 skládaných sil od působiště výslednice $\boldsymbol{F}$ budou potom splňovat vztah

$$F_1\, d_1 = F_2\, d_2 \quad . \qquad (4.21)$$



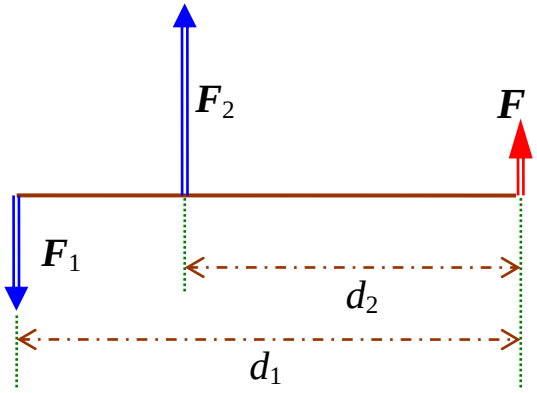
Obr. 4.4 – skládání dvou rovnoběžných sil stejného směru

→ **Pro dvě síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ opačného směru** (obr 4.5) je velikost F výslednice rovna rozdílu velikostí obou skládaných sil

$$F = |F_1 - F_2| \qquad (4.22)$$

a vzdálenosti působišť d_1 a d_2 skládaných sil od působiště výslednice splňují tentýž vztah, tedy

$$F_1\, d_1 = F_2\, d_2 \quad . \qquad (4.21)$$



Obr. 4.5 – skládání dvou rovnoběžných sil opačného směru

V obou výše právě ukázaných případech lze vcelku snadno dokázat, že moment $\boldsymbol{M}$ výsledné síly vzhledem k libovolnému bodu (resp. vzhledem k libovolné ose) má stejnou hodnotu jako vektorový součet momentů $\boldsymbol{M}_1$ a $\boldsymbol{M}_2$ dvou skládaných sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ a že tedy výsledná síla má i stejný otáčivý účinek jako síly původní.

Zvláštním případem soustavy dvou rovnoběžných sil je už dříve zmíněná **dvojice sil**. Je to soustava dvou sil $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$, jež mají stejnou velikost, ale opačný směr a navíc leží **na různých vektorových přímkách**, jejichž vzájemná vzdálenost je d (viz obr. 4.6 na následující straně).

Tyto síly dávají sice **nulovou výslednici** (a tudíž nemohou mít na těleso žádný posuvný účinek), ale mají vždy **účinek otáčivý !!!**

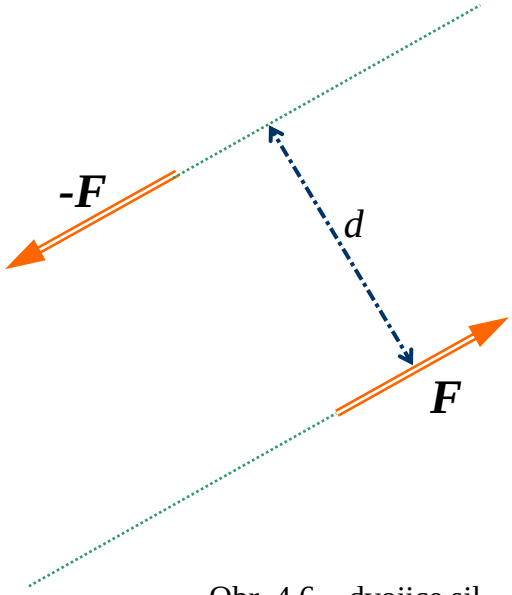
Tento otáčivý účinek je charakterizován momentem ***D*** dvojice sil, jehož ***velikost*** je dána jednoduchým výrazem

$$D = F.d \quad . \qquad (4.23)$$

Snadno lze dokázat, že velikost momentu dvojice sil vůbec nezávisí na poloze rotační osy, kolem níž se těleso otáčí. ***Směr*** vektoru ***D*** je určen tak, že je kolmý k rovině, v níž leží obě rovnoběžné síly, a bude mířit

→ nad tuto rovinu při rotaci proti směru chodu hodinových ručiček (tzv. přímý směr otáčení),

→ pod tuto rovinu při rotaci, jež je souhlasná s chodem hodinových ručiček (tzv. zpětný směr otáčení).

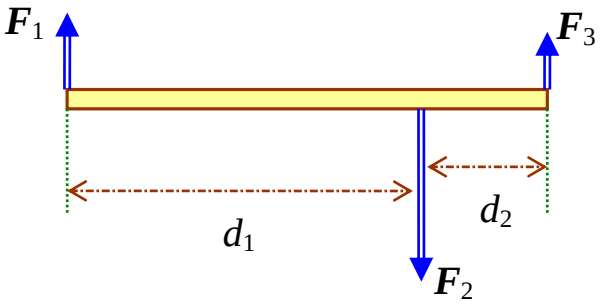


Obr. 4.6 – dvojice sil

* * *

Při skládání většího počtu rovnoběžných sil není těžké určit velikost a směr výslednice, u těchto úloh však bývá většinou problém najít její působiště. V takovém případě nám výpočet značně usnadní podmínka (4.19) – momentová věta, jak ukazuje i následující vzorový příklad.

Příklad:
Na tyč na obrázku působí tři rovnoběžné síly, jejichž velikosti jsou $F_1 = 24$ N, $F_2 = 60$ N a $F_3 = 20$ N. Vzdálenosti mezi působišti těchto tří sil jsou $d_1 = 50$ cm a $d_2 = 20$ cm. Jaká je velikost výslednice a kde je její působiště?



Jelikož je velikost síly $\boldsymbol{F}_2$ směřující dolů větší než součet velikostí dvou sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_3$ směřujících nahoru

$$F_2 > F_1 + F_3 \quad ,$$

bude výsledná síla ***F*** rovněž mířit dolů a její velikost F bude rovna

$$F = F_2 - F_1 - F_3 = 60\ \text{N} - 24\ \text{N} - 20\ \text{N} = 16\ \text{N} \quad .$$

Působiště výslednice $\boldsymbol{F}$ pak určíme pomocí momentů sil.

Moment $\boldsymbol{M}$ této výsledné síly vzhledem k libovolnému bodu musí být totiž stejný, jako je vektorový součet momentů všech skládaných sil k témuž bodu. Pro jednoduchost výpočtu je vhodné zvolit za tento bod působiště „levé krajní“ síly, tedy v našem případě síly $\boldsymbol{F}_1$. Bude-li vzdálenost působiště výslednice od tohoto bodu x, musí pro momenty jednotlivých sil platit:

$$F.x = -F_1.x_1 + F_2.x_2 - F_4.x_3 \ , \ \text{kde } x_1 = 0 \text{ m} \ , \ x_2 = d_1 = 0{,}5 \text{ m} \ \text{ a } \ x_3 = d_1 + d_2 = 0{,}7 \text{ m} \ .$$

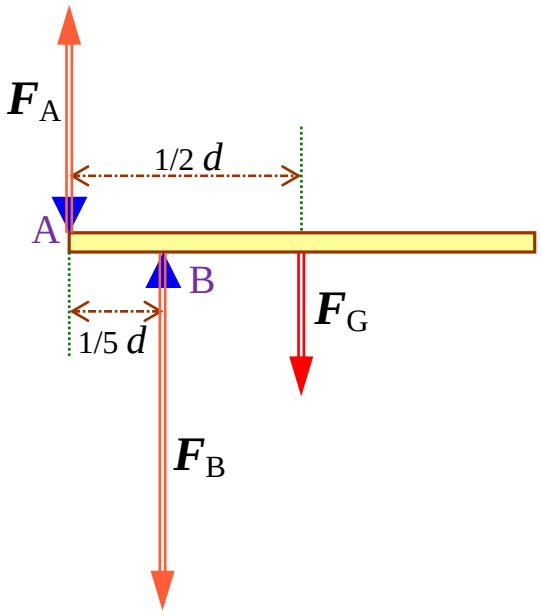
Jelikož síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_3$ mají opačný směr než síla $\boldsymbol{F}_2$ a výslednice $\boldsymbol{F}$, a tudíž i opačný otáčivý účinek vzhledem ke zvolenému bodu, jsou jejich momenty označeny opačným (záporným) znaménkem.

Hledané působiště výsledné síly $\boldsymbol{F}$ se tedy nachází napravo od síly $\boldsymbol{F}_1$ ve vzdálenosti

$$x = \frac{-F_1.x_1 + F_2.x_2 - F_3.x_3}{F} = \frac{-24 \text{ N} \,.\, 0 \text{ m} + 60 \text{ N} \,.\, 0{,}5 \text{ m} - 20 \text{ N} \,.\, 0{,}7 \text{ m}}{16 \text{ N}} = 1 \text{ m}$$

Momentové podmínky (4.19) ale lze dobře využít i při opačné úloze – při počítání rozkladu síly, viz následující příklad.

Příklad:
Vodorovná deska na vedlejším obrázku má hmotnost 600 kg a je uchycena ve dvou bodech A a B. Bod A je na samém kraji desky a bod B pak v jedné pětině délky desky od bodu A. Jak velké síly působí na tyto dva úchyty?



Jak je z obrázku dobře patrné, bude síla $\boldsymbol{F}_A$ působit v úchytu A směrem kolmo vzhůru, naopak síla $\boldsymbol{F}_B$ bude působit v úchytu B směrem kolmo dolů. Pro jejich velikosti musí platit

$$F_B - F_A = F_G = 6\,000 \text{ N} \quad .$$

Nyní zbývá využít momentovou větu (4.19). Opět je výhodné zvolit za bod, vzhledem k němuž budeme momenty sil počítat, jeden z bodů A nebo B. Zvolme znovu ten „levý krajní“ tedy A. Moment síly $\boldsymbol{F}_A$ je evidentně nulový a platí jednoduchá rovnost

$$F_B \cdot \frac{d}{5} = F_G \cdot \frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad F_B = \frac{5}{2} F_G = 15\,000 \text{ N} \quad .$$

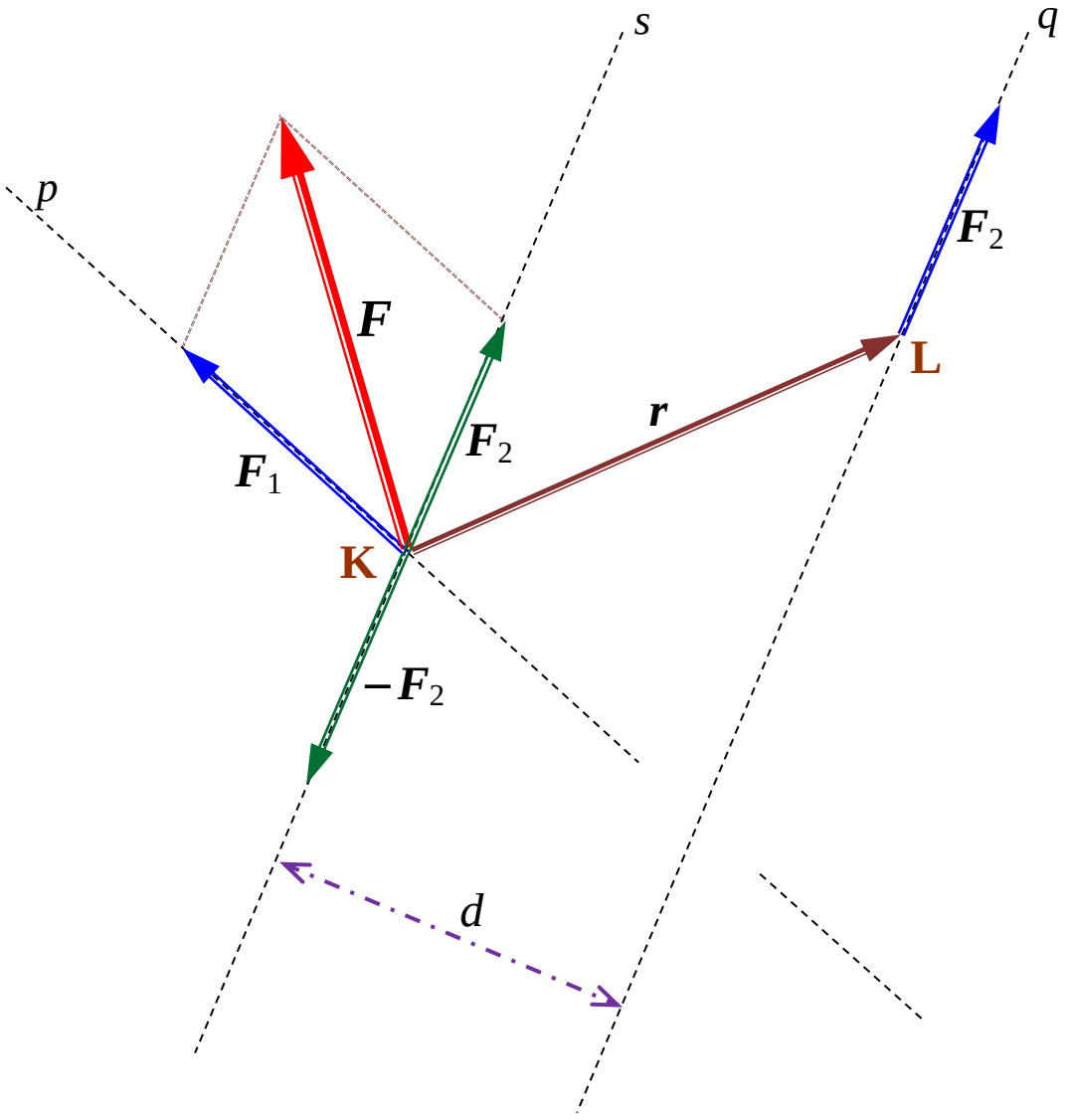
Druhá síla pak musí vycházet $F_A = 9\,000$ N .

Vidíme, že rozkladem jedné síly (v tomto případě tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$) snadno můžeme dostat dvě síly, z nichž každá má větší velikost, než je velikost síly původní.

✻ ✻ ✻

Až dosud jsme za zabývali skládáním anebo rozkladem sil, jež ležely v jedné rovině. Velice často se ale můžeme setkat s případem skládání dvou nebo více navzájem **mimoběžných sil**. Taková soustava má vždy obecně jak posuvný, tak i otáčivý účinek. Jak postupovat, máme-li takovou soustavu nahradit jedinou výslednicí a jediným výsledným momentem? Ukažme si to na případu dvou mimoběžných sil logicky působících vždy ve dvou různých bodech prostoru (např. **K** a **L**) tak, jak je naznačeno na následujícím obr. 4.7.

Síla $\boldsymbol{F}_1$ působí v bodě **K** a leží na přímce p, zatímco síla $\boldsymbol{F}_2$ působí v bodě **L** a leží na přímce q. Přímky p a q nemají společný průsečík. Silovou a ani momentovou situaci nezměníme, když v působišti síly $\boldsymbol{F}_1$ v bodě **K** přidáme dvě stejně velké opačně orientované síly $\boldsymbol{F}_2$ a $-\boldsymbol{F}_2$. Ty leží na přímce s, jež je rovnoběžná s přímkou q.



Obr. 4.7 – skládání dvou mimoběžných sil

Složením sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ v bodě **K** získáme sílu $\boldsymbol{F}$ výslednou, zbyde nám však ještě dvojice sil $\boldsymbol{F}_2$ s působištěm v bodě **L** a $-\boldsymbol{F}_2$ působící v bodě **M**. Její moment

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_2$$

bude mít velikost

$$D = F_2 \,.\, d \quad ,$$

kde d je kolmá vzdálenost rovnoběžných přímek s a q. Směr momentu $\boldsymbol{D}$ této silové dvojice pak bude kolmý na rovinu určenou právě rovnoběžkami s a q.

4.1.4 Pohybové rovnice tuhého tělesa; moment hybnosti tuhého tělesa

Pohyb tuhého tělesa je obecně popsán dvěma diferenciálními rovnicemi. První z nich je Newtonův 2. pohybový zákon (zákon síly)

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}} \quad . \tag{2.45}$$

Uvedená pohybová rovnice ovšem řeší **pouze posuvné pohyby tuhých těles**, a jak již bylo řečeno dříve, platí v takovém případě všechny zákonitosti, jež jsme probírali v mechanice pohybu hmotného bodu.

Druhou pohybovou rovnicí pak řešíme rotaci tělesa. Ukázali jsme si, že rotační pohyb obecné soustavy n hmotných bodů lze popsat vztahem

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\mathrm{soust}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}} \tag{3.23}$$

nazývaným „**Věta o momentu hybnosti soustavy hmotných bodů**“. Výraz (3.23) vyjadřuje vztah mezi příčinou rotačních pohybů, tedy výsledným silovým momentem $\boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}}$ vnějších sil, a důsledky jeho působení. Těmi je vždy změna pohybového stavu otáčející se soustavy – změna jejího momentu hybnosti $\boldsymbol{L}_{\mathrm{soust}}$.

Tuto pohybovou rovnici lze ale okamžitě použít i pro popis rotace tuhého tělesa.

Jelikož si můžeme tuhé těleso představit jako zvláštní soustavu hmotných bodů o jednotlivých hmotnostech dm, na něž těleso „rozdrobíme“, lze jen pouhým formálním přepisem vztahu (3.23) získat **pohybovou rovnici rotačního pohybu tuhého tělesa** ve tvaru

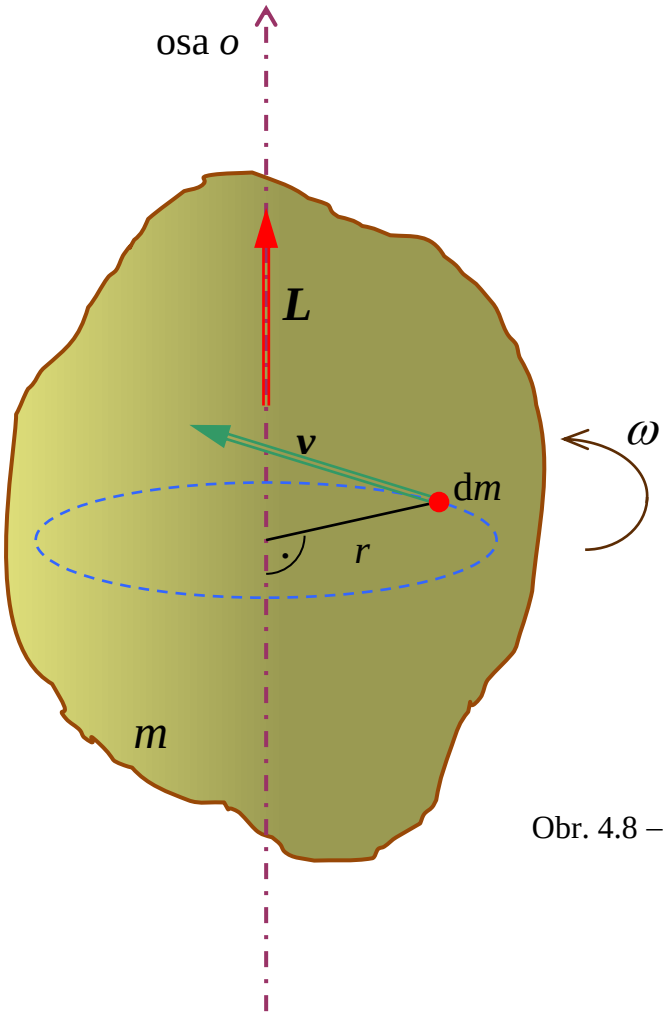
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}} \quad , \tag{4.24}$$

kde $\boldsymbol{L}$ je moment hybnosti tuhého tělesa a $\boldsymbol{M}$ výsledný moment vnějších sil na těleso působících.

Tedy působením jistého silového momentu (tj. otáčivým účinkem jedné nebo více sil) dochází ke **změně momentu hybnosti tuhého tělesa** vzhledem k jistému bodu v prostoru nebo vzhledem k jisté rotační ose. Pohybovou rovnicí (4.24) dokážeme vyřešit jakýkoli rotační pohyb tělesa. K tomu, abychom mohli tuto problematiku dále zkoumat, však musíme nejdříve vyjádřit, čemu je roven **moment hybnosti *L* tuhého tělesa**.

Protože se v dalším výkladu zaměříme na rotační pohyby těles kolem pevné osy, odvodíme si vztah pro moment hybnosti ***L*** tuhého tělesa právě pro tyto případy.

Při určování momentu hybnosti ***L*** tuhého tělesa vzhledem k pevné ose provedeme výše zmíněnou operaci → celé tuhé těleso o hmotnosti *m* si rozdělíme („rozkouskujeme“) na nekonečně mnoho nekonečně malých elementů hmotnosti d*m* (tedy fakticky na jednotlivé hmotné body o této hmotnosti) – viz následující obr. 4.8.



Obr. 4.8 – k momentu hybnosti tuhého tělesa vzhledem k ose otáčení

Jednotlivé elementy hmotnosti d*m* se pohybují po kruhových trajektoriích o poloměru *r*, jejich okamžitá rychlost ***v*** je vždy kolmá k ose otáčení, a tak lze v souladu se vztahem (3.14) psát, že moment hybnosti d*L* každého elementu d*m* má velikost

$$\mathrm{d}L = v\,.\,r\,\mathrm{d}m \quad . \tag{4.25}$$

Přitom elementy různě vzdálené od rotační osy elementy tělesa mají v daném čase t různě velké okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$, ale všechny mají v daném okamžiku **stejnou úhlovou rychlost ω**.

Toho využijeme a protože platí

$$v = r \,.\, \omega \quad , \qquad \text{viz (4.3)}$$

můžeme vztah (4.25) přepsat do tvaru

$$\mathrm{d}L = r.\omega \,.\, r \;\mathrm{d}m = \omega \,.r^2 \,\mathrm{d}m \quad .$$

Velikost L momentu hybnosti celého tuhého tělesa pak dostaneme formálně integrací všech těchto nekonečně malých momentů hybnosti $\mathrm{d}L$. Platí

$$L = \int_{(m)} \omega.r^2 \mathrm{d}m = \omega \int_{(m)} r^2 \mathrm{d}m \quad . \qquad (4.26)$$

Jak je patrné, velikost momentu hybnosti tuhého tělesa je přímo úměrná okamžité úhlové rychlosti, s níž se těleso v daném okamžiku otáčí. Bude-li těleso v klidu, bude jeho moment hybnosti nulový:

$$\omega = 0 \ \mathrm{s}^{-1} \implies L = 0 \ \mathrm{kg.m}^2.\mathrm{s}^{-1} \quad .$$

Směr vektoru $\boldsymbol{L}$ momentu hybnosti pak bude vždy totožný se směrem rotační osy a jeho orientaci (zda míří „nahoru“ nebo „dolů“) lze nejlépe určit podle **pravidla pravé ruky** – prsty míří souhlasně s otáčejícím se tělesem a vztyčený palec pak ukáže orientaci momentu hybnosti.

4.1.5 Moment setrvačnosti tuhého tělesa vzhledem k dané rotační ose

Integrál

$$\int_{(m)} r^2 \mathrm{d}m$$

ve vztahu (4.26) představuje novou fyzikální veličinu, jež charakterizuje rozložení hmotnosti tělesa kolem příslušné osy otáčení o a nazývá se **moment setrvačnosti tuhého tělesa vzhledem k dané rotační ose**. Jedná se o typickou skalární fyzikální veličinu, kterou označujeme písmenem J.

Platí tedy

$$\boxed{J = \int_{(m)} r^2 \mathrm{d}m} \quad . \qquad (4.27)$$

Fyzikální jednotkou momentu setrvačnosti – jak je dobře patrné už z jeho definice – je $\mathrm{kg.m}^2$.

Zjednodušeně se dá použít přirovnání, že u rotačních pohybů vystupuje moment setrvačnosti J tuhého tělesa „ve stejné roli“ jako hmotnost m u pohybů posuvných. Skutečně v ekvivalentních vztazích (u pohybových rovnic, ve výrazech pro kinetickou energii, aj.) najdeme na místě, kde u posuvného pohybu figuruje hmotnost, moment setrvačnosti v případě, že se jedná o rotaci.

V obecném případě je výpočet momentu setrvačnosti J poměrně náročnou matematickou úlohou vyžadující dokonalou znalost diferenciálního a integrálního počtu. Relativně jednodušší bývá takový výpočet u homogenních tuhých těles vykazujících jistou míru geometrické symetrie. Moment setrvačnosti lze poměrně snadno vypočítat zejména u rotačních těles jako je kruhová deska, válec, kužel, koule, apod., celkem jednoduché je odvození této veličiny u tyče, obdélníkové desky, kvádru nebo krychle. Početní postupy s příslušnými výsledky pak naleznete v mé publikaci,
J. Zajíc: Momenty setrvačnosti homogenních těles, UPa (2010),
která je vám dostupná na STAGu.

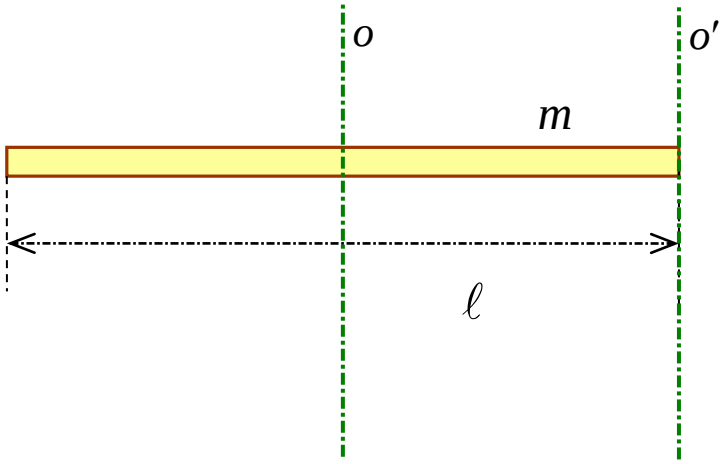
Na následujících obr. 4.9 a) – d) uvádím jen některé případy momentů setrvačnosti, zejména pak ty, jež budeme potřebovat pro výpočet úloh v rámci cvičení.

a) *tyč*

$$J = \frac{1}{12}\, m.\ell^2$$ (vzhledem k ose o procházející kolmo středem tyče)

$$J' = \frac{1}{3}\, m.\ell^2$$ (vzhledem k ose o' procházející kolmo koncem tyče)

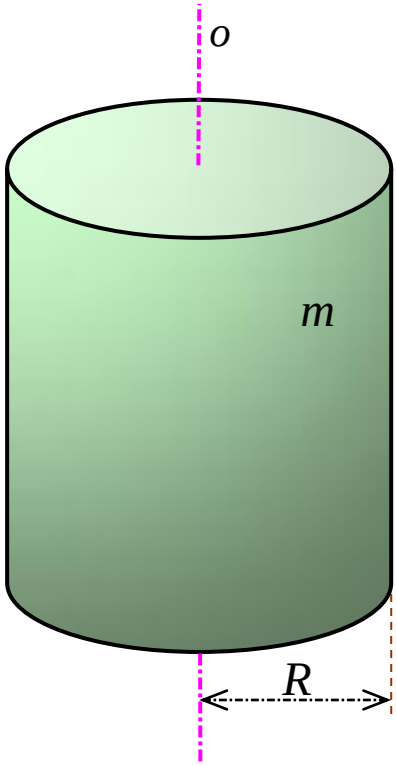
m ... hmotnost tyče
ℓ ... délka tyče



b) *plný válec*

$$J = \frac{1}{2}\, m.R^2$$

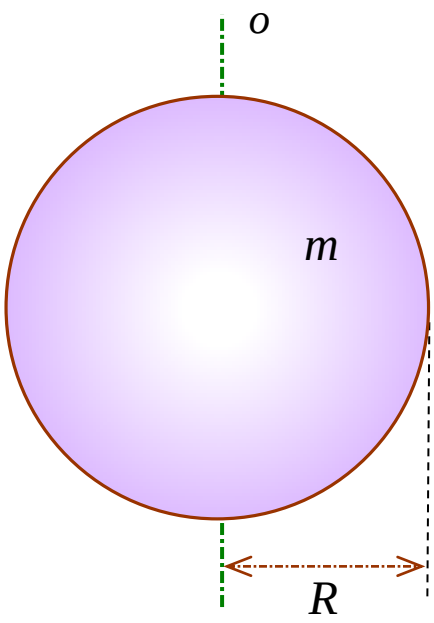
m ... hmotnost válce
R ... poloměr podstavy



c) *koule*

$$J = \frac{2}{5} m.R^2$$

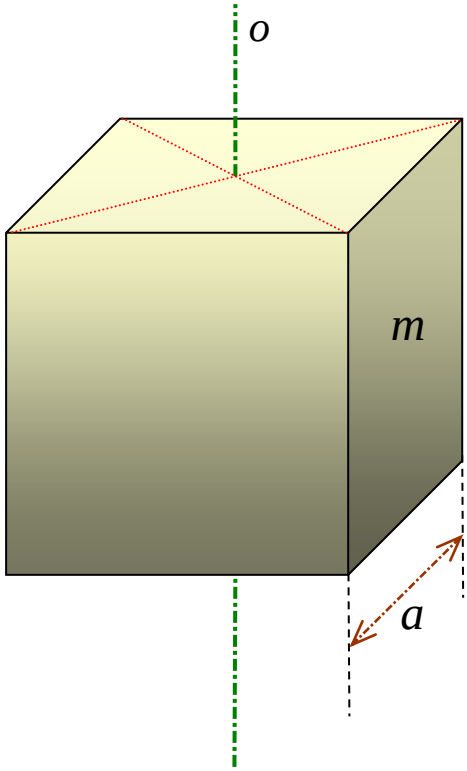
m ... hmotnost koule
R ... poloměr koule



d) *krychle*

$$J = \frac{1}{6} m.a^2$$

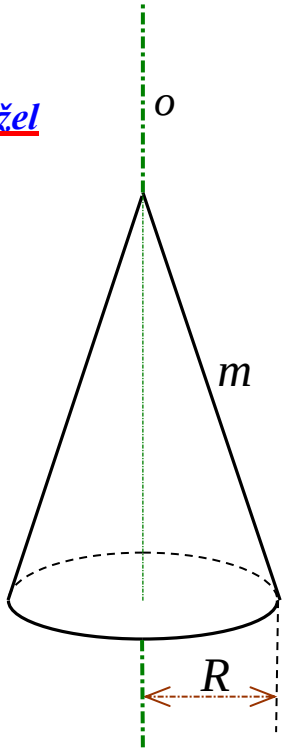
m ... hmotnost krychle
a ... délka hrany krychle



e) *kužel*

$$J = \frac{3}{10} m.R^2$$

m ... hmotnost kužele
R ... poloměr podstavy



Obr. 4.9 – příklady momentů setrvačnosti geometricky pravidelných homogenních tuhých těles

Na předcházejícím obrázku jsou uvedeny hodnoty momentů setrvačnosti vzhledem k osám, jež procházejí hmotným středem **S** příslušného tělesa. Jediná výjimka je u tyče, kde máte uveden výsledek jak pro případ osy jdoucí kolmo k tyči jejím hmotným středem

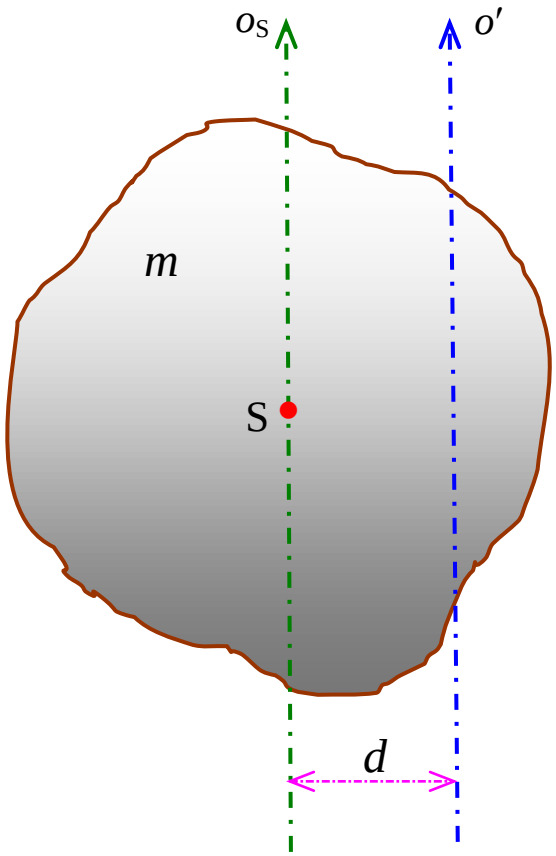
$$J_S = \frac{1}{12}\, m\,.\ell^2 \quad , \tag{4.28}$$

tak i pro osu, jež je s ní rovnoběžná a prochází koncovým bodem tyče

$$J' = \frac{1}{3}\, m\,.\ell^2 \quad . \tag{4.29}$$

Logicky je u osy jdoucí koncem tyče hodnota momentu setrvačnosti větší, protože v tomto případě je hmotnost rozložena od osy ve větší vzdálenosti. Tato zákonitost ale platí naprosto obecně pro všechna tělesa a dokonce lze odvodit poměrně jednoduchý výraz pro souvislost mezi momenty setrvačnosti tuhého tělesa počítané ke dvěma navzájem rovnoběžným osám, z nichž jedna prochází hmotným středem (těžištěm) tělesa **S** a druhá ne. Jedná se o tzv. **Steinerovu větu.** Její důkaz naleznete např. v doporučené literatuře, zde uvedu pouze výsledek.

V případě, že těleso rotuje kolem osy o', jež neprochází jeho hmotným středem **S** (viz obr. 4.10), lze při určování momentu setrvačnosti J' vzhledem k této ose vyjít ze znalosti momentu J vzhledem k ose o_S, jež hmotným středem tělesa prochází a je s osou o' rovnoběžná.



Obr. 4.10 – ke Steinerově větě

Pro oba momenty setrvačnosti platí, že

$$\boxed{J' = J_S + m\,.\,d^2} \quad , \tag{4.30}$$

kde m je hmotnost tělesa a d vzdálenost obou rovnoběžných os.

Ze všech navzájem rovnoběžných os daného směru má tedy vždy **nejmenší** hodnotu moment setrvačnosti J_S vzhledem k ose jdoucí hmotným středem (těžištěm) tuhého tělesa.

Pozn.: Platnost Steinerovy věty si můžete snadno ověřit právě na případu tyče a dvou výše uvedených momentů setrvačnosti (4.28) a (4.29). Jejich rozdíl

$$J' - J_S = \frac{1}{3}\, m.\ell^2 - \frac{1}{12}\, m.\ell^2 = \frac{1}{4}\, m.\ell^2 = m.\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \quad ,$$

přičemž $\frac{\ell}{2}$ je skutečně vzdálenost d obou rovnoběžných os.

4.1.6 Závěry vyplývající z pohybové rovnice rotačního pohybu tuhého tělesa

Vraťme se nyní zpět k pohybové rovnici rotačního pohybu tuhého tělesa

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M} \quad , \tag{4.24}$$

v níž moment hybnosti rotujícího tělesa

$$L = \omega \int_{(m)} r^2 \mathrm{d}m = J.\omega \quad . \tag{4.26}$$

Z pohybové rovnice (4.24) nám okamžitě vyplývají následující základní závěry.

A) **Moment vnějších sil je nulový** ..... $\boldsymbol{M} = \mathbf{0}$ N.m

Těleso bude v takovém případě izolováno od vnějších silových momentů – nemusí však být nutně izolováno od působení sil samotných **!!!**

V těchto situacích pak nedochází ke změnám momentu hybnosti tělesa a **platí zákon zachování momentu hybnosti**. **!!**

Tedy dostáváme, že

$$J.\omega = \text{konst.} \quad , \tag{4.31}$$

a pro rotující těleso to znamená, že mohou nastat v zásadě dva případy.

→ Je-li těleso dokonale tuhé a neprovádíme-li změny polohy (posuny) rotační osy, bude moment setrvačnosti tělesa J = konst., a tudíž musí být nutně konstantní i úhlová rychlost rotace ω. Těleso bude buď setrvávat **v klidu**, nebo **v rovnoměrném otáčivém pohybu**.

→ Není-li těleso dokonale tuhé nebo měníme-li polohu rotační osy působením sil, jejichž výsledný moment je trvale nulový, dojde při změně momentu setrvačnosti tělesa současně ke změně velikosti úhlové rychlosti ω. Přitom ale musí nutně platit, že součin obou těchto veličin zůstává neměnný:

$$\boxed{J_1 . \omega_1 = J_2 . \omega_2 = \text{konst.}} \quad . \tag{4.32}$$

Příklad:
Homogenní tyč délky 3 m mající hmotnost 20 kg se otáčí se stálou frekvencí 15 Hz kolem osy kolmo procházející koncovým bodem tyče. Jak se frekvence otáček tyče změní, když osu posuneme rovnoběžně do středu tyče?

Posouváme-li rotační osu, působíme silou, jejíž působiště je právě na této ose, a tudíž moment $\boldsymbol{M}$ uvedené síly musí být jednoznačně nulový $\Rightarrow$ v tomto případě **platí** pro otáčející se tyč zákon zachování momentu hybnosti a z rovnice (4.32) vyplývá, že

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{J_1}{J_2} = \frac{\frac{1}{3}m\ell^2}{\frac{1}{12}m\ell^2} = 4 \Rightarrow f_2 = 4\,.\,f_1 = 60\ \text{Hz} \quad .$$

Odpověď: Frekvence otáček tyče vzroste na čtyřnásobek tedy na 60 Hz.

Pozn.: K této úloze se později ještě jednou vrátíme. Až si probereme problematiku pohybové energie rotačního pohybu, vypočítáme si, jak velká musí být síla, která zmíněný posun rotační osy umožní.

B) Moment vnějších sil je nenulový ..... $\boldsymbol{M} \neq \mathbf{0}$ Nm

V takovém případě **dojde ke změně momentu hybnosti tělesa**. Budeme-li nadále předpokládat, že naše těleso je dokonale tuhé a že navíc nebudeme provádět žádné změny polohy rotační osy, bude možno považovat moment setrvačnosti tělesa za konstantní veličinu (J = konst.). Pak ovšem změna momentu hybnosti znamená změnu úhlové rychlosti rotace, neboť

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J.\omega) = J\,.\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J\,.\,\alpha \quad ,$$

kde α je velikost úhlového zrychlení. Pohybová rovnice (4.24) tak přejde do konečného tvaru

$$M = J\,.\,\alpha \quad , \qquad (4.33)$$

respektive

$$\alpha = \frac{M}{J} \quad , \qquad (4.34)$$

přičemž M je velikost vnějšího silového momentu a α velikost úhlového zrychlení nerovnoměrného rotačního pohybu tělesa.

Nenulový silový moment tedy způsobí nerovnoměrnou rotaci s úhlovým zrychlením α, jehož velikost je přímo úměrná momentu působící síly.

Naopak u různých těles, na něž působíme stejně velkým silovým momentem, pak bude velikost úhlového zrychlení nepřímo úměrná momentům setrvačnosti těchto těles.

Ze vztahu (4.34) okamžitě vyplývá:

→ Bude-li výsledný silový moment nenulový a navíc stálý **(M = konst.)**, bude rotace tělesa **rovnoměrně zrychlená** (případně **rovnoměrně zpomalená**) se stálým úhlovým zrychlením α.

→ Bude-li výsledný moment síly svou velikost s časem měnit **($M \neq$ konst.)**, bude těleso konat obecně **nerovnoměrně zrychlený** (případně **nerovnoměrně zpomalený**) **pohyb** s proměnným úhlovým zrychlením α . Příkladem takového pohybu je například kmitání kyvadel – viz článek **4.1.9** v závěru této kapitoly.

a) Rovnoměrný otáčivý pohyb tuhého tělesa

Rovnoměrný otáčivý pohyb tuhého tělesa je vůbec nejjednodušším typem rotačního pohybu těles kolem pevné osy. V takovém případě má těleso stále stejně velkou úhlovou rychlostí ω (ω = *konst.*). Úhlová dráha (úhel) φ, jež je opsána průvodičem libovolného bodu takto se pohybujícího tělesa za určitý čas t, je přímo úměrná tomuto času

$$\boxed{\varphi = \omega . t} \quad . \qquad \text{viz (4.4)}$$

Časový úsek, za který se těleso otočí právě jedenkrát kolem své osy (a tedy opíše právě úhlovou dráhu $\varphi = 2\pi$), je **oběžná doba T (perioda).** Pro ní platí známý vztah

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \quad . \qquad \text{viz (4.5)}$$

Převrácená hodnota periody $f = \frac{1}{T}$ je potom **frekvence** rotačního pohybu. Otáčí-li se těleso rovnoměrným pohybem s frekvencí f, vykoná za určitý čas t celkem $N = f . t$ otáček.

A nezapomeňte !!!

Má-li se těleso otáčet rovnoměrně s konstantní úhlovou rychlostí ω, je nutnou podmínkou to, aby výsledný moment $\boldsymbol{M}$ všech vnějších sil působících na dané těleso (vzhledem k příslušné ose) byl **nulový !!!**

b) Rovnoměrně zrychlený otáčivý pohyb tuhého tělesa

Nutnou podmínkou pro to, aby těleso konalo takový pohyb, je konstantní (a navíc nenulová) velikost vnějšího silového momentu M. Těleso se otáčí se stálým úhlovým zrychlením α, jehož velikost určíme z rovnice (4.34). U **pohybů zrychlených** velikost úhlové rychlosti pravidelně (lineárně) narůstá podle známého vztahu

$$\omega = \alpha . t + \omega_0 \quad , \tag{4.12}$$

kde ω_0 představuje hodnotu úhlové rychlosti v čase $t_0 = 0$ s.

Úhlová dráha (úhel) φ, jež je opsána průvodičem libovolného bodu tělesa při rovnoměrně zrychlené rotaci za určitý čas t, je potom kvadratickou funkcí času

$$\varphi = \frac{1}{2} \alpha . t^2 + \omega_0 . t \quad . \tag{4.13}$$

U **zpomalených pohybů**, u nichž se úhlová rychlost s časem naopak pravidelně zmenšuje pak při výpočtech využijeme vztahů (4.14), resp. (4.15).

Příklady:

1) Těleso, jehož moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení je 3,6 kg.m^2, roztáčíme z klidu stálým silovým momentem tak, že za 40 s dosáhne frekvence jeho otáček 15 Hz. Určete velikost tohoto momentu síly.

Příslušný moment síly určíme z pohybové rovnice (4.33). K jeho výpočtu však musíme nejdříve získat hodnotu úhlového zrychlení α, s nímž se těleso roztáčí. Za 40 s nabude těleso úhlové rychlosti

$$\omega = 2\pi . f = 30\pi \ \mathrm{s^{-1}} \doteq 94{,}2 \ \mathrm{s^{-1}} \quad .$$

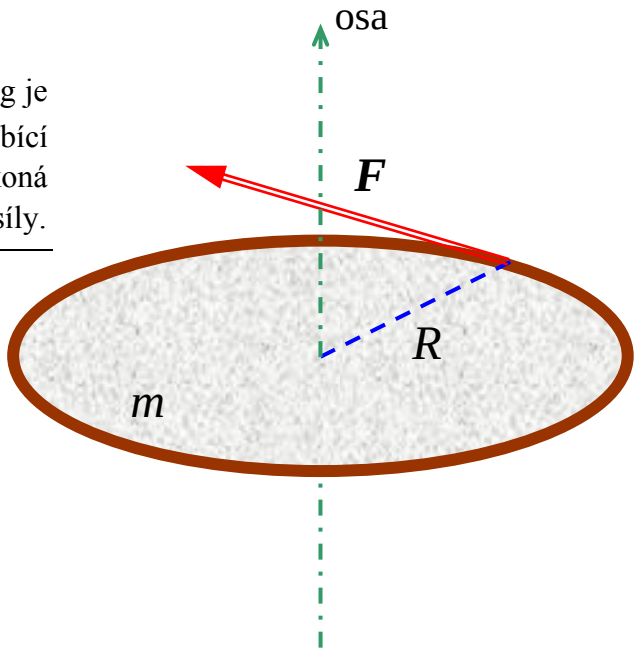
Ze závislosti (4.12) pak již požadovanou veličinu vypočítáme. Platí

$$\omega = \alpha . t \ \Rightarrow \ \alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{30\pi \ \mathrm{s^{-1}}}{40 \ \mathrm{s}} = \frac{3}{4}\pi \ \mathrm{s^{-2}} \doteq 2{,}36 \ \mathrm{s^{-2}} \ .$$

Hledaný moment síly tak bude

$$M = J . \alpha = 3{,}6 \ \mathrm{kg.m^2} . \frac{3}{4}\pi \ \mathrm{s^{-2}} = 2{,}7\pi \ \mathrm{Nm} \doteq 8{,}48 \ \mathrm{Nm}$$

2) Kruhová deska o průměru 40 cm a hmotnosti 90 kg je roztáčena z klidu silou stálé velikosti tečně působící na jejím obvodu tak, že za půl minuty deska vykoná právě prvních 60 otáček. Určete velikost působící síly.



Sílu $\boldsymbol{F}$ působící na desku svým momentem charakterizuje připojený obrázek. I když máme za úkol určit velikost této síly, pro otáčení desky bude v první řadě rozhodující právě **moment této síly** vzhledem k dané ose.

Proto i tuto úlohu budeme řešit na základě pohybové rovnice (4.33)

$$!!!\quad M = J\,.\,\alpha\quad !!!$$

a ne jinak !!!

Moment setrvačnosti kruhové desky

$$J = \frac{1}{2}\,m.R^2 = \frac{1}{2}\,.\,90\ \text{kg}\,.\,(0{,}2\ \text{m})^2 = 1{,}8\ \text{kg.m}^2$$

Úhlové zrychlení α určíme z rovnice (4.13) pro úhlovou dráhu (uvědomte si, že údaj v zadání $N = 60$ otáček představuje uraženou úhlovou dráhu $\varphi = 240\ \pi$!!!). Platí

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\alpha\,.\,t^2 \quad\Rightarrow\quad \alpha = \frac{2\varphi}{t^2} = \frac{240\pi.}{900\ \text{s}^2} \doteq 0{,}84\ \text{s}^{-2}\quad .$$

Na kruhovou desku působí síla momentem

$$M = J\,.\,\alpha = 1{,}8\ \text{kg.m}^2\,.\,0{,}84\ \text{s}^{-2} \doteq 1{,}51\ \text{Nm}\quad .$$

Nakonec zbývá už jen vypočítat hledanou velikost působící síly. Ramenem síly je v tomto případě vzdálenost rovna poloměru kruhové desky. Proto

$$M = F\,.\,R \quad\Rightarrow\quad F = \frac{M}{R} = \frac{1{,}51\ \text{N.m}}{0{,}2\ \text{m}} \doteq 7{,}54\ \text{N}\ .$$

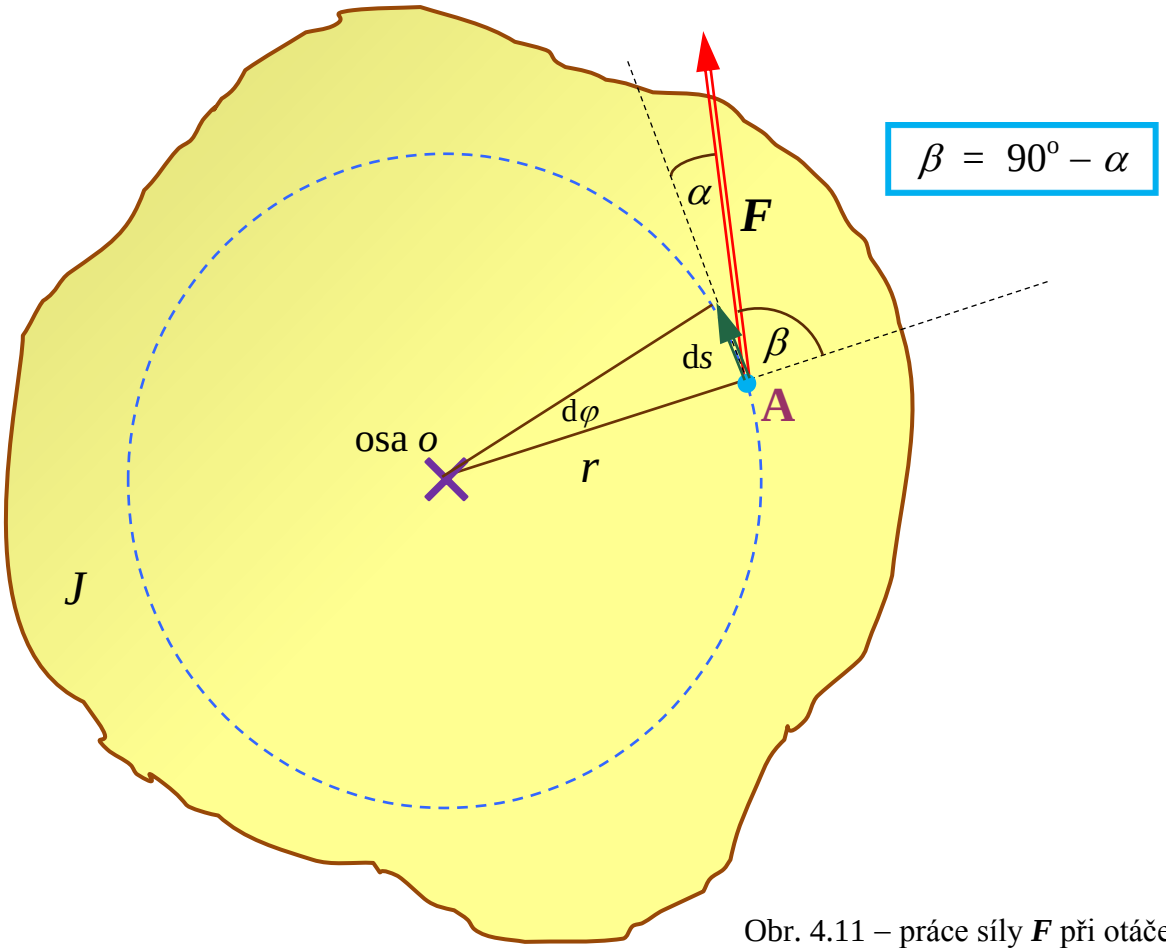
Na desku tedy musíme působit silou přibližně o velikosti 7,54 N.

4.1.7 Práce při otáčivém pohybu

Mechanickou práci W určité síly $\boldsymbol{F}$ jsme v článku 2.2.5 definovali jako typickou skalární fyzikální veličinu, jež charakterizuje působení síly $\boldsymbol{F}$ na jisté dráze při přemisťování určitého hmotného objektu. Podívejme se nyní, jakou práci vykoná daná síla $\boldsymbol{F}$ při otáčení tuhého tělesa kolem rotační osy.

Předpokládejme následující modelovou situaci – viz obr. 4.11 na následující straně. Na něm je znázorněn řez tuhým tělesem kolmo k jeho rotační ose (ta je schematicky znázorněna křížkem ×). V jistém bodě **A**, jenž je od osy vzdálen r, se nachází působiště síly $\boldsymbol{F}$. Síla $\boldsymbol{F}$ je vůči rotační ose mimoběžná a má tedy jistý otáčivý účinek – moment $\boldsymbol{M}$.

Pozn.: Směr síly $\boldsymbol{F}$ je na obrázku volen záměrně kolmý k ose o (síla $\boldsymbol{F}$ leží v rovině řezu). Kdyby tomu tak nebylo, tak bychom museli stejně nejprve sílu $\boldsymbol{F}$ rozložit na dvě složky – kolmou a rovnoběžnou s rotační osou tak, jak je popsáno na str. 94 této publikace. A nenulový moment by pak měla právě pouze složka síly vůči ose o kolmá.



Obr. 4.11 – práce síly ***F*** při otáčení tuhého tělesa

Působením síly ***F*** a díky jejímu nenulovému momentu ***M*** dojde k otáčení tělesa. Otočí-li se těleso o nekonečně malý úhel dφ, posune se působiště **A** síly ***F*** o nekonečně malou vzdálenost ds a síla ***F*** přitom vykoná nekonečně malou práci

$$dW = F.\cos\alpha\, ds \quad , \qquad \text{viz (2.61)}$$

kde α je úhel, jenž svírá síla se směrem tečny ke kružnici o poloměru r, po níž se pohybuje působiště síly (bod **A**), právě v tomto bodě.

Další postup je už jen záležitostí jednoduché úpravy. Nekonečně malou vzdálenost ds lze pomocí otočení dφ vyjádřit jako

$$ds = r\, d\varphi \quad , \qquad \text{viz (4.1)}$$

a vzhledem k tomu, že platí (jak je patrné z obr. 4.11)

$$\beta = 90^o - \alpha \ , \text{ a tedy } \cos\alpha = \sin\beta \quad ,$$

lze výraz pro nekonečně malou práci přepsat do tvaru

$$dW = F.r.\sin\beta\, d\varphi \quad . \qquad (4.35)$$

Ale součin $F.r.\sin\beta$ přeci v souladu s (3.17) a (3.18) nepředstavuje nic jiného než velikost M momentu síly ***F***, v tomto případě vzhledem k rotační ose o.

Tudíž lze výraz (4.35) zapsat jako

$$\mathrm{d}W = M\,\mathrm{d}\varphi \quad .$$

Práci síly $\boldsymbol{F}$ při otáčení tuhého tělesa kolem rotační osy o určitý úhel φ pak dostaneme snadno integrací. Platí, že

$$\boxed{W = \int_0^{\varphi} M\,\mathrm{d}\varphi} \quad . \qquad (4.36)$$

V případě, že moment síly bude mít při otáčení stále stejnou velikost (jako je tomu např. u pohybů rovnoměrně zrychlených), přejde vzorec (4.36) v jednodušší součinový tvar a bude v tom případě platit

$$\boxed{W = M \,.\, \varphi} \quad . \qquad (4.37)$$

4.1.8 Energie rotujícího tělesa

V článku 2.2.6 jsme hovořili o tom, že v mechanice zavádíme jednak **energii pohybovou** (kinetickou) a **energii polohovou** (potenciální). Kinetická energie E_k charakterizuje pohybový stav daného hmotného objektu, energie potenciální E_p pak jeho polohu v jistém (konzervativním) silovém poli.

U hmotného bodu jsme pak definovali nejběžnější formu polohové energie, a sice **tíhovou potenciální energii E_p hmotného bodu v homogenním tíhovém poli Země**. Ta je dána známým výrazem

$$\boxed{E_p = m.g.h} \quad , \qquad (2.72)$$

kde h je výška hmotného bodu nad zemským povrchem.

Tento výraz můžeme okamžitě použít i pro výpočet **polohové energie E_p tělesa v homogenním tíhovém poli Země**. Výška h je v takovém případě dána polohou působiště tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$, tedy výškou těžiště tělesa nad povrchem Země.

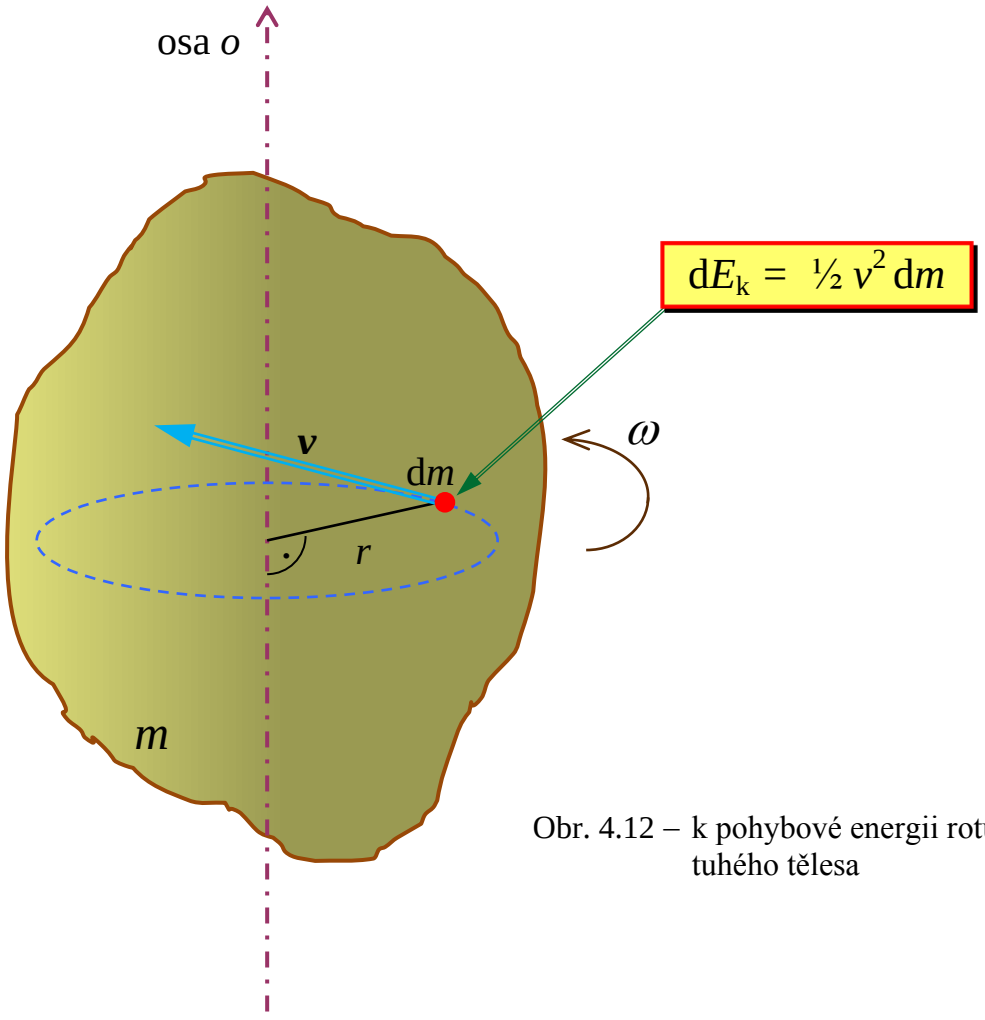
Pozn.: Pokud koná tuhé těleso rotační pohyb kolem svislé osy nebo kolem osy procházející těžištěm tělesa, zůstává jeho polohová energie E_p konstantní a nedoznává změn. Jinak je tomu ovšem v případech, kdy rotační osa těžištěm neprochází a zároveň není svislá (tedy kolmá k zemskému povrchu), jako je tomu např. u kyvadel – viz následující článek.

* * *

S energií pohybovou už je to jinak – zde musíme vycházet z toho, jaký druh pohybu těleso vykonává. Koná-li tuhé těleso pouze ***posuvný pohyb***, mají všechny jeho body v daném okamžiku stejnou rychlost $\boldsymbol{v}$ a pro kinetickou energii takto se pohybujícího tělesa lze použít vztahu známého již z dynamiky pohybu hmotného bodu

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad . \tag{2.70}$$

Tento vztah však nelze použít v případě tuhého ***tělesa rotujícího*** kolem pevné osy, kdy rychlost $\boldsymbol{v}$ jednotlivých jeho bodů závisí na jejich vzdálenosti od osy otáčení. Při výpočtu pohybové energie E_k otáčejícího se tělesa musíme provést stejný postup jako při určování jeho momentu hybnosti. Opět si tuhé těleso o celkové hmotnosti m „rozdělíme“ na nekonečně mnoho nekonečně malých elementů hmotnosti dm a jejich pohybové energie dE_k následně integrujeme (viz obr. 4.12).



Obr. 4.12 – k pohybové energii rotujícího tuhého tělesa

V souladu se vztahem (2.70) bude mít každý element dm hmotnosti pohybující se rychlostí $\boldsymbol{v}$ na své příslušné kruhové trajektorii o poloměru r pohybovou energii

$$\mathrm{d}E_k = \tfrac{1}{2} v^2 \, \mathrm{d}m \quad .$$

Okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$ různých elementů dm mají v daném čase různou velikost, ale všechny elementy dm se pohybují v daném okamžiku **stejnou úhlovou rychlostí** ω.

Proto výraz pro nekonečně malý příspěvek pohybové energie dE_k přepíšeme do tvaru

$$\mathrm{d}E_k = \tfrac{1}{2} (r.\omega)^2 \, \mathrm{d}m = \omega^2 r^2 \, \mathrm{d}m \quad .$$

Jelikož je pohybová energie veličinou skalární, dostaneme konečnou hodnotu této energie pro celé rotující tuhé těleso prostou integrací všech těchto nekonečně malých energií $\mathrm{d}E_\mathrm{k}$

$$E_\mathrm{k} = \int_{(m)} \frac{1}{2}\omega^2 . r^2 \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\omega^2 \int_{(m)} r^2 \mathrm{d}m \quad .$$

Opět se tak dostáváme k veličině moment setrvačnosti J tuhého tělesa

$$\boxed{J = \int_{(m)} r^2 \mathrm{d}m} \quad . \qquad \text{viz (4.26)}$$

Pro **pohybovou (kinetickou) energii E_k rotujícího tělesa** tak získáváme vlastně formálně úplně stejný vztah, jaký používáme pro tuto veličinu u posuvných pohybů. Jen místo hmotnosti m zde vystupuje moment setrvačnosti J tuhého tělesa a místo okamžité rychlosti v úhlová rychlost rotace ω. Platí, že

$$\boxed{E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} J\omega^2} \quad . \qquad (4.38)$$

Příklad:

1) Válec o hmotnosti 80 kg a průměru 40 cm vykonává 1 500 otáček za minutu. Určete a) jeho kinetickou energii, b) práci, kterou je třeba vykonat, aby se počet otáček snížil na 1 200 za minutu.

Moment setrvačnosti válce určíme ze vztahu

$$J = \frac{1}{2} m.R^2 = \frac{1}{2} . 80\ \mathrm{kg} . (0{,}2\ \mathrm{m})^2 = 1{,}6\ \mathrm{kg.m^2}$$

Válec vykonává 1 500 otáček za minutu, frekvence jeho otáček je tedy $f_\mathrm{o} = 25$ Hz .

Tomu pak odpovídá úhlová rychlost rotace $\omega_\mathrm{o} = 2\pi.f \doteq 157\ \mathrm{s^{-1}}$.

Hledaná kinetická energie rotujícího válce je potom

$$E_\mathrm{ko} = \frac{1}{2} J\omega_\mathrm{o}^2 = \frac{1}{2} .1{,}6\ \mathrm{kg.m^2} . (157\ \mathrm{s^{-1}})^2 \doteq 1{,}97.10^4\ \mathrm{J}$$

Jelikož neznáme čas potřebný ke snížení počtu otáček válce, nemůžeme v tomto případě určit úhlové zrychlení α jeho pohybu, a tak nelze použít pro výpočet práce vztah (4.37)

$$W = M . \varphi \quad .$$

K výsledku se ale snadno dostaneme, když určíme rozdíl kinetické energie válce na počátku a na konci studovaného děje. Stejným výpočtem jako v prvním úkolu získáme hodnotu kinetické energie válce konajícího 1 200 otáček za minutu (a majícího tedy frekvenci $f_1 = 20$ Hz)

→ $E_\mathrm{k1} \doteq 1{,}26.10^4$ J .

Velikost práce, kterou je třeba vykonat na příslušné snížení počtu otáček válce, pak bude rovna

$W = E_\mathrm{ko} - E_\mathrm{k1} \doteq 7{,}1.10^3$ J .

2) Vraťme se ještě jednou – jak jsem vám sliboval – k úloze s rotující tyčí **na stránce 120** těchto skript:

Homogenní tyč délky 3 m mající hmotnost 20 kg se otáčí se stálou frekvencí 15 Hz kolem osy kolmo procházející koncovým bodem tyče. Jak se frekvence otáček tyče změní, když osu posuneme rovnoběžně do středu tyče?

Doplňme tuto úlohu o otázku:

„Jak velkou silou dokážeme uvedenou změnu rotační osy provést?“

Ukázali jsme si, že v tomto případě **platí** pro rotující tyč **zákon zachování momentu hybnosti** a že frekvence jejích otáček vzroste po posunu osy na čtyřnásobek, na 60 Hz.

Podívejme se nyní, jakých hodnot bude nabývat pohybová energie tyče před posunem osy a po něm.

Původní moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose kolmo jdoucí jejím konce byl

$$J_1 = \frac{1}{3} m\ell^2 = \frac{1}{3}.20\ \text{kg}\ .(3\ \text{m})^2 = 60\ \text{kg.m}^2 \ .$$

Po posunu osy vychází moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose kolmo jdoucí jejím středem

$$J_1 = \frac{1}{12} m\ell^2 = \frac{1}{12}.20\ \text{kg}\ .(3\ \text{m})^2 = 15\ \text{kg.m}^2 \ ,$$

tedy čtyřikrát menší.

Původní hodnota pohybové energie tyče byla

$$E_{k1} = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2}\ .\ 60\ \text{kg.m}^2\ .\ (2\pi.15\ \text{s}^{-1})^2 \doteq 270\ \text{kJ} \ ,$$

po posunu osy její hodnota vzrostla na

$$E_{k2} = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2}\ .\ 15\ \text{kg.m}^2\ .\ (2\pi.60\ \text{s}^{-1})^2 \doteq 1{,}07\ \text{MJ} \ .$$

Kdybychom nezaokrouhlovali, vyšla by nám hodnota přesně čtyřikrát větší. Vidíme, že **zákon zachování energie neplatí** a ani platit nemůže, protože síla, jež posouvá osu, koná nenulovou práci, jejíž velikost

$$W = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} \doteq 800\ \text{kJ} \quad .$$

Protože je tato práce konána na dráze $s = \frac{1}{2}\ell = 1{,}5$ m, bude velikost síly potřebné k posunu osy (za předpokladu, že je na celé dráze tato síla konstantní)

$$F = \frac{W}{s} \doteq \frac{8.10^5\ \text{J}}{1{,}5\ \text{m}} \doteq 530\ \text{kN} \quad .$$

Získaný výsledek jen potvrzuje známou skutečnost, že na změnu pozice osy rotujícího tělesa je třeba vynaložit obrovských sil.

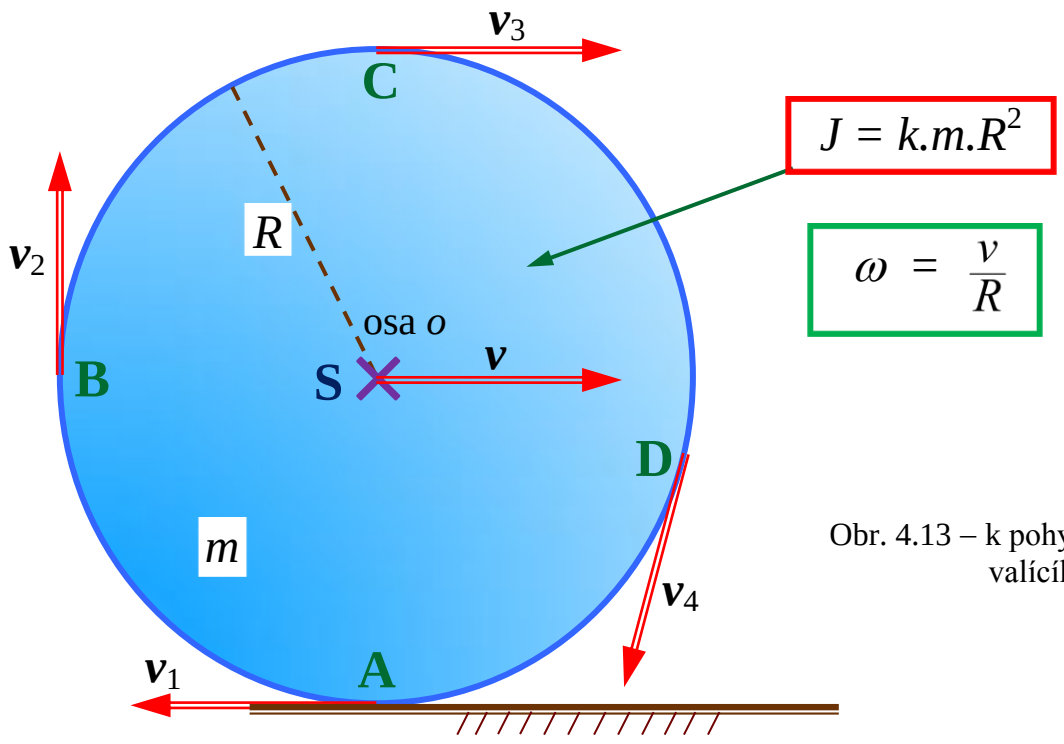
Na úplný závěr tohoto článku o energii rotujícího tělesa se podívejme ještě na jeden typ pohybu těles, a to na **složený valivý pohyb**.

Těleso vykonávající **valivý pohyb** se současně posouvá i otáčí (typickým příkladem je např. valící se roura, kutálející se koule, kolo každého jedoucího dopravního prostředku, atd.). I když je tento typ pohybu logicky mnohem složitější, lze jej velice snadno charakterizovat jeho **celkovou pohybovou energií**. Ta je rovna součtu kinetické energie $E_{k\ pos}$ posuvného pohybu a kinetické energie $E_{k\ rot}$ otáčivého pohybu

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \quad . \tag{4.39}$$

Řešení úloh týkajících se složených valivých pohybů pomocí pohybových rovnic (2.45) a (4.24) bývá často poměrně komplikované. Ale právě s pomocí veličiny energie valivého pohybu, ať už platí zákon jejího zachování, nebo ať se tato energie mění v důsledku konání práce vnějších sil, dokážeme takové úlohy vyřešit mnohdy poměrně snadno. Ukážeme si to ostatně na cvičení.

Vztah (4.39) ale lze ještě upravit. Představme si valící se těleso o hmotnosti m po vodorovné podložce postupnou rychlostí $\boldsymbol{v}$ (viz obr. 4.13).



Obr. 4.13 – k pohybové energii valícího se tělesa

Těleso má přitom kruhový průřez o poloměru R. Vzorce pro momenty setrvačnosti J takových „kulatých“ homogenních těles jsou pokaždé ve tvaru

$$J = k.m.R^2 \quad , \tag{4.40}$$

přičemž číselná konstanta k je vždy menší nebo rovna jedné ($k = 1$ nastává pouze u prstence nebo tenkostěnné roury, jejichž veškerá hmotnost je ve vzdálenosti R od rotační osy).

Postupuje-li těleso vpřed rychlostí $\boldsymbol{v}$, což je postupná rychlost jeho rotační osy procházející středem **S** tělesa, pohybují se stejně velkou rychlostí i body na jeho obvodu. Rychlosti $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$ jsou rozlišeny indexy, protože má každá jiný směr, ale pro jejich velikosti platí

$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v \quad .$$

Tudíž lze snadno vyjádřit úhlovou rychlost ω, s níž se těleso současně otáčí jako

$$\omega = \frac{v}{R} \quad . \tag{4.41}$$

Dosadíme-li výrazy (4.40) a (4.41) do vztahu pro kinetickou energii rotačního pohybu, dostaneme po krátké úpravě, že

$$E_{\mathrm{k\,rot}} = \frac{1}{2}k.m.R^2.\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}k.m.v^2 \quad . \tag{4.42}$$

Tedy i tuto formu pohybové energie valícího se „kulatého“ tělesa lze vyjádřit jen pomocí veličin postupná rychlost $\boldsymbol{v}$ a hmotnost m. Pro celkovou kinetickou energii valivého pohybu tak platí vzorec

$$\boxed{E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{k\,pos}} + E_{\mathrm{k\,rot}} = \frac{1}{2}(1+k)mv^2} \quad . \tag{4.43}$$

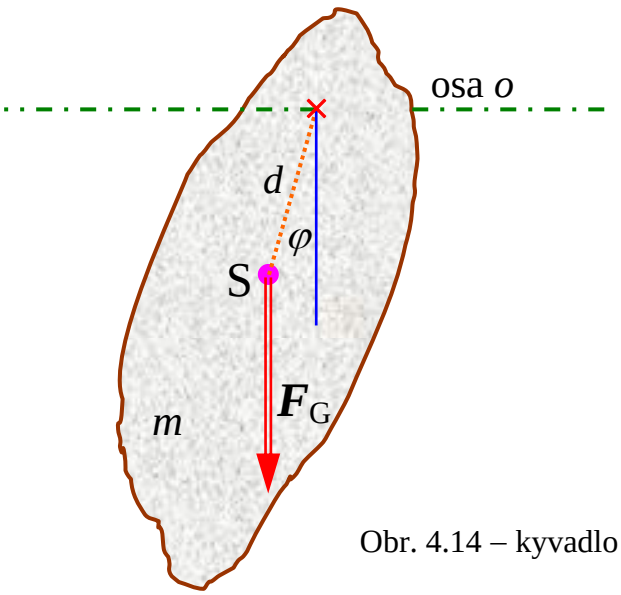
4.1.9 Kyvadlo

Kyvadlem (ve starší literatuře se můžete též setkat s dnes už nepoužívanými termíny „fyzické“ nebo „fyzikální“ kyvadlo) je každé tuhé těleso otáčivé kolem nehybné vodorovné osy neprocházející jeho hmotným těžištěm.

V rovnovážné poloze kyvadla protíná vektorová přímka jeho tíhové síly $\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}}$ rotační osu a moment této síly je tak nulový. Jestliže ale vychýlíme kyvadlo z jeho rovnovážné polohy o jistý úhel φ (viz obr. 4.14), začne na kyvadlo působit moment jeho vlastní tíhové síly

$$M = -m\,g\,d\,\sin\varphi \quad , \tag{4.44}$$

kde m je hmotnost kyvadla a d vzdálenost hmotného středu od osy otáčení. Moment tíhové síly se přitom „snaží“ kyvadlo vrátit zpět do rovnovážné polohy – brání dalšímu nárůstu jeho vychýlení, tj. dalšímu zvětšování úhlu φ, což charakterizuje právě záporné znaménko ve výše uvedeném vztahu.



Obr. 4.14 – kyvadlo

I když kývavý pohyb není otáčivým pohybem ve smyslu „kolem dokola“, můžeme pro řešení pohybu kyvadla použít základní pohybovou rovnici rotačního pohybu tuhého tělesa

$$M = J \cdot \alpha \quad . \qquad (4.33).$$

Jednotlivé body kyvadla totiž opisují kolem vodorovné osy trajektorie ve tvaru kruhových oblouků.

Když se při řešení pohybu ještě navíc omezíme na malé úhly vychýlení, pro něž lze použít přiblížení

$$\sin \varphi = \varphi \quad ,$$

dostaneme po dosazení do (4.33) klasickou diferenciální rovnici harmonických kmitů

$$-m g d \varphi = J \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \quad ,$$

neboli

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mgd}{J} \varphi = 0 \quad . \qquad (4.45)$$

V rovnici (4.45) má přitom výraz $\frac{mgd}{J}$ fyzikální význam druhé mocniny úhlové frekvence $2\pi f$ kmitů příslušného kyvadla. Jak se můžete sami přesvědčit jeho fyzikální jednotkou je s^{-2}. Platí tedy

$$(2\pi f)^2 = \frac{mgd}{J} \quad ,$$

odkud už snadno vyjádříme vztah pro periodu kmitů kyvadla. Dostáváme, že

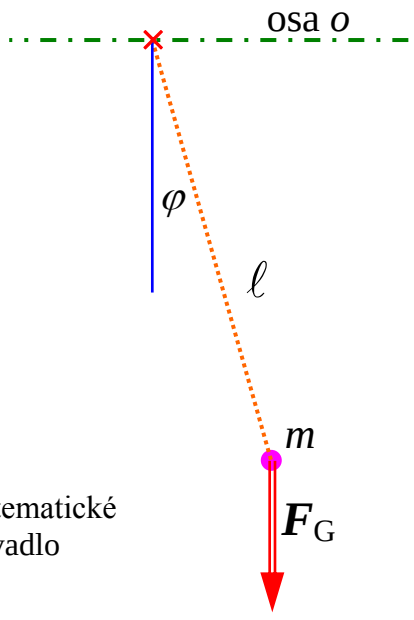
$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}}} \quad , \qquad (4.46)$$

kde J je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k příslušné ose otáčení.

Pozor na to, že moment setrvačnosti ve vztahu (4.46) je momentem setrvačnosti vzhledem k ose **neprocházející** hmotným středem **S** tuhého tělesa. Proto při jeho určení musíme aplikovat Steinerovu větu.

Zvláštním případem kyvadla je pak tzv. **matematické kyvadlo**. Je to určitá fyzikální abstrakce, neboť se jedná o kyvadlo tvořené hmotným bodem o hmotnosti m upevněným na nehmotném vlákně stálé délky ℓ (viz vedl. obr. 4.15)

Matematické kyvadlo kývá opět kolem vodorovné osy procházející opačným koncem vlákna, než na kterém je upevněn hmotný bod. Koná kmity ve svislé rovině, jejichž periodu snadno určíme, když do vztahu (4.46) dosadíme za vzdálenost d délku závěsu ℓ a moment setrvačnosti hmotného bodu vzhledem k ose o.



Obr. 4.15 – matematické kyvadlo

Protože platí $J = m \cdot \ell^2$ a současně $d = \ell$, získáváme jednoduchou úpravou výraz

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad . \tag{4.47}$$

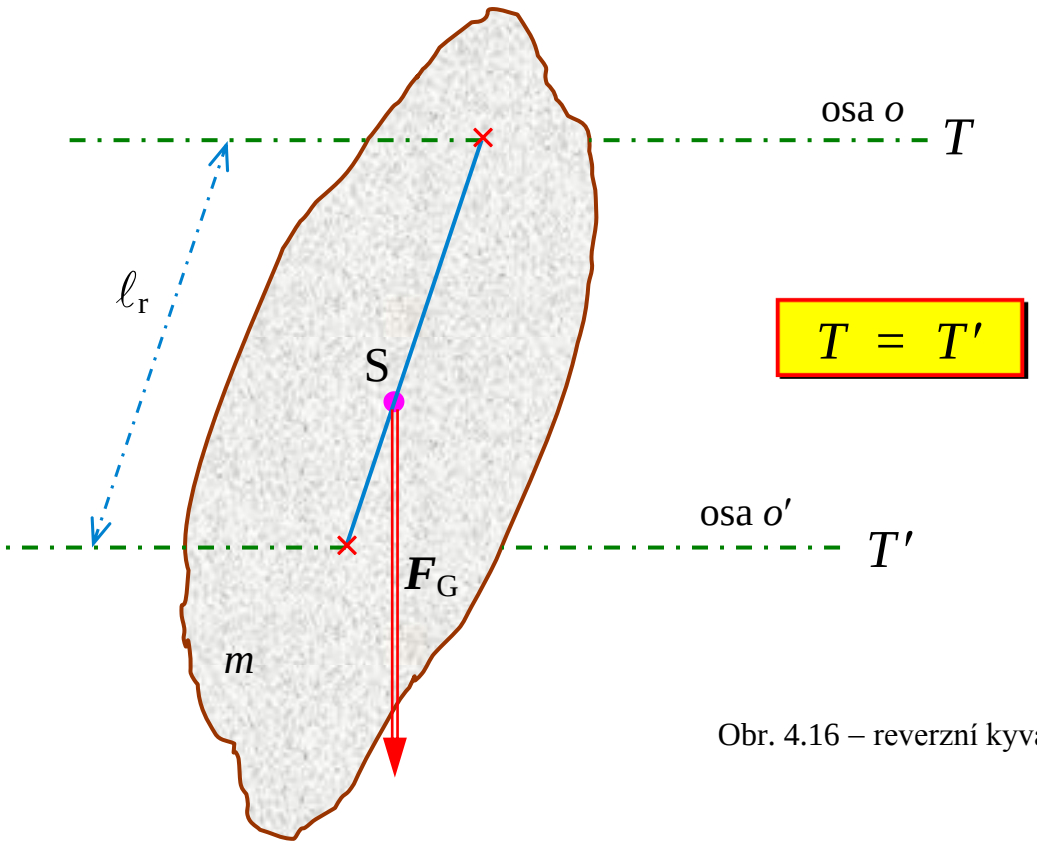
V souvislosti s kyvadlem se můžete setkat i s termínem **redukovaná délka kyvadla** ℓ_r. Je to taková délka kyvadla matematického, jež kývá se stejnou dobou kmitu (periodu) jako dané kyvadlo. Porovnáním vztahů (4.46) a (4.47) okamžitě dostáváme, že

$$\ell_r = \frac{J}{md} \quad . \tag{4.48}$$

Tato veličina má ale hlubší fyzikální význam, než by se na první pohled mohlo zdát. Dá se poměrně snadno dokázat, že vedeme-li kyvadlem druhou osu (s první osou rovnoběžnou) ve vzdálenosti redukované délky (měřeno ve směru „přes hmotný střed **S**“ – viz obr. 4.16), bude kyvadlo kolem této druhé osy konat kmity s naprosto stejnou periodou jako kolem osy původní. Takové kyvadlo se nazývá **reverzní kyvadlo**, jeho doba kmitu kolem jedné i druhé osy je logicky

$$T_{red} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_r}{g}} \quad . \tag{4.49}$$

Pomocí reverzního kyvadla je možné určovat právě velikost tíhového zrychlení g.



Obr. 4.16 – reverzní kyvadlo

4.2 Mechanika pružných těles

V předcházejících kapitolách jsme se výhradně zabývali takovým silovým působením mezi hmotnými objekty, jež vedlo pouze ke **změně jejich pohybového stavu**. V následujícím stručném výkladu opustíme problematiku pohybů a zaměříme se jen na ty případy silového působení mezi tělesy, jež vedou k **deformacím těles**. Objektem našeho zkoumání už nebude těleso tuhé, ale reálné.

4.2.1 Deformace tělesa

Obecně pod pojmem **deformace tělesa** chápeme změnu rozměrů, tvaru nebo objemu daného tělesa způsobenou vnějšími silami. Tyto změny mohou být dočasné, ale i trvalé a podle toho rozlišujeme dva základní typy deformací:

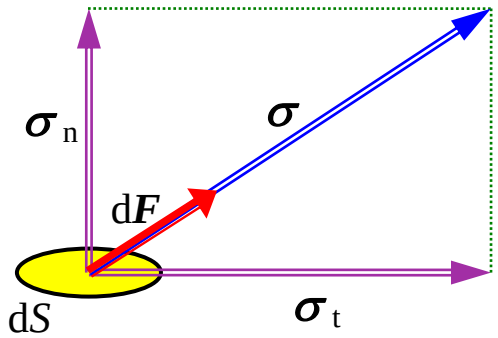
→ **Pružná deformace** (též nazývaná **elastická**) je takovou deformací tělesa, jež vymizí, jestliže přestanou působit vnější síly, které změny tvaru tělesa způsobily. Těleso, jež lze pružně deformovat, se nazývá **pružné (elastické) těleso**.

→ **Tvárná deformace** (též označovaná **plastická**) je nevratnou – trvalou – deformací tělesa. Změna tvaru tělesa přetrvává i tehdy, když přestanou na těleso působit vnější deformační síly. Těleso, v němž může nastat působením vnějších sil plastická deformace, se nazývá **tvárné (plastické) těleso**.

Je-li těleso deformováno, vznikají v něm působením vnějších deformačních sil určitá napětí. Tato napětí lze charakterizovat vektorovou fyzikální veličinou **mechanické napětí** σ, jež je definována jako podíl

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}S} \quad , \qquad (4.50)$$

kde $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ je síla působící na zvolenou nekonečně malou plochu $\mathrm{d}S$ v deformovaném tělese.



Obr. 4.17 – k pojmu mechanické napětí

Přitom ta složka napětí, jež je kolmá ke zvolené ploše $\mathrm{d}S$, se nazývá **normálové napětí** σ_n, naopak složka, jež je se zvolenou plochou rovnoběžná, je tzv. **tečné napětí** σ_t (viz vedlejší obr. 4.17).

Pod pojmem **tlak** pak chápeme **velikost normálového napětí**, jež směřuje **do tělesa**

$$p = \sigma_n \quad . \tag{4.51}$$

Celková **tlaková síla**, jež působí kolmo do tělesa na některou vybranou (konečně velkou) plochu S, je potom rovna

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \int_{(S)} \boldsymbol{\sigma}_n \mathrm{d}S} \quad . \tag{4.52}$$

Naopak termínem **tah** označujeme **velikost normálového napětí**, jež směřuje **z tělesa** ven. I pro něj musí platit vztah

$$p = \sigma_n \quad . \tag{4.51}$$

A úplně stejně jako u tlakové síly je možno určit i celkovou **tahovou sílu**, jež směřuje kolmo z tělesa ven a působí na určitou zvolenou (konečně velkou plochu S

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \int_{(S)} \boldsymbol{\sigma}_n \mathrm{d}S} \quad . \tag{4.52}$$

Tečná síla pak působí ve směru tečném ke zvolené ploše S v deformovaném tělese. Její výpočet se provádí naprosto stejně jako u tahové nebo tlakové síly, pouze vycházíme z hodnoty tečného napětí $\boldsymbol{\sigma}_t$. Celková tečná síla $\boldsymbol{F}_t$ je tedy dána

$$\boxed{\boldsymbol{F}_t = \int_{(S)} \boldsymbol{\sigma}_t \mathrm{d}S} \quad . \tag{4.53}$$

4.2.2 Základní typy deformací těles

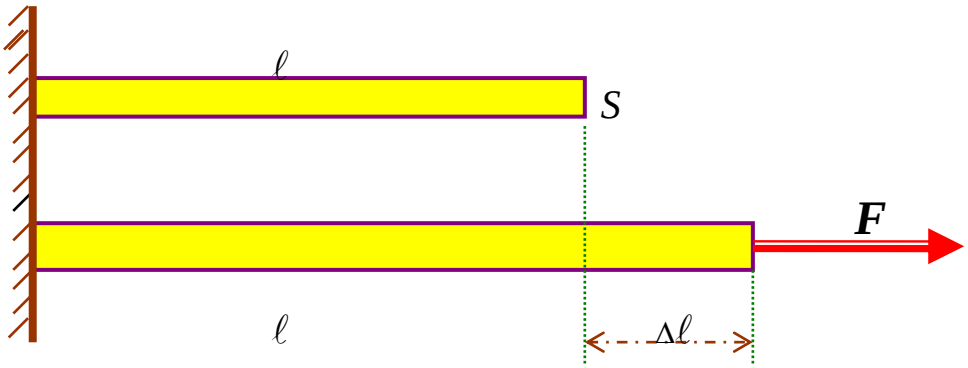
Podle toho, jaký je charakter vnějších sil, jež jsou příčinou deformace příslušného tělesa, rozlišujeme následující základní **typy deformací**.

- → ***deformace tlakem*** – bývá způsobena normálovou tlakovou silou;
- → ***deformace tahem*** – bývá způsobena normálovou tahovou silou;
- → ***deformace smykem*** – je způsobena tečnou silou;
- → ***deformace kroucením*** – jedná se o zvláštní případ smykové deformace, jež je vyvolána působením **dvojice sil** např. na tyč, přičemž moment silové dvojice $\boldsymbol{D}$ má směr osy o tyče;
- → ***deformace ohybem*** – zvláštní případ, kdy probíhá současně deformace tahem a tlakem; realizuje se např. opět v tyči, na níž ale tentokráte působí dvojice sil, jejíž silový moment $\boldsymbol{D}$ je kolmý k ose o tyče.

Míru deformace pak nejvýstižněji charakterizují tzv. poměrné veličiny. **Relativní (poměrná) deformace** je definována jako podíl příslušné veličiny, jež charakterizuje daný typ deformace a některého z parametrů udávajícího původní rozměry (nebo tvar) tělesa. Pro příklad si zde uveďme tyto veličiny alespoň u nejběžnějších typů deformací.

Poměrné (relativní) prodloužení ε udává podíl přírůstku délky tělesa $\Delta\ell$ při jeho deformaci tahem a původní délky tělesa ℓ (viz obr. 4.18)

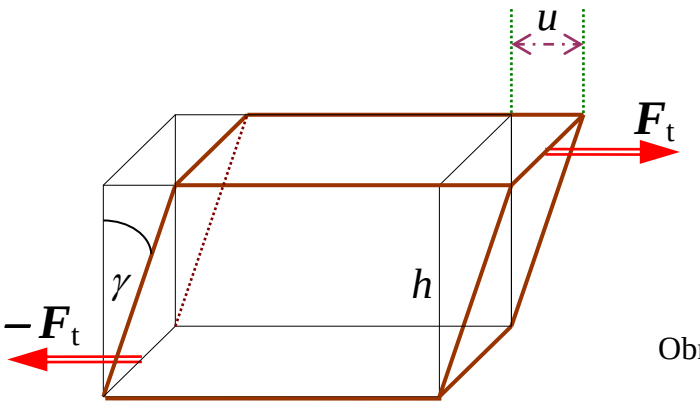
$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell} \quad . \tag{4.54}$$



Obr. 4.18 – k deformaci tahem

Poměrné příčné zkrácení η je dáno podílem zkrácení šířky tělesa v příčném řezu při deformaci tahem a původní šířky před deformací. Při deformaci tělesa tahem totiž nedochází jen k prodlužování jeho délky, ale i ke zmenšování (přesněji zužování) jeho příčného rozměru !!!

Poměrné posunutí γ (též se používá termínu **zkos**) charakterizuje podíl absolutního posunutí u dvou sousedních vrstev a jejich vzájemné vzdálenosti h při deformaci smykem (viz vedlejší obr. 4.19).



Obr. 4.19 – k deformaci smykem

Jak je i z uvedeného obrázku patrné musí pro poměrné posunutí platit, že

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{u}{h} \quad .$$

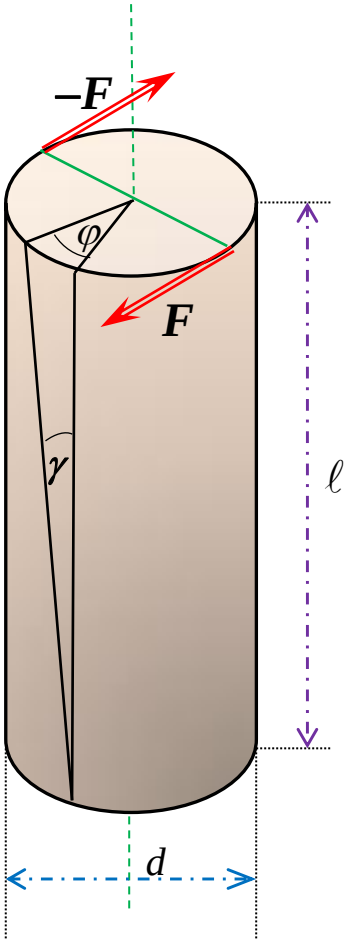
Takže γ je vlastně úhel, o nějž se odkloní původně kolmá boční stěna při deformaci smykem. Jelikož bývá tento úhel obvykle velmi malý, splňuje známou matematickou podmínku $\operatorname{tg}\gamma \doteq \gamma$ a pro poměrné posunutí tak dostáváme vyjádření

$$\gamma = \frac{u}{h} \quad . \tag{4.55}$$

Poměrné zkroucení ϑ (neboli **zkrut**) např. u deformace tyče kroucením (v literatuře se můžete setkat i s termínem ***deformace torzní***) vyjadřuje podíl mezi úhlem zkroucení φ na konci tyče ku délce ℓ této tyče (viz obr. 4.20).

Platí

$$\vartheta = \frac{\varphi}{\ell} \quad . \tag{4.56}$$



Obr. 4.20 – k torzní deformaci

4.2.3 Hookův zákon

Hookův zákon vyjadřuje závislost zjištěnou čistě empiricky pro velkou část pružné deformace těles. Podle tohoto zákona platí, že:

„Deformace tělesa je přímo úměrná deformující síle“.

Například pro **deformmaci tahem** platí pro poměrné prodloužení ε a velikost normálového napětí σ_n Hookův zákon ve tvaru

$$\varepsilon = k \,.\, \sigma_n \quad , \tag{4.57}$$

kde k je tzv. **součinitel protažení**. Obvyklejší je ale zápis Hookova zákona s převrácenou hodnotou této veličiny

$$E = \frac{1}{k} \quad .$$

Tím vlastně zavádíme veličinu novou – **modul pružnosti E v tahu** (též je používán název **Youngův modul**). Jeho fyzikální jednotkou je 1 $\mathrm{N.m^{-2}}$, neboli 1 Pa. Po tomto přepisu nabude Hookův zákon pro deformaci v tahu tvaru

$$\varepsilon = \frac{\sigma_n}{E} \quad . \tag{4.58}$$

Z něj je i patrný fyzikální význam modulu pružnosti – udává vlastně hypotetickou hodnotu napětí, jež způsobí relativní prodloužení ε rovné jedné, neboli natažení (např. drátu) na dvojnásobek původní délky.

Vztah mezi poměrným prodloužením tělesa ε a jeho poměrným příčným zkrácením η při deformaci tahem pak udává tzv. **Poissonovo číslo μ**, fyzikální veličina nemající (jako všechny poměrné veličiny) fyzikální jednotku. Toto číslo je definováno jako podíl

$$\mu = \frac{\eta}{\varepsilon} \quad . \tag{4.59}$$

Obě dvě hodnoty – modul pružnosti E a Poissonovo číslo μ – jsou důležité materiálové parametry každé homogenní látky a najdeme je v příslušných tabulkách.

* * *

V případě **smykové deformace** vyjadřuje Hookův zákon přímou úměrnost mezi poměrným posunutím γ a velikostí tečného napětí σ_t a má tvar

$$\gamma = \frac{\sigma_t}{G} \quad , \tag{4.60}$$

kde G je **modul pružnosti ve smyku** (při deformaci kroucením se též používá termín **modul torze**); i jeho hodnotu naleznete vždy v tabulkách.

* * *

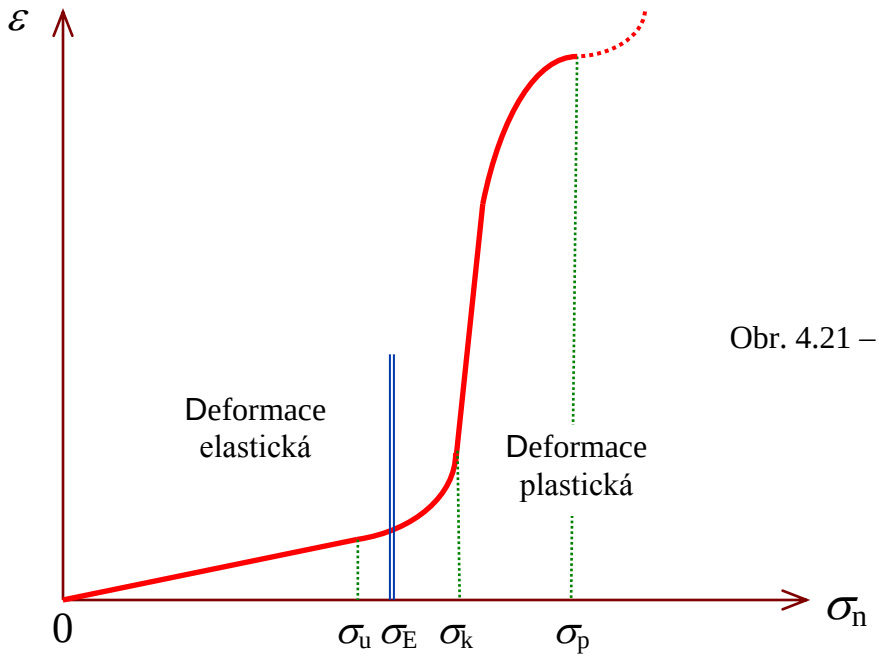
U poslední výše zmíněné **torzní deformace** dostáváme zase přímou úměrnost mezi poměrným zkroucením ϑ a velikostí kroutícího momentu silové dvojice D ve tvaru

$$\vartheta = \frac{32\,D}{\pi\,G\,d^4} \quad , \tag{4.61}$$

kde opět vystupuje **modul pružnosti ve smyku G** a kde d je průměr krouceného drátu nebo tyče válcového tvaru.

4.2.4 Průběh deformace, deformační křivka

Průběh deformace lze vystihnout též tzv. **deformační křivkou**, grafickou závislostí relativní deformace na působícím napětí. Na následujícím obr. 4.21 je pak uveden typický příklad této závislosti pro deformaci tělesa tahem. Na vodorovné ose je vyneseno normálové napětí σ_n, na ose svislé pak jemu odpovídající relativní prodloužení tělesa ε.



Obr. 4.21 – deformační křivka

Na křivce se nachází několik typických bodů, jejichž fyzikální význam je následující:

→ **mez úměrnosti** σ_u – je největší hodnotou normálového napětí, pro níž ještě platí Hookův zákon; pozor jeho platnost je omezena sice na velkou část pružné deformace, ale neplatí pro celou oblast elastické deformace.

→ **mez pružnosti** σ_E – představuje největší (hraniční) hodnotu normálového napětí, při které je ještě deformace pružná.

V intervalu napětí $\langle \sigma_u ; \sigma_E \rangle$ už pružná deformace skutečně nesplňuje Hookův zákon a neplatí zde proto ani přímá úměrnost mezi ε a σ_n ! **!!**

→ **mez kluzu** σ_k – po překročení této hodnoty normálového napětí začne relativní prodloužení prudce narůstat, aniž by se napětí viditelně zvyšovalo. Teprve při dalším zvýšení normálového napětí nastává tzv. **zpevnění materiálu** a deformace opět závisí na rostoucím napětí σ_n .

→ **mez pevnosti** σ_p – udává hodnotu normálového napětí, při jejímž překročení dojde k porušení soudržnosti namáhaného materiálu a k jeho definitivní destrukci (např. drát se přetrhne).

Kromě těchto hodnot zavádíme i tzv. **dovolené napětí** σ_{dov} . Je to vlastně maximální v praxi přípustná hodnota normálového napětí určená příslušnými předpisy. Jeho velikost bývá obvykle značně menší než mez pevnosti σ_{p} daného materiálu. Poměr meze pevnosti σ_{p} a dovoleného napětí σ_{dov} je tzv. **součinitel bezpečnosti**

$$k_{\mathrm{b}} = \frac{\sigma_{\mathrm{p}}}{\sigma_{\mathrm{dov}}} \quad . \tag{4.62}$$

5. GRAVITAČNÍ POLE

5.1 Fyzikální pole – základní charakteristika a popis

Náplní naší exkurze do základní fyzikální problematiky v druhé části tohoto semestru bude zkoumání jevů k nimž dochází ve dvou typických (přitom poměrně jednoduchých) fyzikálních polích, a to v poli gravitačním a poté v poli elektrickém. Na poznatky z pole elektrického pak v závěru navážeme výkladem o ustáleném elektrickém proudu se zaměřením na nejtypičtější druh vodičů – na kovy, ale nezapomeneme ani na základní fyzikální mechanizmy probíhající při vedení elektrického proudu v polovodičích a v jednoduchých polovodičových strukturách.

Jak už bylo řečeno na začátku semestru v úvodu kapitoly **2.2 DYNAMIKA POHYBU HMOTNÉHO BODU**, projevuje se vzájemné silové působení (neboli interakce) dvou, případně více těles dvěma naprosto odlišnými způsoby. Dochází k němu:

→ **při vzájemném dotyku (bezprostředním kontaktu) obou těles,**

→ **prostřednictvím silových polí,** aniž by se objekty dotýkaly (typická je taková interakce mezi hmotnými objekty v gravitačních polích nebo mezi nabitými tělesy v polích elektrických a magnetických).

U silového působení prostřednictvím pole přitom platí naprosto jednoduché pravidlo – dva objekty, jež na sebe vzájemně působí, musí být navlas stejné podstaty:

- objekt o určité **hmotnosti** působí prostřednictvím **gravitačního pole gravitační silou** na jiný **hmotný** objekt;
- **nabitý** objekt působí prostřednictvím **elektrického pole elektrickou silou** na jiný **nabitý** objekt bez ohledu na to, jsou-li tyto objekty v klidu nebo v pohybu;
- **pohybující se nabitý** objekt působí prostřednictvím **magnetického pole silou magnetickou** na jiný **nabitý** objekt, jenž je **v pohybu**.

Silové působení, ať už je jakékoli podstaty, musí splňovat Newtonovy pohybové zákony. Dva objekty působí na sebe prostřednictvím pole vždy silami naprosto stejné velikosti, ale opačného směru ($\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$) – silami **akce a reakce**. My si však z ryze praktického hlediska zvolíme obvykle jeden z těchto objektů za objekt dané pole vytvářející a ten druhý za objekt v jeho poli se nacházející. Většinou to bude „ten větší“, v případě elektrického pole těleso více nabité. Je však třeba mít vždy na paměti, že i tento „větší“ objekt se zase nachází naopak v silovém poli toho „menšího“.

Při popisu fyzikálních polí a dějů v nich probíhajících nám slouží hlavně tyto fyzikální veličiny:

1) **Síla** působící v daném poli na objekty v něm přítomné (v našem případě to bude elektrická síla působící na nabité částice, tělesa, apod.). **Typický vektor** mající v každém z polí charakteristickou velikost a směr – je vlastně základní veličinou každého pole.

2) **Intenzita** příslušného pole v daném místě v prostoru. Rovněž vektorová fyzikální veličina bezprostředně od příslušné síly odvozená. Charakterizuje „velikost“ či „mohutnost“ pole vytvářeného konkrétním nabitým objektem.

3) **Práce** konaná v daném poli buď přímo silami samotného pole (v našem případě při přenášení nabitých objektů) nebo silami, jež tyto síly překonávají. **Typická skalární veličina** – nás bude hlavně zajímat, na čem tato práce závisí a na čem je naopak v příslušném poli případně nezávislá.

4) **Polohová energie** objektu (v tomto případě náboje v jistém místě elektrického pole). Rovněž skalár zavedený v konzervativních polích na základě souvislosti mezi prací vykonanou na příslušném objektu a změnou jeho energie – viz **článek 2.2.6** těchto skript.

5) **Potenciál** příslušného pole v daném místě v prostoru. Je odvozen od polohové energie určitého objektu v daném místě pole a je též veličinou skalární. V elektrickém poli pak pojem potenciálu bezprostředně souvisí s fyzikální veličinou **napětí** mezi dvěma body elektrického pole.

5.2 Gravitační síla, intenzita gravitačního pole

Jak už bylo naznačeno v předcházejícím úvodním **článku 5.1**, je **gravitace** přírodní jev, při němž dochází ke vzájemnému silovému působení (interakci) mezi libovolnými hmotnými objekty, a to prostřednictvím gravitačního pole.

Gravitační pole je fyzikální silové pole, v němž na každý hmotný objekt **o určité hmotnosti** m působí **gravitační síla** $\boldsymbol{F}_g$, jež splňuje dvě obecné (bez výjimky platné) charakteristiky týkající se jednak jejího směru a jednak její velikosti:

I. Gravitační síla je pouze a jedině silou **přitažlivou**; v přírodě neexistuje případ, že by se dvě hmotná tělesa gravitační silou navzájem odpuzovala.

II. Velikost gravitační síly **je vždy přímo úměrná hmotnosti** m daného hmotného objektu a přitom nezávisí na přítomnosti jiných (třetích a dalších) hmotných objektů.

Vyjděme nyní z obecné podmínky o velikosti gravitační síly F_g. Jelikož je bez výjimky ve všech případech **přímo úměrná** hmotnosti m, na níž tato síla působí

$$F_g \sim m \quad ,$$

lze této skutečnosti snadno využít k jednoznačnému popisu příslušného gravitačního pole zavedením další fyzikální veličiny od gravitační síly přímo odvozené.

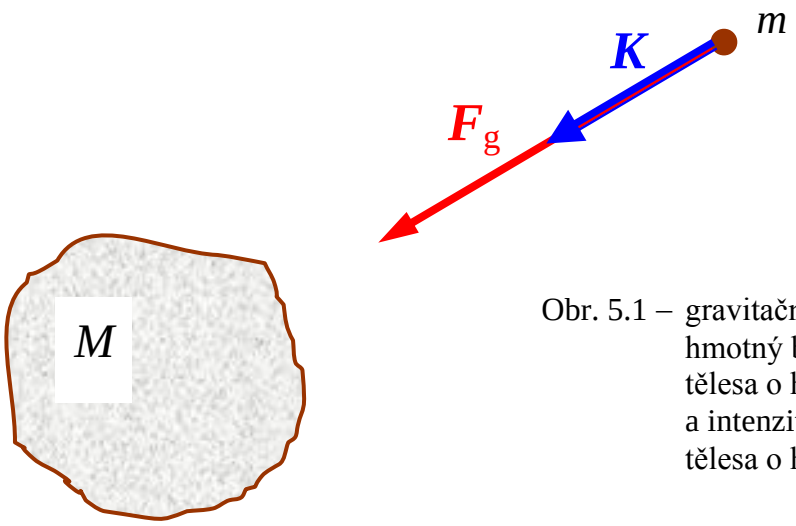
Jestliže síla $\boldsymbol{F}_g$ působící na hmotnost m v daném gravitačním poli na uvedené hmotnosti přímo úměrně závisí, musí být nutně poměr těchto dvou fyzikálních veličin

$$\frac{\boldsymbol{F}_g}{m}$$

už na hmotnosti m nezávislý. Tento poměr tím pádem udává jistou obecnou silovou charakteristiku gravitačního pole v daném místě prostoru, charakteristiku, jež naprosto nezávisí na objektech v tomto gravitačním poli přítomných, ale pouze na poli samotném. Takto naznačeným postupem zavádíme (definujeme) novou důležitou veličinu popisující gravitační pole, a tou je **intenzita gravitačního pole** $\boldsymbol{K}$.

Představme si situaci naznačenou na následujícím obr. 5.1. Gravitační pole vytváří objekt, jehož hmotnost označíme velkým M. Gravitační pole tohoto objektu bude působit na hmotný bod o hmotnosti m v určitém místě prostoru gravitační sílou $\boldsymbol{F}_g$ směřující k hmotnosti M a mající velikost F_g přímo úměrnou hmotnosti m. Vektor intenzity $\boldsymbol{K}$ gravitačního pole **vytvářeného tělesem o hmotnosti** M je pak definován vztahem

$$\boxed{\boldsymbol{K} = \frac{\boldsymbol{F}_g}{m}} \quad . \tag{5.1}$$



Obr. 5.1 – gravitační síla $\boldsymbol{F}_g$ působící na hmotný bod m v gravitačním poli tělesa o hmotnosti M a intenzita $\boldsymbol{K}$ gravitačního pole tělesa o hmotnosti M

Pozn.: Vztah (5.1) vede často studenty k mylné představě, že se jedná o intenzitu pole samotného hmotného bodu o hmotnosti *m*. Tento hmotný bod však v naší modelové situaci pouze plní úlohu jakési „sondy“, jež mapuje silové účinky gravitačního pole tělesa o hmotnosti *M*. Intenzita definovaná uvedeným postupem **je skutečně intenzitou gravitačního pole objektu s hmotností *M***.

Intenzita $\boldsymbol{K}$ gravitačního pole je typickou **vektorovou fyzikální veličinou**, jež jednoznačně charakterizuje silové účinky příslušného pole v jednotlivých bodech prostoru (dá se říci, že vlastně udává jak jeho „velikost“ či „mohutnost“, tak i směr silového působení v tomto poli). Budeme-li totiž chtít zpětně určit, jaká gravitační síla $\boldsymbol{F}_g$ působí v daném místě gravitačního pole na jistý hmotný bod o hmotnosti *m*, jenž do gravitačního pole vložíme nebo jenž se tam již nachází, určíme ji jednoduchým výpočtem

$$\boldsymbol{F}_g = m \,.\, \boldsymbol{K} \quad . \tag{5.2}$$

Jelikož je hmotnost *m* jakéhokoli objektu vždy kladná, mají pochopitelně vektory gravitační síla $\boldsymbol{F}_g$ a intenzita gravitačního pole $\boldsymbol{K}$ pokaždé souhlasný směr → oba míří za všech okolností k tělesu o hmotnosti *M*, jež dané gravitační pole vytváří (viz opět výše na obr. 5.1).

!!

Na tomto místě je však třeba upozornit ještě na jednu skutečnost, jež může občas způsobit v myslích studentů mírný zmatek. Působí-li na hmotný bod o hmotnosti *m* v gravitačním poli pouze gravitační síla $\boldsymbol{F}_g$ (resp. je-li tato síla výslednicí všech sil, jež na tuto hmotnost působí), bude v souladu s 2. Newtonovým pohybovým zákonem této hmotnosti udílet zrychlení nazývané **zrychlení gravitační** a označované symbolem $\boldsymbol{a}_g$. Pro toto zrychlení ale nutně musí platí, že je dáno výrazem

$$\boldsymbol{a}_g = \frac{\boldsymbol{F}_g}{m} \quad . \tag{5.3}$$

Jednoduchým porovnáním vztahů (5.1) a (5.3) snadno zjistíme, že obě veličiny – gravitační zrychlení $\boldsymbol{a}_g$ a intenzita gravitačního pole $\boldsymbol{K}$ – jsou vlastně totožné vektory. Z prostého matematického úhlu pohledu určitě, ale **fyzikální význam** obou veličin je naprosto rozdílný:

→ **gravitační zrychlení** je totiž udíleno konkrétnímu hmotnému objektu, jenž se musí v daném gravitačním poli nacházet a jenž v tomto poli koná pohyb vyvolaný pouze gravitační silou na něj působící; gravitační zrychlení pak vždy bude **celkovým (!!!) zrychlením** pohybu onoho konkrétního hmotného objektu;

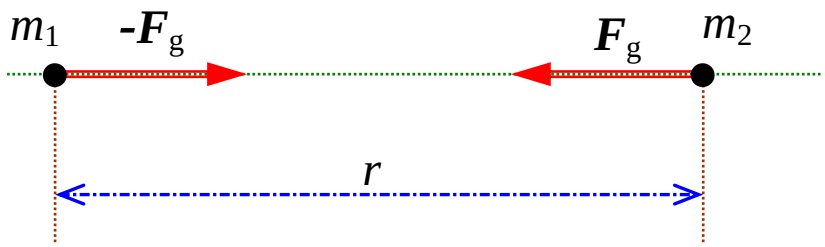
→ **gravitační intenzita** popisuje silové účinky gravitačního pole v daném místě v prostoru a její hodnota je naprosto nezávislá na tom, zda se v tomto bodě nějaká hmotnost *m* právě nachází, či ne a jak je velká – dá se říci, že intenzita pole je obecnějším pojmem.

Pozn.: Podobným způsobem zavedeme později i intenzitu pole v poli elektrickém. Vzhledem k jeho kvalitativně odlišné podstatě však už podobná identita mezi ní a zrychlením pohybu nabitých částic v elektrických polích v žádném případě nenastane. Tam se bude už skutečně jednat o dva naprosto rozdílné vektory s různými fyzikálními jednotkami.

5.3 Keplerovy zákony a Newtonův gravitační zákon

Gravitační silou na sebe působí každé dva hmotné objekty. Stojíme-li ale před úkolem vypočítat velikost této síly v obecném případě, zjistíme, že to není vůbec jednoduché. Zaměřme se proto v následujícím výkladu na elementární situaci, kdy budou na sebe navzájem působit gravitační silou pouze dva hmotné body. Zopakujeme si tak vlastně postup, který provedl Newton při formulaci svého slavného gravitačního zákona.

Newtonův gravitační zákon se skutečně týká pouze zvláštního případu silové interakce, kdy na sebe působí gravitačními silami **dva hmotné body**, jež se nacházejí v definované vzdálenosti r od sebe (viz následující obrázek 5.2).



Obr. 5.2 – gravitační síly akce a reakce působící mezi dvěma hmotnými body

Jsou-li příslušné hmotnosti dvou hmotných bodů m_1 a m_2, bude mít mezi nimi působící gravitační síla $\boldsymbol{F}_g$ **velikost** danou vztahem

$$F_g = \kappa \frac{m_1.m_2}{r^2} \quad , \tag{5.4}$$

kde κ (řecké písmeno „kapa“) je tzv. **gravitační konstanta**; její hodnota v soustavě SI je

$$\kappa \doteq 6{,}67.10^{-11}\ \mathrm{m}^3.\mathrm{kg}^{-1}.\mathrm{s}^{-2} \ .$$

A znovu připomínám, že gravitační síla $\boldsymbol{F}_g$ je vždy silou ***přitažlivou*** **!!!** A že silové působení mezi oběma hmotnými body je vzájemné a je typickým příkladem působení sil akce a reakce.

Pozn.: Platnost Newtonova gravitačního zákona lze přitom rozšířit i na tělesa, jež nejsou právě hmotnými body. Je možné jej použít i pro výpočet gravitační síly působící mezi dvěma tělesy, jež mají charakter **homogenních koulí** nebo alespoň **koulí se středově symetrickým rozložením hmotnosti** (resp. hustoty – jako je tomu např. u naší Země). Vzdálenost r ve jmenovateli (5.4) pak představuje **vzdálenost středů** takových koulí. S jistou mírou přesnosti jej lze aplikovat i v těch případech, kdy hmotná tělesa výše zmíněnou podmínku nesplňují, ale kdy jejich vzdálenost je nesrovnatelně větší vzhledem k rozměrům obou těles.

Isaac Newton tento zákon „všeobecné gravitace“ prvně publikoval – spolu s trojicí svých pohybových zákonů – v roce 1687 ve stěžejním díle „Philosophiae naturalis principia mathematica“ (Matematické základy přírodní filozofie), když aplikoval své pohybové zákony na pohyb planet kolem Slunce. Vyšel přitom z geniálního kinematického popisu Keplerova o pohybech planet a postupně dospěl až k vyjádření velikosti gravitační síly F_g tak, jak ji charakterizuje rovnice (5.4).

Odvození gravitačního zákona je přitom krásnou a názornou ukázkou toho, jak se lze postupně dopátrat od čistě kinematických charakteristik určitého pohybu k jeho příčině – k síle, jež tento pohyb způsobí.

Zhruba 70 let před Newtonem (1643 –1727) formuloval německý astronom Johannes Kepler (1571 – 1630), který mimo jiné působil v letech 1600 – 1612 v Praze na dvoře Rudolfa II a jeho bratra Matyáše, své tři základní zákony o pohybu planet kolem Slunce. A to čistě na základě pouhého pozorování pěti tehdy známých oběžnic (kromě Země to byl Merkur, a dále Venuše, Mars, Jupiter a Saturn) prováděného hlavně Dánem Tychonem Brahe (1546 – 1601) a později i na základě pozorování svých.

Znění těchto zákonů, jež nesou Keplerovo jméno, je následující:

1. Keplerův zákon – planety obíhají po eliptických trajektoriích kolem Slunce, jež se nachází ve společném ohnisku těchto elips.

2. Keplerův zákon – plochy opsané průvodičem dané planety za stejný čas jsou vždy stejné.

3. Keplerův zákon – druhé mocniny oběžných dob T dvou planet jsou v témže poměru jako třetí mocniny velkých poloos a jejich trajektorií. Platí

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad . \tag{5.5}$$

Pozn.: **1)** Keplerovy zákony platí nejen pro soustavu planet obíhající naše Slunce, ale pro jakékoli oběžnice pohybující se kolem určitého centrálního tělesa (pro tzv. **centrální pohyb**).

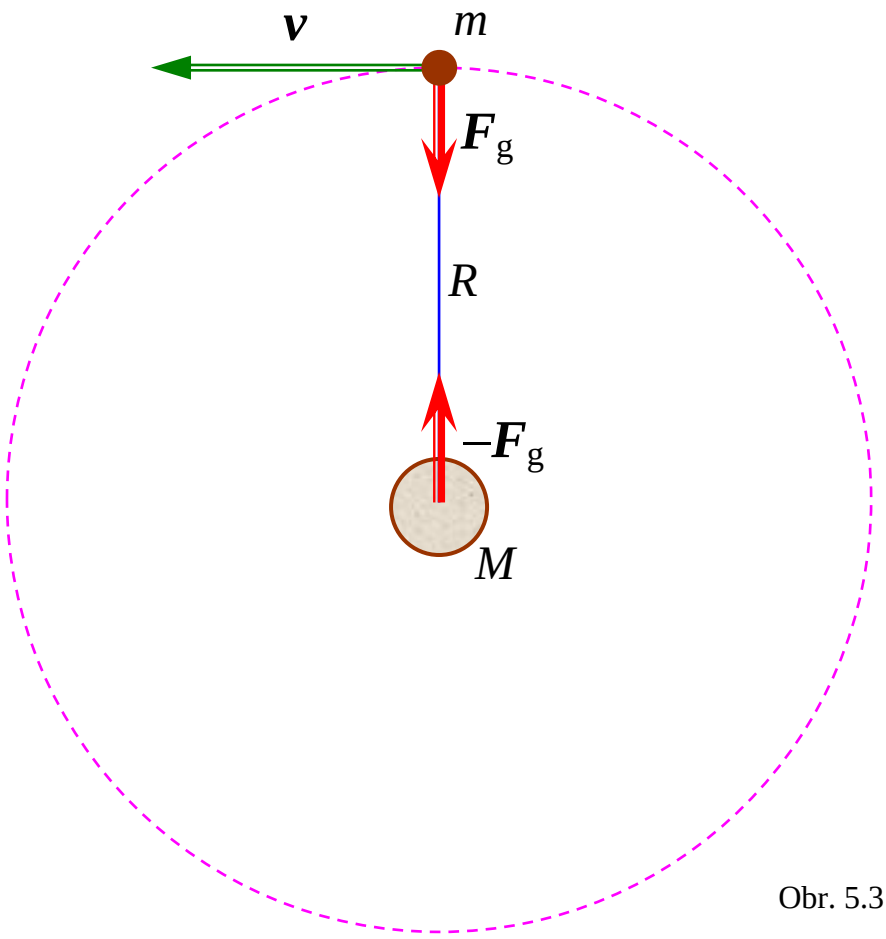
2) Vztah (5.5) platí s dobrou přibližností, pokud jsou hmotnosti m_1 a m_2 obou planet (resp. oběžnic) zanedbatelně malé proti hmotnosti M centrálního tělesa (Slunce). Aplikací Newtonových pohybových zákonů lze dokázat, že pro oběžné doby T_1 a T_2 dvou planet (oběžnic) ve skutečnosti platí

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \cdot \frac{M + m_2}{M + m_1} \quad .$$

Vydejme se nyní cestu, jež vedla od tří zákonů Keplerových ke gravitačnímu zákonu Newtonovu. Vyjděme z **1. Keplerova zákona** a zvolme si velice jednoduchý model oběžnice opisující přesně kruhovou trajektorii o poloměru R kolem nehybného Slunce (viz následující obr. 5.3). Z planet naší sluneční soustavy se tomu svou trajektorií pohybu nejvíce blíží Venuše.

Z **2. Keplerova zákona** okamžitě vyplývá, že velikost rychlosti oběžnice je konstantní (neboť průvodič oběžnice má stále stejnou délku) – oběžnice se tedy pohybuje **rovnoměrným pohybem** rychlostí o velikosti

$$v = \frac{2\pi.R}{T} \quad . \qquad (5.6)$$



Obr. 5.3 – k odvození Newtonova gravitačního zákona

Pohyb oběžnice je ale křivočarý s dostředivým zrychlením

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2.R}{T^2} \quad , \tag{5.7}$$

jež musí oběžnici udílet jedině dostředivá síla kolmá ke směru její rychlosti. Ale to je právě ta síla, kterou na oběžnici působí Slunce (obecně nějaké centrální těleso) – tedy **síla gravitační** $\boldsymbol{F}_g$.

Podle **2. Newtonova zákona** (zákona síly) musí pro tuto sílu nutně platit

$$F_g = F_d = m \,.\, a_n = m\,\frac{4\pi^2.R}{T^2} \quad . \tag{5.8}$$

Zbývá už jen vyjádřit oběžnou dobu T naší oběžnice ve vztahu k její vzdálenosti R od centrálního tělesa – k tomu samozřejmě využijeme **3. Keplerova zákona**. Ze vztahu (5.5) vyplývá, že mezi druhou mocninou T^2 oběžné doby a třetí mocninou R^3 poloměru kruhové trajektorie obíhajícího tělesa musí nutně existovat přímá úměrnost

$$T^2 = k \,.\, R^3 \quad , \tag{5.9}$$

kde k je určitá charakteristická konstanta pro danou soustavu oběžnic.

Dosadíme-li kvadrát oběžné doby (5.9) do výrazu (5.8) dostáváme po krátké úpravě, že

$$F_g = \frac{4\pi^2}{k} \cdot \frac{m}{R^2} \quad . \tag{5.10}$$

Dostáváme se tak k prvnímu důležitému závěru, a sice,
že velikost gravitační síly skutečně
nepřímo úměrně závisí na kvadrátu vzdálenosti obou těles.

Vztah (5.10) navíc potvrzuje i to, že velikost gravitační síly je přímo úměrná hmotnosti m oběžnice kolem Slunce.

Na závěr se pak dostane „do hry“ **3. Newtonův pohybový zákon** – zákon akce a reakce. Podle něj je působení Slunce – oběžnice vzájemné a charakterizují jej dvě naprosto stejně velké jen opačně orientované síly. Oběžnice na Slunce musí působit také gravitační silou, a to – $\boldsymbol{F}_g$, jejíž velikost je v tomto případě ale úměrná hmotnosti M centrálního tělesa. Formálně lze tedy psát

$$\left| -\boldsymbol{F}_g \right| = \frac{4\pi^2}{k'} \cdot \frac{M}{R^2} \quad , \tag{5.11}$$

kde k' tentokráte představuje konstantu charakteristickou pro danou planetu.

Porovnáním vztahů (5.10) a (5.11) dostáváme

$$\frac{m}{k} = \frac{M}{k'} \quad \Rightarrow \quad m \,.\, k' = M \,.\, k = c \quad . \tag{5.12}$$

Jak je patrné, konstanta $c = M \,.\, k$ je opět určitou typickou veličinou soustavy Slunce – planety.

Z (5.12) vyplývá, že $k = \frac{c}{M}$ a nyní zbývá poslední krok – dosadit za k do výrazu (5.10):

$$F_g = \frac{4\pi^2}{c} \cdot \frac{M.m}{R^2} \quad . \tag{5.13}$$

Nahradíme-li pro jednoduchost konstantu $\frac{4\pi^2}{c}$ novou konstantou κ (kapa), dostáváme Newtonův gravitační zákon ve známém tvaru jen s jiným označením veličin

$$\boxed{F_g = \kappa \frac{M.m}{R^2}} \quad . \tag{5.4}$$

* * *

Na závěr tohoto výkladu se ještě vraťme k planetě Venuši zmíněné hned v úvodu našeho odvozování.. Její střední vzdálenost od Slunce je 108,21 miliónů kilometrů ($R \doteq 1{,}0821 \,.\, 10^{11}$ m) a její oběžná doba je 0,615 21 roku ($T \doteq 1{,}9414 \,.\, 10^7$ s). Podle (5.9) je tedy konstanta

$$k = \frac{T^2}{R^3} \doteq 2{,}9746 \,.\, 10^{-19}\ \mathrm{s}^2.\mathrm{m}^{-3} \quad .$$

Po dosazení této hodnoty do (5.12) s použitím dnes známé hmotnosti Slunce ($M \doteq 1{,}9891 \,.\, 10^{30}$ kg) vychází druhá konstanta

$$c = M \,.\, k \doteq 5{,}9168 \,.\, 10^{11}\ \mathrm{kg.s}^2.\mathrm{m}^{-3}$$

a nakonec i

$$\kappa = \frac{4\pi^2}{c} \doteq 6{,}672 \,.\, 10^{-11}\ \mathrm{kg}^{-1}.\mathrm{s}^{-2}.\mathrm{m}^3 \quad .$$

Jak krásná shoda s údajem, jenž můžete najít v každých tabulkách!

5.4 Gravitační pole hmotného bodu a kulového tělesa

Podívejme se nyní podrobněji na gravitační pole vytvářené hmotným bodem (jehož hmotnost budeme značit velkým M) a vypočítejme jeho intenzitu $\boldsymbol{K}$ v určitém místě v prostoru. K tomu použijeme osvědčený postup popsaný už ve **článku 5.2**. Ve vzdálenosti r od hmotného bodu M umístíme jiný hmotný bod o známé hmotnosti m, jenž nám bude sloužit jako jistá „sonda“ mapující silové účinky gravitačního poli vytvářeného hmotností „velké“ M právě na toto „malé“ m .

Položíme-li formálně v Newtonově gravitačním zákoně (5.4) $M = m_1$ a $m = m_2$, můžeme snadno v souladu s (5.1) odvodit velikost intenzity K gravitačního pole hmotného bodu M ve vzdálenosti r od tohoto hmotného bodu. Jednoduchou úpravou tak okamžitě dostáváme, že

$$\boxed{K(r) = \kappa \frac{M}{r^2}} \quad . \tag{5.14}$$

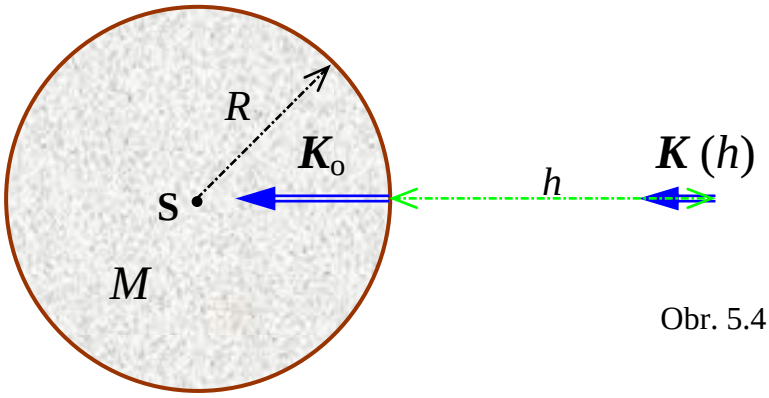
Podobně jako Newtonův gravitační zákon, tak i tento vztah lze použít i pro výpočet **intenzity gravitačního pole homogenní koule** nebo koule se středově symetrickým rozložením hmotnosti (resp. hustoty) – samozřejmě pouze vně (tedy nad povrchem) a na povrchu takové koule. Vzdálenost r pak opět představuje **vzdálenost od středu koule**.

Bývá ale obvyklé, že místo vzdálenosti r od středu koule, charakterizujeme polohu v gravitačním poli výškou h nad povrchem kulového tělesa (viz obr. 5.4). Jelikož nutně platí

$$r = R + h \quad ,$$

kde R je poloměr koule vytvářející gravitační pole, lze vztah (5.14) přepsat (pro $r \geq R$) do tvaru

$$K(h) = \kappa \frac{M}{(R+h)^2} \quad . \tag{5.15}$$



Obr. 5.4 – intenzita gravitačního pole kulového tělesa o hmotnosti M a poloměru R

V souladu s tím musí mít intenzita gravitačního pole $\boldsymbol{K_0}$ na povrchu kulového tělesa nutně velikost

$$K_0 = \kappa \frac{M}{R^2} \quad . \tag{5.16}$$

Porovnáním posledních dvou výrazů (5.15) a (5.16) následně dostáváme vztah udávající, jak se mění intenzita gravitačního pole s výškou h u gravitačních polí kulových hmotných objektů. Platí

$$K(h) = K_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 \quad . \tag{5.17}$$

Příkladem je třeba **gravitační pole Země**. Velikost intenzity K_0 na jejím povrchu spočítáme po dosazení příslušných hodnot (hmotnost Země $M_Z \doteq 5{,}975.10^{24}$ kg, rovníkový poloměr Země $R_Z \doteq 6\,378$ km) do vztahu (5.16). Tento výsledek

$$K_0 \doteq 9{,}80 \text{ N.kg}^{-1}$$

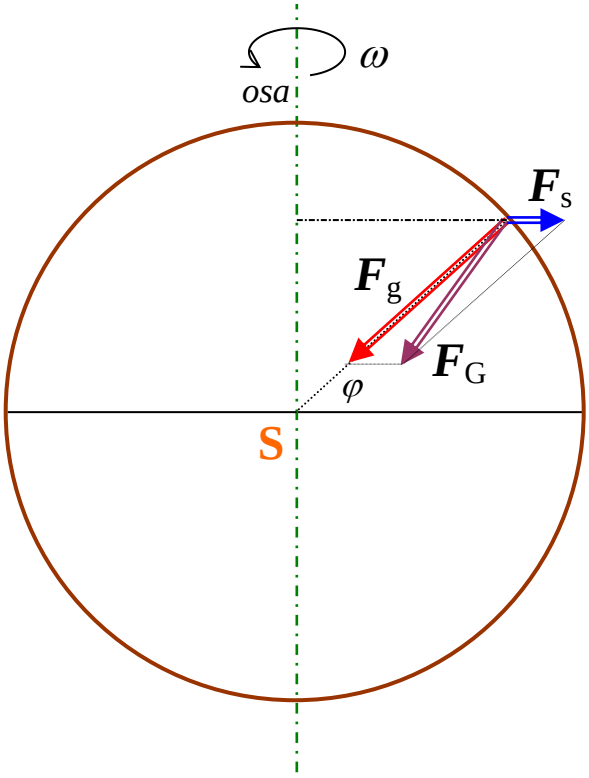
i několik dalších hodnot intenzity pro různé výšky h nad zemským povrchem potom udává následující tabulka.

h (km)	0	8,882	200	36 000	384 000
$K(h)$ (N.kg^{-1})	**9,80**	**9,77**	**9,21**	**0,222**	**0,002 62**

Výše popsané gravitační pole (tedy pole hmotného bodu, resp. kulového tělesa) má středově symetricky rozloženou velikost intenzity K. Takové pole se nazývá **centrální gravitační pole**.

Homogenní gravitační pole je pak vlastně idealizované gravitační pole, jehož intenzita má ve všech bodech prostoru stejnou velikost a stejný směr. Homogenním polem lze např. nahradit centrální gravitační pole Země v relativně malých výškách nad zemským povrchem (jak ale ukazuje i výše uvedená tabulka je to možné jen zhruba do několika km). Zemi v takovém případě vlastně nahrazujeme „plackou“ a nebereme ji jako těleso tvaru koule.

5.5 Gravitační síla a síla tíhová



Obr. 5.5 – gravitační a tíhová síla

Na tomto místě je třeba ještě krátce pohovořit o jednom důležitém pojmu, jenž souvisí s rotací kulových těles (tedy i Země). Jestliže se těleso otáčí, působí na hmotný objekt na jeho povrchu kromě síly gravitační $\boldsymbol{F}_g$ navíc také **odstředivá** setrvačná síla $\boldsymbol{F}_s$. Jejich složením získáme výslednici a právě tato výslednice obou zmíněných sil je **síla tíhová** $\boldsymbol{F}_G$. Platí (viz obr. 5.5)

$$\boldsymbol{F}_G = \boldsymbol{F}_g + \boldsymbol{F}_s \quad .$$

Tato výsledná tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ pak uděluje každému hmotnému bodu m zrychlení, jež nazýváme **tíhové zrychlení** a označujeme jej symbolem $\boldsymbol{g}$; je definováno jako poměr tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$ působící na příslušnou hmotnost m a této hmotnosti

$$\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{F}_G}{m} \quad . \qquad (5.18)$$

V případě Země závisí velikost g tíhového zrychlení na povrchu naší planety na zeměpisné šířce φ daného místa. Nejmenší musí být tíhové zrychlení logicky na rovníku, kde setrvačná odstředivá síla $\boldsymbol{F}_s$ nabývá své maximální velikosti a má i přesně opačný směr než síla gravitační. Tam vychází hodnota $g \doteq 9{,}78$ m.s^{-2}. Naopak největší velikosti nabývá tíhové zrychlení na zemských pólech, kde je jednak odstředivá síla nulová a kde je i díky zploštění Země k jejímu středu z povrchu nejblíže. Na pólech tedy musí platit, že $\boldsymbol{F}_G = \boldsymbol{F}_g$, velikost tíhového zrychlení je v těchto dvou bodech přibližně rovna 9,83 m.s^{-2}.

Jak je z uvedených hodnot patrné, tíhové zrychlení se od gravitačního liší v případě Země jen nepatrně (rozdíly jsou fakticky ve zlomcích procenta), a proto v našich úlohách s tématikou gravitačního pole při výpočtech tento rozdíl zanedbáváme a vliv rotace Země kolem její osy tím pádem jakoby neuvažujeme. Rozdíl ve fyzikální podstatě obou veličin však mějte na paměti **!!!**

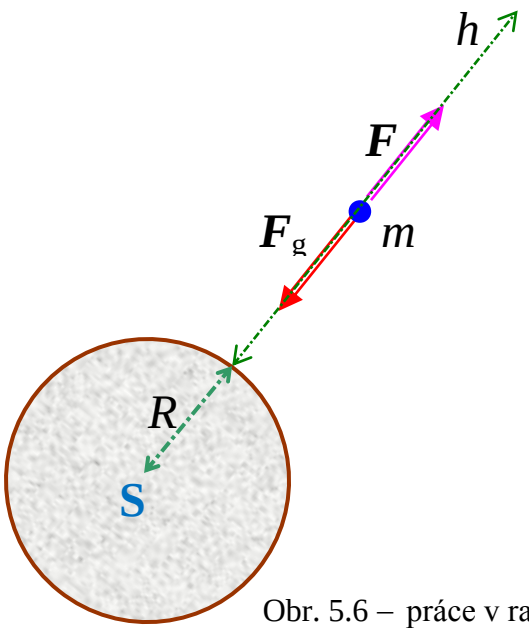
→ **gravitační pole** je pole **nehybného** hmotného tělesa; na jiná hmotná tělesa přítomná v tomto poli působí gravitační síla a udílí jim gravitační zrychlení;

→ **tíhové pole** je pole **otáčejícího se** hmotného tělesa; na jiná hmotná tělesa přítomná v tomto poli působí tíhová síla a udílí jim tíhové zrychlení.

5.6 Práce v radiálním gravitačním poli, potenciální energie hmotného objektu v radiálním gravitačním poli

V gravitačním poli působí na hmotné objekty o hmotnosti m přitažlivá gravitační síla $\boldsymbol{F}_g$. Jestliže chceme přemístit určité těleso (neboli zvednout jej do nějaké výšky h), musíme konat práci silou, jež sílu gravitační překonává. Vypočítat tuto práci v homogenním poli bylo snadné, působící síly byly konstantní a příslušná práce se vypočítala jako

$$W = m.g.h \quad . \tag{5.19}$$



Obr. 5.6 – práce v radiálním gravitačním poli

V poli nehomogenním (a tedy i v případě radiálního pole kulového tělesa) to tak jednoduše vypočítat nelze. Síly gravitační se mění (slábnou) a mění se tedy i síla $\boldsymbol{F}$, jež koná práci potřebnou ke zvednutí tělesa do určité výšky h. Výpočet proto musíme provést pomocí integrace (viz vedlejší obr. 5.6).

Vycházíme přitom z jednoduchého (stále se opakujícího) předpokladu, že na zvedání tělesa nám stačí síla $\boldsymbol{F}$ naprosto stejné velikosti, ale opačného směru, než je směr přitažlivé gravitační síly $\boldsymbol{F}_g$.

Silou menší velikosti bychom totiž těleso v žádném případě nezvedli, naopak větší síla je zase zbytečná – těleso bychom nejen zvedali, ale podle 2. Newtonova zákona bychom jej i navíc urychlovali (udíleli bychom mu nějaké nenulové zrychlení).

Po krátkém výpočtu, jenž představuje celkem jednoduchou integraci (provedu na konzultaci), tak získáme vztah pro velikost práce potřebné ke zvednutí tělesa, jež má hmotnost m, v radiálním gravitačním poli tělesa, jehož hmotnost budeme opět označovat velkým M. Hmotnost m přitom zvedáme z povrchu centrálního tělesa („velkého“ M) do určité výšky h nad ním. Platí

$$W = \int_{R}^{R+h} F \, \mathrm{d}r = \kappa.M.m.\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) \quad . \tag{5.20}$$

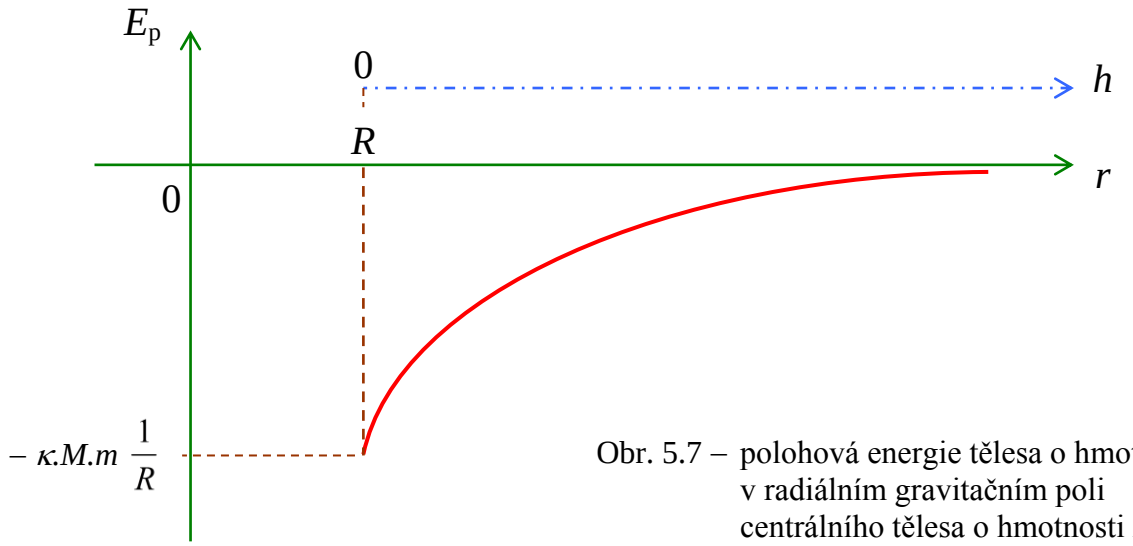
Jak jsme si vyložili již dříve v mechanice hmotného bodu, konání práce je úzce spojeno s pojmem **energie objektu**, na němž se práce koná. Stejný myšlenkový postup uplatníme i v případě konání práce v nehomogenním gravitačním poli.

Vykonáním práce W vnější silou $\boldsymbol{F}$ totiž **změníme** tělesu o hmotnosti m jeho polohu v prostoru (v gravitačním poli) a tedy i jeho **polohovou (potenciální) energii E_p v radiálním gravitačním poli centrálního tělesa o hmotnosti M**. Mezi prací vnější síly a energií tělesa o hmotnosti m ale platí známý vztah

$$W = E_p(h) - E_{po} \quad ,$$

kde E_{po} je polohová energie tělesa o hmotnosti m na povrchu centrálního tělesa a $E_p(h)$ hodnota téže energie ve výšce h nad povrchem. Ze vztahu (5.20) tak okamžitě vyplývá, že hmotnost m bude mít ve výšce h nad centrálním tělesem hodnotu polohové energie danou úplně jiným výrazem, než na jaký jsme byli zvyklí v homogenních polích, a sice

$$E_p(h) = -\kappa.M.m\,\frac{1}{R+h} \quad . \tag{5.21}$$



Obr. 5.7 – polohová energie tělesa o hmotnosti m v radiálním gravitačním poli centrálního tělesa o hmotnosti M

Grafická závislost polohové energie tělesa o hmotnosti m v radiálním gravitačním poli centrálního tělesa o hmotnosti M je vynesena na předcházejícím obr. 5.7.

Jak je z této závislosti a ostatně i ze vztahu (5.21) dobře patrné, je její hodnota vždy záporná. Ale podobně jako v homogenních polích, tak i tomto případě pro polohovou energii E_p platí, že s rostoucí výškou h nad povrchem centrálního tělesa se její hodnota postupně zvětšuje (vzrůstá). Navíc pro jakékoli centrální pole platí, že polohové energie těles ve velkých vzdálenostech od centra ($r \to \infty$) se bez výjimky limitně blíží k nule ($E_{p\infty} = 0$ J).

5.7 Pohyby těles v radiálním gravitačním poli

5.7.1 Volný pád

V homogenním poli je to jeden z nejjednodušších pohybů těles vůbec – je to typický rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb, navíc začínající z klidu (počáteční rychlost $v_o = 0$ m.s^{-1}), přičemž hodnota konstantního zrychlení tohoto pohybu je známa – na Zemi je to tíhové zrychlení ***g*** o velikosti přibližně 9,81 m.s^{-2}.

V nehomogenním radiálním gravitačním poli je však volný pád pohybem **nerovnoměrně zrychleným**, neboť velikost působící gravitační síly postupně vzrůstá tak, jak se padající těleso přibližuje (např. k Zemi). Zrychlení pohybu také stále vzrůstá a až blízko nad povrchem Země se vyrovná hodnotě tíhového zrychlení homogenního pole. K řešení kinematických veličin pohybu je nutná znalost diferenciálních rovnic, ale jsou úlohy, v nichž se bez tohoto aparátu snadno obejdeme. Například při určování dopadové rychlosti tělesa nám pomůže aplikace zákona zachování energie.

Příklad:

Určete, jak velkou rychlostí dopadne volně padající těleso z výšky 10 000 km na povrch Země.

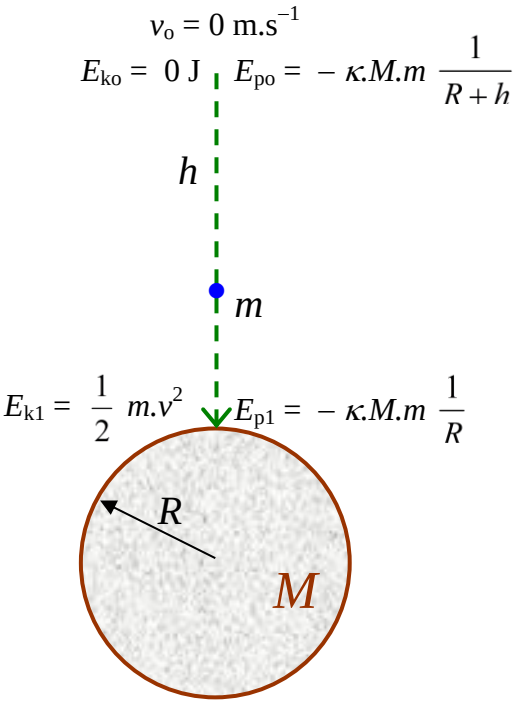
V homogenním poli bychom dostali řešení snadno:

$$v = \sqrt{2.g.h} \doteq 14 \text{ km.s}^{-1} \quad .$$

V nehomogenním poli vyjdeme ze zákona zachování energie – vnější síly při ideálním volném pádu nepůsobí, a tedy **nemohou konat práci**. Musí nutně platit, že součet polohové a pohybové energie padajícího tělesa je naprosto stejný jak při začátku pohybu, tak i při dopadu tělesa

$$E_{po} + E_{ko} = E_{p1} + E_{k1} \quad ,$$

přičemž hodnoty jednotlivých veličin (energií) jsou patrné z vedlejšího schématického obrázku.



Musí tudíž platit

$$-\kappa.M.m\,\frac{1}{R+h} = -\kappa.M.m\,\frac{1}{R} + \frac{1}{2}\,m.v^2 \quad ,$$

odkud po krátké úpravě dostaneme výsledek

$$v = \sqrt{2.\kappa.M \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)} \quad . \qquad (5.22)$$

Po dosazení příslušných hodnot (hmotnost Země $M_Z \doteq 5{,}975.10^{24}$ kg, rovníkový poloměr Země $R_Z \doteq 6\,378$ km) získáme velikost dopadové rychlosti z výšky 10 000 km

$$v \doteq 8{,}74 \text{ km.s}^{-1} \quad .$$

Všimněte si, že tato hodnota je menší než výsledek získaný v poli homogenním. Je to logické, vždyť ideální homogenní pole se vzdáleností od ústředního tělesa neslábne (má stále stejnou intenzitu) a padající těleso je od začátku až do konce pohybu urychlováno stále stejně. V poli nehomogenním (centrálním) je počáteční nárůst rychlosti (tedy zrychlení) pohybu daleko menší, což se musí nutně projevit v menší velikosti dopadové rychlosti.

5.7.2 Vrh svislý vzhůru

I tento pohyb je v homogenních polích velmi jednoduchý – jedná se o přímočarý rovnoměrně zpomalený pohyb s počáteční nenulovou rychlostí $v_o \neq 0$ m.s^{-1} a se stálým zrychlením (resp. zpomalením) – na Zemi to je přibližně 9,81 m.s^{-2}. Je to vlastně „zrcadlový“ opak volného pádu.

V nehomogenním radiálním gravitačním poli však bude vrh svislý vzhůru pohybem **nerovnoměrně zpomaleným**, protože velikost působící gravitační síly (jež brzdí vyhozené těleso) se postupně zmenšuje tak, jak se vržené těleso vzdaluje od tělesa centrálního (např. od Země). Velikost zrychlení pohybu postupně klesá a těleso svou rychlost „ztrácí“ pomaleji, než kdyby pole bylo homogenní. Vystoupá proto logicky výše než v případě, kdyby stejné pole nesláblo (a tedy neměnilo svou intenzitu). Dokonce při dostatečně velké rychlosti (tzv. **úniková rychlost**) se může z gravitačního pole centrálního tělesa vymanit úplně.

Úplné řešení tohoto pohybu vyžaduje rovněž znalost výpočtů diferenciálních rovnic, ale i zde jsou takové typy úloh, u nichž se bez tohoto aparátu snadno obejdeme. Příkladem může být určení maximální výšky h_{max}, do níž těleso během svislého vrhu vystoupá.

Příklad:
Určete, do jaké výšky vystoupá těleso vržené svisle vzhůru počáteční rychlostí 8 km.s^{-1}.

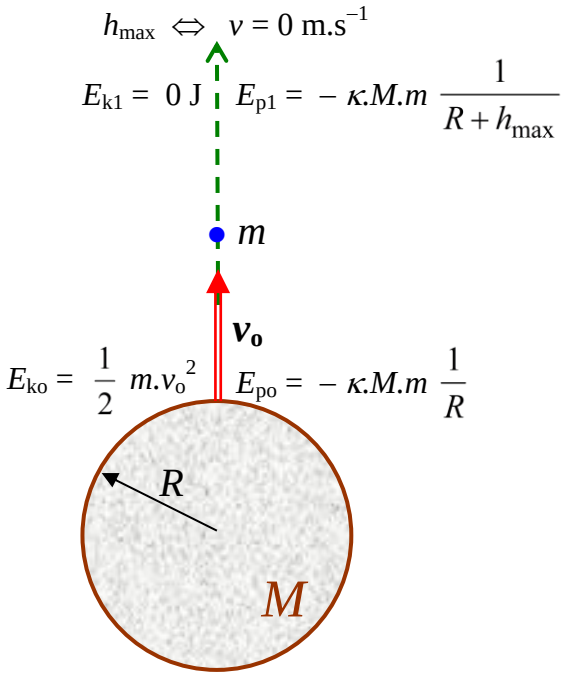
V homogenním poli je určení výsledku snadné (viz článek 2.1.8).

$$h_{max} = \frac{v_o^2}{2g} \doteq 3{,}25.10^6 \text{ m} \doteq 3\,260 \text{ km} \quad .$$

V nehomogenním poli znovu vyjdeme ze zákona zachování energie – vnější síly **nekonají práci** (neboť ani nepůsobí), tedy musí být součet polohové a pohybové energie stejný jak při začátku vrhu, tak i v hledané maximální výšce

$$E_{po} + E_{ko} = E_{p1} + E_{k1} \ ,$$

přičemž hodnoty jednotlivých veličin (energií) jsou opět patrné z vedlejšího schématického obrázku.



Musí přitom platit

$$-\kappa.M.m \frac{1}{R} + \frac{1}{2} m.v_o^2 = -\kappa.M.m \frac{1}{R+h_{max}} \quad .$$

Vidíme, že došlo vlastně jen k „přehození rolí“ jednotlivých energií ve srovnání s předcházejícím pohybem a příkladem. Z posledního vztahu dostaneme po krátké úpravě (tu si ale proveďte sami) nakonec výsledek

$$h_{\max} = \frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{v_o^2}{2\kappa.M}} - R \quad . \tag{5.23}$$

Po dosazení příslušných hodnot hmotnosti Země a jejího rovníkového poloměru získáme, že

$$h_{\max} \doteq 6{,}69.10^6 \text{ m} \doteq 6\,690 \text{ km} \quad .$$

Těleso vystoupalo skutečně výše, než kdyby pole bylo homogenní a nesláblo s rostoucí vzdáleností od centrálního tělesa.

Vztah (5.23) je však zajímavý i z obecnějšího pohledu a stojí za krátký fyzikálně-matematický rozbor.

→ I když tento vztah vypadá na první pohled jako poměrně komplikovaný, můžeme si snadno ověřit, že platí elementární závěr („okrajová podmínka“)

$$v_o = 0 \text{ m.s}^{-1} \Rightarrow h_{\max} = 0 \text{ m} \quad .$$

→ S rostoucí velikostí počáteční rychlosti v_o se zmenšuje jmenovatel výrazu (5.23) a dosažená maximální výška $h_{\max}$ nabývá skutečně větších hodnot než při počátečních rychlostech menších.

→ Vztah (5.23) má však smysl pouze tehdy, je-li jmenovatel zlomku kladný. Blíží-li se hodnota jmenovatele k nule, vzrůstá maximální výška $h_{\max}$ nade všechny meze ($h_{\max} \to \infty$) a **vržené těleso uniká** z gravitačního pole tělesa centrálního. Tak můžeme velice snadno získat vyjádření pro tzv. **únikovou rychlost**, kterou musíme udělit na povrchu centrálního tělesa (o hmotnosti M) tělesu vrženému (o hmotnosti m). To se pak postupně vymaní z gravitačního působení tělesa centrálního. Jednoduchou úpravou dostaneme

$$\boxed{v_o = \sqrt{\frac{2.\kappa.M}{R}}} \quad . \tag{5.24}$$

V případě Země se tato rychlost nazývá **druhou kosmickou rychlostí** a její velikost je

$$v \doteq 11{,}2 \text{ km.s}^{-1} \quad .$$

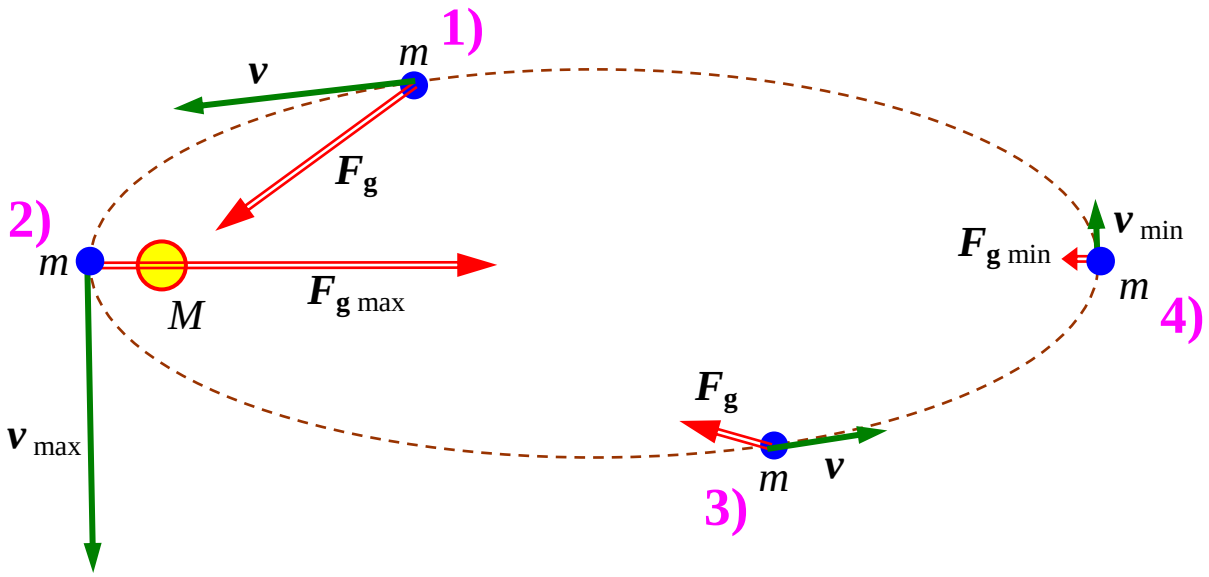
Pozn.: V reálném případě se těleso nejprve vynese na určitou parkovací trajektorii v jisté výšce nad zemským povrchem, a pak teprve je mu udělena patřičná úniková rychlost, jež je vždy menší než úniková rychlost z povrchu Země (2. kosmická rychlost). Snadno lze spočítat, že pro její velikost $v_ú$ musí platit

$$\boxed{v_ú(h) = \sqrt{\frac{2.\kappa.M}{R+h}}} \quad . \tag{5.25}$$

Navíc tato úniková rychlost není orientována kolmo k povrchu zemskému, se svislým směrem vždycky svírá určitý nenulový úhel. Pohyb takové unikající sondy pak ovšem není pohybem přímočarým; trajektorií pohybu je parabola, proto se také pro únikovou rychlost používá synonyma **„rychlost parabolická“**.

5.7.3 Pohyby oběžnic kolem centrálního tělesa

Tyto pohyby jsou obecně popsány třemi Keplerovými zákony (neuvažujeme-li vliv atmosféry a rušivé síly gravitačních polí třetích těles). Oběžnice se pohybují po kuželosečkách, jejichž rovina prochází těžištěm (středem) centrálního tělesa o hmotnosti M a v tomto bodě je i ohnisko (resp. jedno z ohnisek) příslušné trajektorie. Z dynamického hlediska je tento pohyb dán existencí přitažlivé gravitační síly $\boldsymbol{F}_\mathbf{g}$ působící mezi centrálním tělesem a oběžnicí (viz obr. 5.8, kde je rozebrán pohyb po eliptické trajektorii).



Obr. 5.8 – pohyb oběžnice kolem centrálního tělesa po eliptické trajektorii

Bod **1)** → oběžnice se přibližuje k centrálnímu tělesu, tečná složka gravitační síly je silou tažnou a **velikost rychlosti** v **oběžnice vzrůstá** (její pohyb je obecně zrychlený).

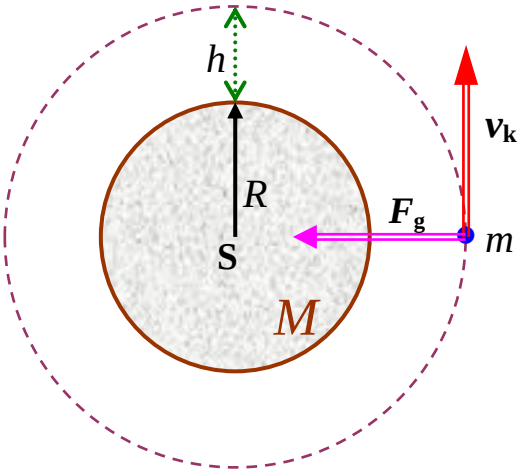
Bod **2)** → oběžnice je centrálnímu tělesu nejblíže (je v přísluní - perihéliu), gravitační síla je pouze silou dostředivou a **velikost rychlosti** v **dosahuje svého maxima**.

Bod **3)** → oběžnice se nyní od centrálního tělesa vzdaluje, tečná složka gravitační síly je silou brzdnou a **velikost rychlosti** v **oběžnice klesá** (její pohyb je obecně zpomalený).

Bod **4)** → oběžnice je od centrálního tělesa nejdále (je v odsluní - aféliu), gravitační síla je opět pouze silou dostředivou, ale **velikost rychlosti** v **dosahuje zde svého minima**.

Nejjednodušším typem pohybu oběžnice je pohyb po kružnici (viz následující obr. 5.9). Vracíme se tím vlastně k problematice studované z opačného úhlu pohledu ve **článku 5.3**.

Jak jsme si ukázali, je gravitační síla, kterou působí na oběžnici centrální těleso, v takovém případě pouze silou dostředivou. Rychlost oběžnice je stálá co do velikosti, její pohyb je tedy **rovnoměrný** (v_k = *konst.*).



Obr. 5.9 – kruhový pohyb oběžnice

Velikost této **kruhové rychlosti** v_k získáme právě na základě výše uvedené charakteristiky síly gravitační

$$\boldsymbol{F}_g = \boldsymbol{F}_d \quad .$$

Musí tedy nutně platit

$$\kappa \frac{M\,m}{(R+h)^2} = m\,\frac{v_k^{\,2}}{R+h} \quad ,$$

odkud už snadno dostaneme výraz pro kruhovou rychlost oběžnice ve výšce h nad povrchem centrálního tělesa

$$\boxed{v_k = \sqrt{\frac{\kappa . M}{R+h}}} \quad . \qquad (5.26)$$

Vidíme, že velikost této rychlosti s rostoucí výškou (vzdáleností od povrchu centrálního tělesa) h postupně klesá. Teoreticky největší hodnoty nabývá kruhová rychlost pro případ, že oběžnice se pohybuje v nulové výšce (doslova se dotýká povrchu centrálního tělesa). V ryze hypotetickém případě oběhu naší planety v nulové výšce se kruhová rychlost takové oběžnice Země nazývá **první kosmickou rychlostí** a její velikost je

$$v_I = \sqrt{\frac{\kappa . M}{R}} \doteq 7{,}9\ \mathrm{km.s^{-1}} \quad . \qquad (5.27)$$

Porovnáním vztahů (5.25) a (5.26) dostáváme vztah mezi parabolickou a kruhovou rychlostí (pro jedno a totéž centrální těleso a pro jednu a tutéž výšku h nad jeho povrchem). Platí, že

$$v_p = \sqrt{2}\,.\,v_k \quad . \qquad (5.28)$$

Pozn.: Pohyb oběžnic (umělých družic či měsíců) po kruhových trajektoriích kolem centrálního tělesa umožňuje – mimo jiné – též snadno určit hmotnost M centrálního tělesa. Díky kruhovému pohybu oběžnice tak můžeme „zvážit“ tělesa jako je Slunce, Země a jiné planety, jak ukazuje i následující příklad.

Příklad: Ze známé oběžné doby Měsíce kolem Země a jeho vzdálenosti od naší planety určete hmotnost Země.

I když Měsíc neobíhá po přesně kruhové trajektorii a Země není vůči němu úplně nehybná (poměr hmotností obou těles je zhruba 81 : 1 – pochopitelně ve prospěch Země a obě tělesa tak vlastně obíhají kolem společného hmotného středu), budeme pohyb naší přirozené družice řešit jako ideální pohyb kruhový.
V tabulkách nalezneme hodnoty potřebné pro náš další početní postup (uvědomte si, že to jsou hodnoty běžně experimentálně dostupné z astronomických měření):

→ střední vzdálenost středu Měsíce od středu Země ..... $r = 384\,405$ km ;

→ oběžná doba Měsíce ..... $T = 27{,}321\,661$ dne .

Kruhovou rychlost Měsíce vypočítáme snadno – jeho pohyb je rovnoměrný (!!!)

$$v_k = \frac{2\pi r}{T} \doteq 1\,023{,}2 \text{ m.s}^{-1} \quad .$$

A pak už zbývá jen určit hmotnost Země na základě vztahu (5.26), v němž ovšem v tomto případě položíme $R + h = r$. Platí

$$M_Z = \frac{r \,.\, v_k^{\,2}}{\kappa} \doteq 6{,}033.10^{24} \text{ kg} \quad .$$

Získaný výsledek se od tabulkové hodnoty liší jen o 0,95 %, což je vzhledem k výše uvedeným zjednodušením problému Země – Měsíc velice dobrá shoda. Ještě lepších (přesnějších) výsledků při tomto způsobu „vážení“ bychom dosáhli u hmotnějších centrálních těles, kdybychom k výpočtu použili parametry takových oběžnic, jež opisují skutečně kruhové trajektorie, jako je tomu například u mnohem „hmotnějšího“ Jupitera a jeho měsíců Io nebo Europa.

6. ELEKTRICKÉ POLE

6.1 Úvod

Následující studijní látka – „nauka o elektřině“ – je tou částí fyziky, jež se zabývá studiem elektrických jevů, nejrůznějšími ději probíhajícími v elektrických polích a také interakcemi (vzájemným působením) těchto polí s látkou.

Elektrickým polem nazýváme tu formu hmoty, jejímž prostřednictvím se uskutečňuje vzájemné působení **mezi elektricky nabitými tělesy nebo částicemi**. Je jednou ze dvou základních složek pole elektromagnetického. Zatímco však **jevy magnetické**, jež jsou rovněž spojeny se vzájemným působením nabitých objektů, vyžadují jejich pohyb a jsou závislé na jejich rychlosti ***v***, **jevy elektrické** naprosto ***nezávisí*** na tom, zda jsou nabité objekty v dané vztažné soustavě v klidu nebo v pohybu.

6.2 Elektrické pole ve vakuu

6.2.1 Elektrická síla, intenzita elektrického pole

Elektrické pole se projevuje vzájemným silovým působením elektricky nabitých částic nebo elektricky nabitých těles. Toto vzájemné působení vyjadřuje **elektrická síla** $\boldsymbol{F}_e$. Zdrojem elektrického pole jsou částice (nebo tělesa), jež nesou **elektrický náboj**. Pod tímto pojmem (používá se často i termín **náboj** bez přívlastku) chápeme jednak určitý **stav elektricky nabitého tělesa**, ale rovněž tak nazýváme **fyzikální veličinu**, jež tento stav charakterizuje.

Fyzikální veličina **elektrický náboj** se označuje písmenem Q (případně q). Jedná se o typicky skalární fyzikální veličinu, pro niž vždy platí:

elektrický náboj **je přímo úměrný velikosti elektrické síly** F_e,
jež na něj v elektrickém poli působí
a naopak velikost této síly je přímo úměrná náboji Q (resp. q).

Jak známo, elektrický náboj má **dvojí kvalitativní podstatu** – tuto skutečnost lze pak formálně vyjádřit dvojím možným znaménkem elektrického náboje. Náboj může být jak ***kladný***, tak i ***záporný*** nebo i ***nulový*** (což je případ nenabitých, elektricky neutrálních objektů).

V elektricky izolované soustavě pak platí důležitý základní zákon elektrostatiky – **zákon zachování elektrického náboje**:

> **„Součet elektrických nábojů všech objektů**
> (pozor – s ohledem na jejich znaménka !!!)
> **je v elektricky izolované soustavě konstantní“.**

Fyzikální jednotkou elektrického náboje v soustavě SI je jeden **coulomb**, značkou je písmeno C; přitom platí (viz pozdější definice fyzikální veličiny elektrický proud) 1 C = 1 A.s .

Typickou vlastností elektrického náboje je to, že má ***kvantový charakter***. Náboj jakékoliv nabité částice nebo tělesa je totiž vždy roven celočíselnému násobku elementárního náboje e, což je nejmenší dosud známý náboj, jež nesou mnohé elementární částice. Přitom:

→ kladný elementární náboj $+e$ byl přiřazen logicky hmotnějšímu protonu v jádře atomů,

→ záporný elementární náboj $-e$ nese mnohem „lehčí“ elektron kolem jádra atomu obíhající.

Elementární náboj je jednou ze základních fyzikálních konstant. Jeho hodnota

$$e = 1{,}602\ 177\ 33 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \quad .$$

Je-li ovšem absolutní hodnota náboje elektricky nabitého objektu dostatečně velká ($|Q| >> e$), lze kvantový charakter náboje zanedbat.

Pro zjednodušení některých dalších úvah zavádíme pojem tzv. **bodového náboje** Q (resp. q), což je vlastně náboj přiřazený hmotnému bodu nebo objektu, jehož rozměry lze vzhledem ke vzdálenostem jiných nabitých útvarů zanedbat. Je třeba si uvědomit, že se vždy jedná pouze o určitou fyzikální abstrakci, **reálné náboje totiž nikdy bodové nejsou !!!**

Jak již bylo řečeno výše, typickou **obecnou** charakteristikou silové interakce v elektrickém poli je to, že velikost elektrické síly F_e , jež v daném místě pole působí na určitý bodový náboj q , je vždy přímo úměrná velikosti tohoto náboje

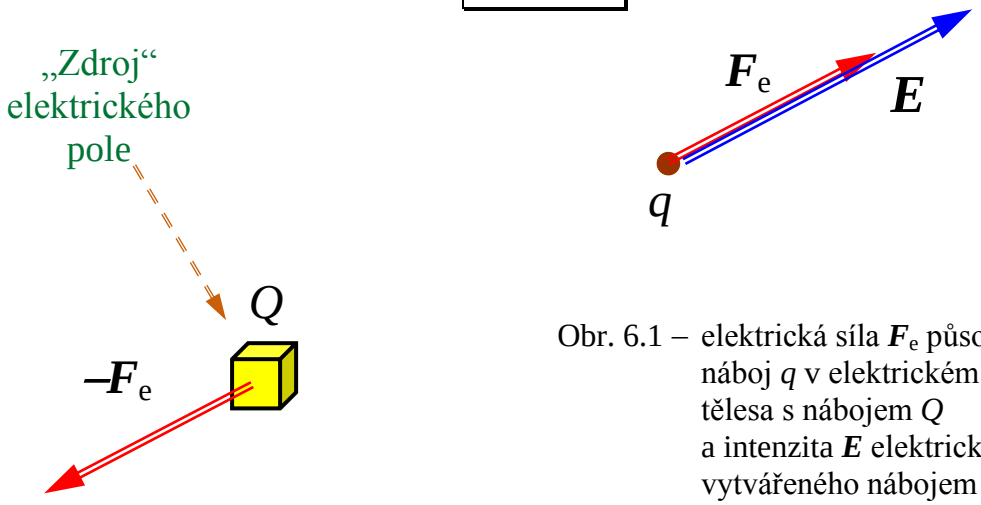
$$F_e \sim q \quad . \qquad (6.1)$$

Budeme-li velikost náboje q v pevně daném místě elektrického pole postupně měnit, bude se tím pádem pochopitelně případ od případu měnit i velikost elektrické síly F_e na něj působící. Elektrická síla sice charakterizuje konkrétní působení elektrického pole na určitý náboj, není však veličinou, jež by podávala jednoznačný popis elektrického pole v daném místě prostoru. Touto veličinou je až **intenzita elektrického pole *E***.

Její zavedení (definice) je velmi prosté a vlastně jen kopíruje postup provedený již jednou v poli gravitačním. Jestliže elektrická síla $\boldsymbol{F}_e$ na velikosti náboje q přímo úměrně závisí (6.1), musí být poměr těchto dvou veličin už na náboji q nezávislý a musí nutně udávat jednoznačnou silovou charakteristiku příslušného elektrického pole v daném místě prostoru.

Působí-li na bodový náboj q v jistém místě prostoru určitá elektrická síla $\boldsymbol{F}_e$, lze vektor intenzity $\boldsymbol{E}$ elektrického pole v tomto bodě prostoru určit vztahem

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}_e}{q} \quad . \tag{6.2}$$



Obr. 6.1 – elektrická síla $\boldsymbol{F}_e$ působící na bodový náboj q v elektrickém poli nabitého tělesa s nábojem Q a intenzita $\boldsymbol{E}$ elektrického pole vytvářeného nábojem Q

Situace znázorněná na obr. 6.1 představuje vzájemné silové působení dvou kladných nábojů. Přitom náboj Q krychle považujeme za náboj, jenž elektrické pole vytváří a jehož intenzitu $\boldsymbol{E}$ určujeme. Bodový náboj q pak představuje jakousi „sondu“ mapující silové účinky tohoto pole.

Intenzita definovaná vztahem (6.2)
je intenzitou elektrického pole objektu s nábojem Q.

Tím, že je intenzita $\boldsymbol{E}$ elektrického pole přímo odvozena od vektoru elektrické síly, musí být rovněž vektorovou fyzikální veličinou. Její fyzikální význam spočívá v tom, že skutečně zcela jednoznačně charakterizuje v jednotlivých bodech prostoru silové účinky daného elektrického pole (intenzitu lze opravdu chápat jako veličinu charakterizující „velikost“ či „mohutnost“ příslušného elektrického pole v daném bodě a současně i jako veličinu charakterizující směr silového působení v příslušném elektrickém poli).

Fyzikální jednotkou vektoru intenzity elektrického pole je jeden $\mathrm{N.C^{-1}}$, běžně se však používá (jak vyplývá z dalších fyzikálních zákonitostí) jednotky jeden $\mathrm{V.m^{-1}}$.

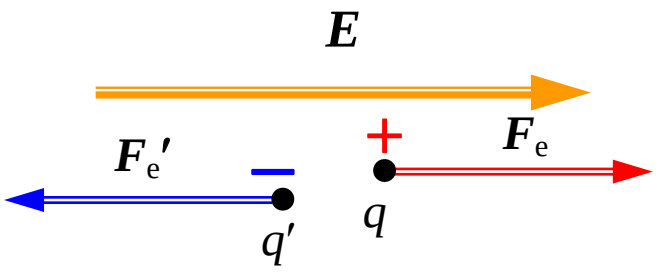
Jestliže budeme chtít zpětně určit, jak velkou elektrickou silou $\boldsymbol{F}_e$ působí dané elektrické pole na určitý náboj q , jenž se nachází v jistém místě prostoru v tomto poli, stačí jednoduše spočítat výraz

$$\boldsymbol{F}_e = q\,.\,\boldsymbol{E} \quad , \tag{6.3}$$

kde $\boldsymbol{E}$ je intenzita elektrického pole v místě, kde je přítomen náboj q.

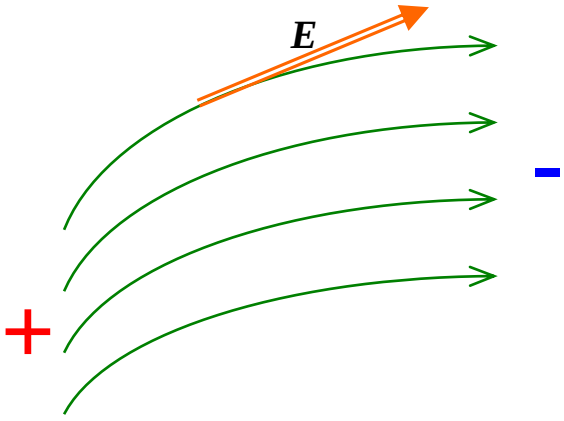
Přitom ale musí nutně platit:

Je-li náboj q kladný, mají síla $\boldsymbol{F}_e$ a intenzita $\boldsymbol{E}$ stejný směr, bude-li však náboj q záporný (např. elektron), bude směr těchto dvou vektorů opačný (viz následující obr. 6.2) !!!



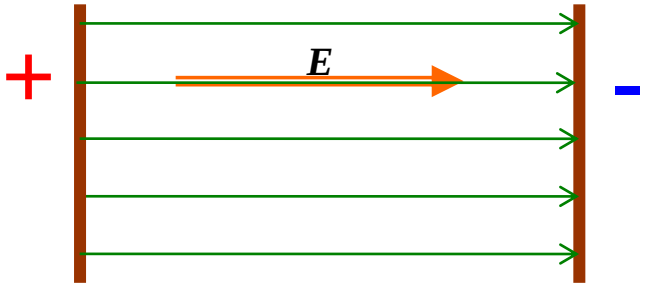
Obr. 6.2 – intenzita $\boldsymbol{E}$ a elektrická síla $\boldsymbol{F}_e$

Ke znázornění elektrického pole se používá tzv. **siločar elektrického pole** (krátce **elektrických siločar**). Jsou to orientované čáry (křivky), přičemž platí, že tečna v každém bodě siločáry má ***směr*** intenzity elektrického pole $\boldsymbol{E}$ v tomto bodě. Orientace siločáry se vyznačuje šipkou; siločára „směřuje“ vždy od kladně nabitých objektů k záporným. Hustota siločar (t.j. jejich počet procházejících kolmo jednotkovou plochou) je úměrná ***velikosti*** intenzity elektrického pole E (viz obr. 6.3 a)).



Obr. 6.3 a) – elektrické siločáry nehomogenního pole

Zvláštním případem je pak **homogenní elektrické pole**. To je takové elektrické pole, jehož vektor intenzity $\boldsymbol{E}$ je ve všech bodech prostoru stejný co do velikosti i co do směru. Tím pádem musí být siločáry homogenního elektrického pole rovnoběžné, stejně vzdálené a souhlasně orientované přímky, polopřímky, či úsečky, jak ukazuje i vedlejší obr. 6.3 b).



Obr. 6.3 b) – siločáry homogenního elektrického pole

Příklad:
Na jak dlouhé dráze a za jaký čas získá elektron rychlost 10^6 m.s^{-1}, je-li urychlován homogenním elektrickým polem intenzity 300 V.m^{-1}, jestliže byl původně v klidu? Klidová hmotnost elektronu je 9,1.10^{-31} kg , tato částice je nositelem elementárního náboje ($q = e \doteq 1{,}6.10^{-19}$ C).

V elektrickém poli intenzity o velikosti E působí na náboj q elektrická síla velikosti

$F_e = q \,.\, E = 1{,}6.10^{-19}\ \mathrm{C} \,.\, 300\ \mathrm{V.m^{-1}} = 4{,}4.10^{-17}\ \mathrm{N}$.

Ta podle druhého Newtonova pohybového zákona (zákona síly) udílí částici o hmotnosti m zrychlení

$$a = \frac{F_e}{m} = \frac{4{,}8.10^{-17}\ \mathrm{N}}{9{,}1.10^{-31}\ \mathrm{kg}} \doteq 5{,}3.10^{13}\ \mathrm{m.s^{-2}} \quad .$$

Vidíme, že v homogenním elektrickém poli působí na náboj konstantní elektrická síla, jež udílí částici nesoucí náboj q konstantní zrychlení $\Rightarrow$ jelikož byla částice (v našem případě elektron) původně v klidu, bude její pohyb **přímočarý** (rovnoběžně s vektorem intenzity $\boldsymbol{E}$ elektrického pole, ale opačným směrem) a navíc **rovnoměrně zrychlený !!!**

K výpočtu dráhy a času tedy použijeme známých vztahů pro tento typ pohybu

$$t = \frac{v}{a} = \frac{5.10^6\ \mathrm{m.s^{-1}}}{5{,}3.10^{13}\ \mathrm{m.s^{-2}}} \doteq 9{,}4.10^{-8}\ \mathrm{s} = 94\ \mathrm{ns} \quad ,$$

$$s = \frac{1}{2} a.t^2 = \frac{1}{2} \,.\, 5{,}3.\ 10^{13}\ \mathrm{m.s^{-2}} \,.\, (9{,}4.10^{-8}\ \mathrm{s})^2 \doteq 0{,}23\ \mathrm{m} = 23\ \mathrm{cm} \quad .$$

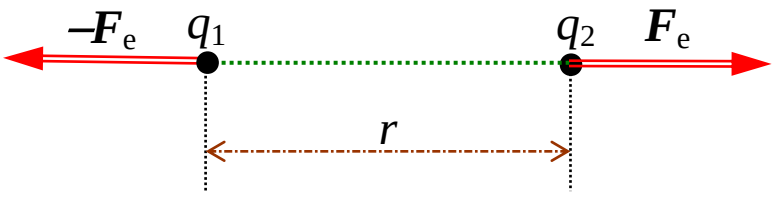
Odpověď: Elektron získá uvedenou rychlost přibližně za 94 ns na dráze zhruba 23 cm dlouhé.

6.2.2 Coulombův zákon

Coulombův zákon je jedním ze základních zákonů elektrostatiky. Vyjadřuje číselně velikost vzájemného silového působení mezi dvěma

bodovými náboji

(tedy ve speciálním případě nábojů vázaných na hmotné body **!!!**), jak ukazuje vedlejší obr. 6.4.



Obr. 6.4 – elektrická síla působící mezi dvěma bodovými náboji

Je-li přitom známa vzájemná vzdálenost r mezi oběma náboji q_1 a q_2 rovna, bude mít elektrická síla F_e ***velikost*** danou vztahem

$$F_e = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad , \qquad (6.4)$$

kde konstanta $k = k_o = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \doteq 9.10^9\ \mathrm{N.m^2.C^{-2}}$, je-li mezi náboji vakuum,

$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}$, je-li mezi nimi dielektrikum s relativní permitivitou $\varepsilon_r > 1$.

V dielektriku (tj. v nevodivém prostředí) je totiž silové působení mezi týmiž náboji v téže vzdálenosti vždy menší než ve vakuu. Objasnění tohoto jevu bude obsahem následující kapitoly **„Elektrické pole v látkách“**.

Skalární konstanta ε_o se nazývá **permitivita vakua**. Je to jedna ze základních fyzikálních konstant a její hodnota je v soustavě SI

$$\varepsilon_o = 8{,}854\,187 \,.\, 10^{-12}\ \mathrm{m^{-3}.kg^{-1}.s^4.A^2} \quad .$$

Součin $\varepsilon_o \,.\, \varepsilon_r = \varepsilon$ pak udává **permitivitu** daného **dielektrika**. Hodnoty relativních (poměrných) permitivit ε_r jsou tabelovány.

Pro ***směr*** působící elektrické síly pak platí dobře známá obecná pravidla:

Elektrická síla $\boldsymbol{F}_e$ je u souhlasných nábojů q_1 a q_2 (tedy u nábojů stejných znamének) vždy ***odpudivá***, mají-li náboje q_1 a q_2 opačná znaménka, je elektrická síla $\boldsymbol{F}_e$ vždy ***přitažlivá***. Silové působení obou nábojů je přitom vzájemné, elektrické síly obecně (a tudíž i coulombovské mezi bodovými náboji) jsou typickým příkladem sil akce a reakce.

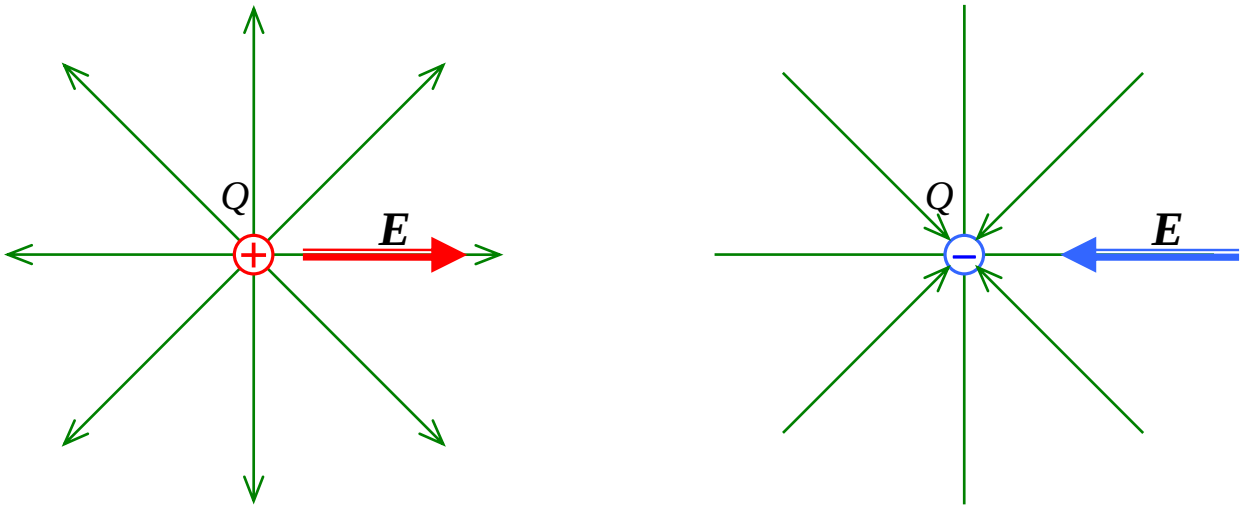
Pozn.: Počítáme-li **pouze velikost** elektrické síly, dosazujeme do Coulombova zákona (6.4) absolutní hodnoty obou nábojů, tedy bez ohledu na znaménka. Velikost jakéhokoli vektoru (elektrickou sílu nevyjímaje) je, jak známo, totiž vždy kladná **!!!**

Coulombův zákon platí přesně pro bodové náboje, ale jeho platnost lze rozšířit např. i na silové působení mezi nabitými tělesy tvaru koule, jež vykazují středově symetrické rozložení elektrického náboje. Vzdálenost r ve jmenovateli vztahu (6.4) je pak rovna vzdálenosti středů obou koulí. **!!**

Tím, že známe Coulombův zákon, bude pro nás snadnou úlohou určit intenzitu $\boldsymbol{E}$ elektrického pole bodového náboje Q. Bude-li se v elektrickém poli tohoto náboje nacházet ve vzdálenosti r jiný bodový náboj q, dostaneme na základě definičního vztahu (6.2), že ***velikost*** intenzity $\boldsymbol{E}$ elektrického pole bodového náboje Q je ve vzdálenosti r od tohoto náboje dána výrazem

$$E = \frac{F_e}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad . \qquad (6.5)$$

Elektrické pole bodového náboje Q má **centrální (radiální) charakter**, vektor intenzity $\boldsymbol{E}$ směřuje v případě *kladného* náboje Q od tohoto náboje, je-li bodový náboj Q *záporný*, směřuje vektor $\boldsymbol{E}$ k tomuto náboji (viz obr. 6.5).



Obr. 6.5 – elektrické pole bodového náboje

V případě elektrického pole tvořeného více bodovými náboji Q_1, Q_2, ... , Q_n uplatníme **princip superpozice**. V daném bodě prostoru bude intenzita $\boldsymbol{E}$ výsledného elektrického pole dána **vektorovým součtem** intenzit $\boldsymbol{E}_i$ elektrických polí vyvolaných jednotlivými náboji (samozřejmě, že v témž bodě prostoru). Platí

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3 + \ldots\ldots + \boldsymbol{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i \quad . \tag{6.6}$$

Tento přístup můžeme ale uplatnit i v případech, kdy počítáme intenzity polí vytvářených náboji, jež nejsou bodové. Náboj Q si ale v takovém případě můžeme „rozdělit“ na nekonečně malé bodové náboje $\mathrm{d}Q$, a pak už jen aplikujeme zmíněný princip – sčítáme opět vektorově nekonečně mnoho nekonečně malých intenzit $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$. Tím pádem ale namísto prostého součtu (6.6) musíme provést integraci

$$\boldsymbol{E} = \int_V \mathrm{d}\boldsymbol{E} \tag{6.7}$$

přes celý objem nabitého tělesa, případně přes celou plochu jeho povrchu – záleží to jen na tom, jak je náboj v tělese rozmístěn.

Poznámka na závěr: Stejně jako Coulombův zákon lze i výraz (6.5) pro intenzitu pole bodového náboje použít pro nabité koule. V případě vodivé koule se náboj rozmístí po jejím povrchu rovnoměrně „sám od sebe“. Vztah (6.5) ale bude tím pádem samozřejmě platit pouze pro $r \geq R$, kde R je poloměr nabité koule.

6.2.3 Gaussova věta

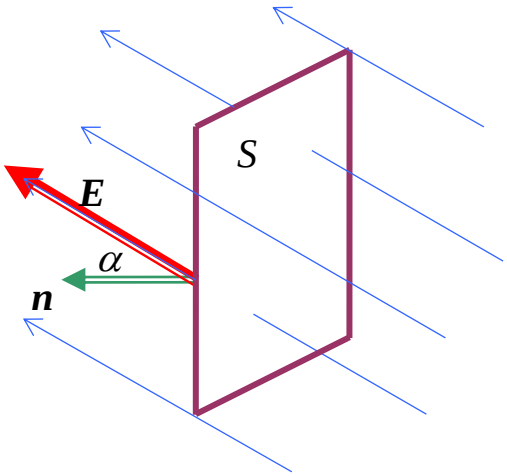
Gaussova věta (někdy nazývaná též **zákon celkového náboje**) je podobně jako Coulombův zákon jedním ze základních vztahů teorie elektromagnetického pole. Kromě jiného umožňuje např. vypočítat elektrické intenzity polí v případech, kdy by použití jiných metod (např. pomocí vztahu (6.7)) bylo pracné a zdlouhavé.

V **článku 6.2.1** jsme definovali elektrickou siločáru, jako **myšlenou** orientovanou křivku, pro níž platí, že tečna v každém jejím bodě má vždy ***směr*** vektoru intenzity $\boldsymbol{E}$ elektrického pole v tomto bodě. Navíc hustota siločar (t.j. jejich počet kolmo procházejících jednotkovou plochou) je úměrná ***velikosti*** vektoru intenzity E elektrického pole. Elektrické siločáry vycházejí z kladných nábojů a na záporných nábojích končí. Je-li elektrické pole tvořeno pouze kladným nábojem, začínají siločáry na něm a vedou do nekonečna; v případě elektrických polí vytvářených jen náboji zápornými vedou siločáry z nekonečna a končí na těchto nábojích.

Zavedení pojmu elektrické siločáry pak umožňuje definovat další důležitou fyzikální veličinu a tou je **tok vektoru intenzity elektrického pole** libovolnou **orientovanou plochou** S. Tato skalární fyzikální veličina označovaná Φ_e vlastně formálně představuje celkový počet siločar, jež v daném elektrickém poli procházejí zvolenou orientovanou plochou.

V jednoduchých případech, jež ale nastávají **pouze v homogenních elektrických polích** (viz následující obr. 6.6), je tok intenzity Φ_e dán prostým součinem

$$\Phi_e = E\,S\,\cos\alpha \quad . \tag{6.8}$$



Obr. 6.6 – tok vektoru intenzity homogenního elektrického pole

Přitom úhel α je úhel, jenž měříme vždy mezi vektorem intenzity $\boldsymbol{E}$ a **kolmicí** na plochu S (tedy vůči normále $\boldsymbol{n}$ plochy S). Uvedený vztah lze proto také jednoduše vyjádřit pomocí skalárního součinu

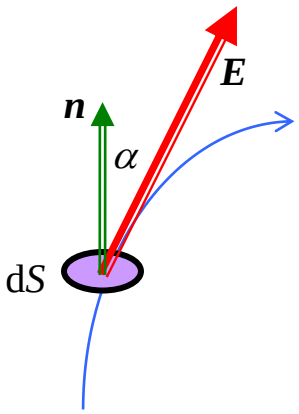
$$\Phi_e = \boldsymbol{E}.\boldsymbol{S} \quad , \tag{6.9}$$

přičemž vektor $\boldsymbol{S} = S.\boldsymbol{n}$ (neboť velikost normálového vektoru $\boldsymbol{n}$ je rovna jedné!).

V případech, kdy elektrické pole **není homogenní** (viz obr. 6.7 na následující straně), je nutno celou plochu S rozdělit na nekonečně malé elementy dS a spočítat jednotlivé příspěvky toku dΦ_e. Celkový tok Φ_e pak získáme integrací těchto příspěvků přes celou plochu S

$$\Phi_e = \int_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} \quad . \qquad (6.10)$$

Jednotkou toku intenzity elektrického pole v soustavě SI je jeden V.m.



Obr. 6.7 – tok vektoru intenzity nehomogenního elektrického pole

Důležitý závěr získáme, když budeme počítat, jak velký je tok vektoru intenzity elektrického pole, jenž prochází libovolnou **uzavřenou** plochou S, přičemž se uvnitř této plochy nachází jistý náboj (nebo náboje) o celkové velikosti Q_{celk}.

Přitom nebude záležet na tom, zda jsou náboje uvnitř plochy bodové či ne. Podstatné je, aby zmíněná plocha byla uzavřená. Jen v tom případě jí projdou všechny siločáry elektrického pole, jež je náboji o celkové velikosti Q_{celk} vytvářeno (ať už z jednotlivých nábojů vycházejí nebo k nim vedou). Lze dokázat (matematickým postupem, jenž můžete najít v literatuře a jenž na tomto místě provádět nebudeme), že pro tento celkový tok platí

$$\Phi_e = \oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q_{celk}}{\varepsilon_o} \quad . \qquad (6.11)$$

Uvedená rovnice je vlastně obecným matematickým vyjádřením **Gaussovy věty**:

Tok intenzity elektrického pole Φ_e libovolnou, ale *uzavřenou* **!!!**
vně orientovanou plochou S **je přímo úměrný celkovému náboji** Q_{celk},
jenž se nachází v oblasti ohraničené právě touto plochou.

Pozn.: Celkový náboj Q_{celk} uzavřený uvnitř plochy S může mít ve své podstatě dvojí kvalitativně odlišný charakter:

- **volný náboj** – to je náboj volných nabitých částic; označujeme jej Q bez indexu;
- **vázaný náboj** $Q_{váz}$ – vzniká polarizací látky (podstata tohoto fyzikálního jevu bude vysvětlena později v další kapitole); tento náboj je vázán na mikrostrukturu látky, tedy na nepohyblivé částice (molekuly dané látky).

Pro **celkový náboj** Q_{celk} pak musí logicky platit, že $Q_{celk} = Q + Q_{váz}$.

Gaussova věta vlastně říká, že elektrický náboj je zdrojem elektrického pole, siločáry začínají na objektech s kladnými náboji a končí na záporně nabitých objektech. Pole tohoto charakteru se obecně nazývá **elektrické pole zřídlové** na rozdíl od elektrického pole nezřídlového (neboli vírového), jež vzniká elektromagnetickou indukcí a jehož siločáry jsou uzavřené orientované křivky.

Jednou z možných aplikací Gaussovy věty je již zmíněný výpočet intenzity $\boldsymbol{E}$ elektrických polí různých nabitých objektů. Výhodné je její použití v případech, kdy se jedná o pole rovnoměrně nabitých geometricky pravidelných těles. Taková elektrická pole musejí logicky vykazovat jistou míru symetrie a většinou není obtížné v těchto případech určit směr vektoru elektrické intenzity $\boldsymbol{E}$ v libovolném bodě prostoru. Této znalosti pak využíváme při volbě **uzavřené Gaussovy plochy**.

Při její konstrukci se snažíme o to (pokud je to samozřejmě možné), aby byl vektor elektrické intenzity $\boldsymbol{E}$ kolmý k celé ploše nebo alespoň k její části, a navíc aby měl ve všech bodech takové plochy konstantní velikost E. Pak bude ve vzorci (6.8) pro výpočet toku Φ_e elektrické intenzity $\cos \alpha = 1$ a hlavně, namísto integrace stačí vypočítat hodnotu tohoto toku prostým součinem velikosti intenzity E a obsahu plochy S

$$\Phi_e = E \,.\, S \quad . \tag{6.12}$$

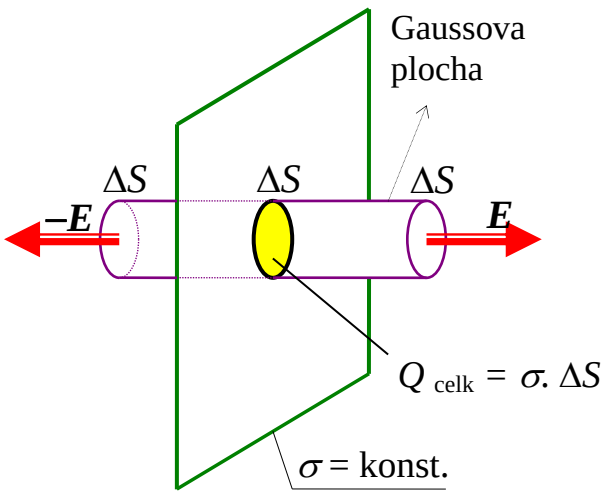
Druhou možnost zjednodušení výpočtu při aplikaci Gaussovy věty nabízí taková volba uzavřené plochy, kdy v některé její části leží vektor elektrické intenzity $\boldsymbol{E}$ v rovině této plochy – tok Φ_e je pak touto částí Gaussovy plochy evidentně nulový.

Typickým příkladem použití Gaussovy věty je výpočet intenzity elektrického **pole nekonečně velké rovnoměrně nabité roviny** – výsledek se nám bude dobře hodit u deskových (rovinných) kondenzátorů.

Na rovnoměrně nabité nekonečně velké rovině je konstantní plošná hustota náboje

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S} \quad , \tag{6.13}$$

kde ΔQ je náboj na libovolně velké části roviny o obsahu plochy ΔS.



Zvolme si na rovině za plošku ΔS kruh a Gaussovu uzavřenou plochu vytvořme jako válcovou plochu, jejíž podstavy jsou rovnoběžné s nabitou rovinou a stejně velké jako ploška ΔS. Plášť tohoto válce pak prochází obvodem kruhové plošky ΔS (viz vedlejší obr. 6.8).

Obr. 6.8 – elektrické pole nekonečně velké rovnoměrně nabité roviny

Celkový náboj Q_{celk} uzavřený uvnitř Gaussovy plochy je právě náboj na zvolené plošce ΔS a má velikost

$$Q_{celk} = \sigma . \Delta S \quad .$$

Jelikož je rovnoměrně nabitá rovina nekonečně velká, musí logicky vektor intenzity $\boldsymbol{E}$ směřovat kolmo od této roviny (bude-li nabita kladně). Tudíž elektrické siločáry tohoto pole budou rovnoběžné s pláštěm válce a kolmé k jeho podstavám.

Tok intenzity elektrického pole Φ_e pláštěm válce je tedy evidentně nulový, a proto stačí spočítat jen jeho hodnotu toku v podstavách válcové Gaussovy plochy.

Protože jsou podstavy této válcové plochy rovnoběžné s nekonečnou nabitou rovinou, musí v nich být velikost intenzity elektrického pole konstantní a bude pro ni platit

$$\Phi_e = E . \Delta S + E . \Delta S = 2 E \Delta S \quad .$$

Po dosazení do Gaussovy věty (6.12) pak dostáváme

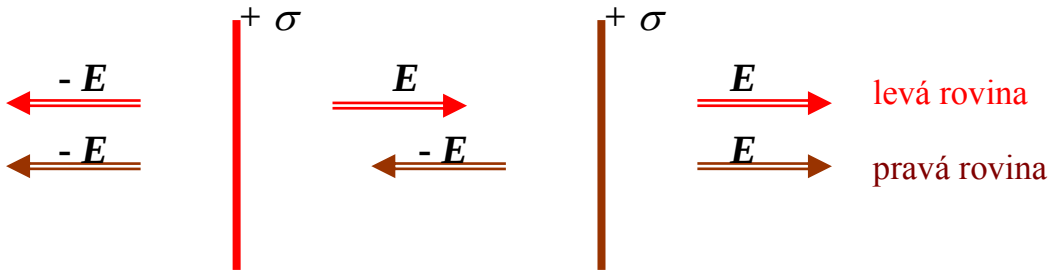
$$\Phi_e = 2 E \Delta S = \frac{Q_{celk}}{\varepsilon_o} = \frac{\sigma . \Delta S}{\varepsilon_o} \quad .$$

Poslední rovnici vydělíme velikostí plochy ΔS a hledaná intenzita elektrického pole nekonečně velké rovnoměrně nabité roviny s plošnou hustotou elektrického náboje σ = konst. má velikost

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}} \quad . \qquad (6.14)$$

Jak je z uvedeného výsledku patrné, jedná se o **elektrické pole homogenní**, velikost vektoru elektrické intenzity E nezávisí na vzdálenosti od rovnoměrně nabité roviny.

Získaný výsledek lze dále použít při jednoduchém výpočtu elektrického pole dvou rovnoběžných nekonečně velkých rovnoměrně nabitých rovin. Výsledné elektrické pole vznikne superpozicí polí obou rovin. Předpokládejme, že obě roviny budou mít navíc stejnou plošnou hustotu náboje σ.

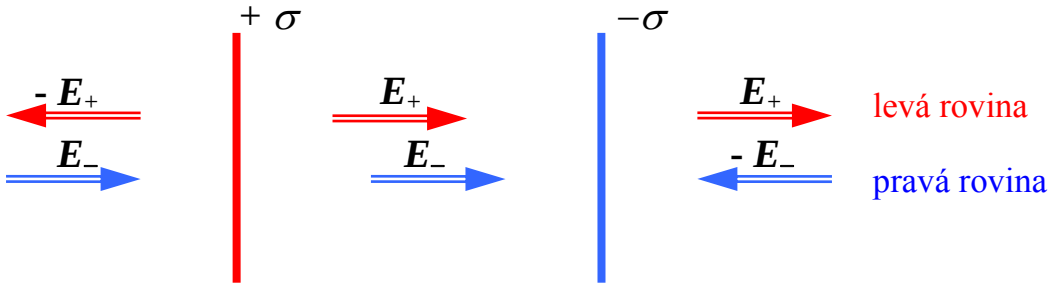


Obr. 6.9 – elektrické pole dvou nekonečných souhlasně nabitých rovin

Na předcházejícím obr. 6.9 je znázorněn případ, kdy jsou obě roviny nabity souhlasným (zde kladným) nábojem. Vidíme, že v části prostoru mezi oběma rovinami bude intenzita $\boldsymbol{E}$ výsledného elektrického pole nulová, vně obou rovin pak bude **velikost** intenzity E rovna součtu velikostí intenzit obou polí

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \quad . \tag{6.15}$$



Obr. 6.10 – elektrické pole dvou nekonečných nesouhlasně nabitých rovin

Na obr. 6.10 je pak znázorněn druhý případ, kdy obě roviny jsou nabity opačným nábojem. Zde naopak bude intenzita $\boldsymbol{E}$ výsledného elektrického pole nulová vně obou rovin, zatímco v části prostoru mezi nimi bude její velikost E rovna součtu velikostí intenzit obou polí, tedy

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \quad . \tag{6.16}$$

Elektrické pole mezi dvěma nesouhlasně nabitými rovinami je tedy homogenní a vektor intenzity $\boldsymbol{E}$ (a tudíž i siločáry tohoto pole) jsou kolmé k oběma rovinám. Vně obou rovin pak elektrické pole neexistuje.

Tento závěr lze vyslovit i pro elektrické pole mezi dvěma nesouhlasně nabitými rovinami konečných rozměrů (např. právě mezi deskami **rovinného kondenzátoru**), pokud je splněna podmínka, že odmocnina z obsahu plochy je podstatně větší, než je vzdálenost obou desek

$$\sqrt{S} >> d \quad .$$

I v takovém případě je elektrické pole mezi deskami možno považovat za homogenní prakticky v celém objemu; k zanedbatelnému rozptylu siločar (a tedy k nepatrným nehomogenitám pole) dochází pouze na okrajích desek.

6.2.4 Práce konaná v elektrickém poli, potenciál elektrického pole, napětí

V elektrickém poli s intenzitou $\boldsymbol{E}$ působí na každý náboj q elektrická síla

$$\boldsymbol{F}_e = Q.\boldsymbol{E} \quad . \qquad \text{viz (6.3)}$$

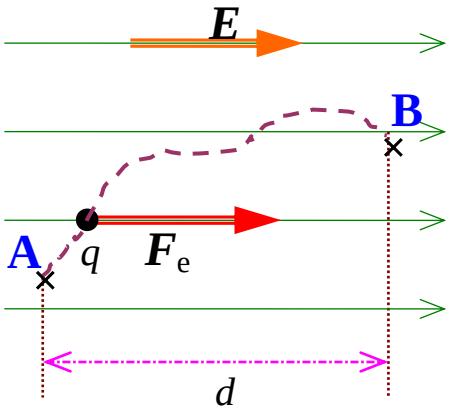
Díky tomuto silovému působení se náboj může v elektrickém poli přemísťovat – pak říkáme, že elektrická síla koná práci (tuto práci pak označujeme obvykle jako W_e). Náboj lze ovšem v elektrickém poli také přenášet pomocí nějaké vnější síly, jež působení síly elektrické překonává; pak práci (v takovém případě značenou obvyklým W bez indexu) koná právě tato vnější síla.

Zabývejme se nadále jen prací W_e konanou silami elektrického pole samotného. Má to své ryze praktické důvody matematického rázu, ale rozhodující je v tomto případě fyzikální hledisko → s prací těchto sil přeci setkáváme při vedení elektrického proudu,

Podívejme se na jednoduchý případ, když práci W_e bude konat stálá elektrická síla v homogenním elektrickém poli (intenzity $\boldsymbol{E}$ = ***konst.***). Velikost elektrické práce vykonané při přenášení náboje q z bodu **A** do bodu **B** bude v takovém případě dána vztahem

$$W_e = F_e.d = q.E.d \quad , \qquad (6.17)$$

kde d je vzdálenost mezi body **A** a **B** **naměřená ve směru siločáry** příslušného homogenního pole (viz následující obr. 6.11).



Obr. 6.11 – práce elektrické síly v homogenním elektrickém poli

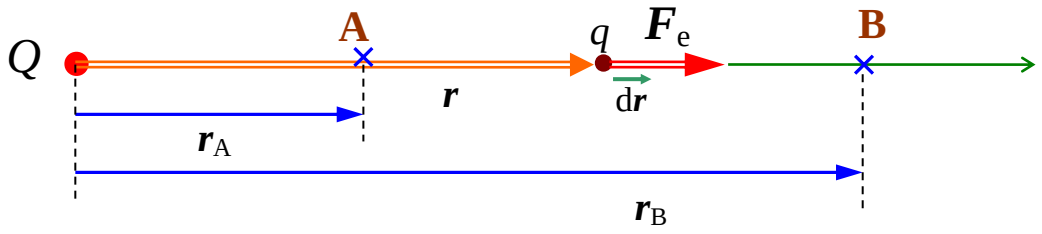
Lze celkem snadno dokázat, že vůbec nezáleží na tvaru trajektorie, po níž je mezi body **A** a **B** náboj q přenášen. Ve výsledku se pokaždé objeví pouze zmíněná vzdálenost d. Rozhodující je pouze poloha obou bodů v elektrickém poli.

V obecném případě, v nehomogenním elektrickém poli, je nutné při výpočtu elektrické práce W_e provést integraci po příslušné orientované dráze ℓ z bodu **A** do bodu **B**

$$W_e = \int_{(\ell)} \boldsymbol{F}_e \mathrm{d}\boldsymbol{r} = q \int_{(\ell)} \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad . \qquad (6.18)$$

Takovou situací je například konání práce při přenášení bodového náboje q v radiálním elektrickém poli „centrálního“ bodového náboje Q. Předpokládejme navíc, že znaménka obou nábojů jsou souhlasná a k tomu kladná, mezi náboji tedy působí odpudivá elektrická síla $\boldsymbol{F}_e$.

Náboj Q pro nás tedy bude nábojem, jenž v prostoru vytváří elektrické pole intenzity $\boldsymbol{E}$, náboj q bude tím nábojem, jenž bude přemisťován odpudivou elektrickou silou $\boldsymbol{F}_e$, která bude přitom konat práci W_e. Pro jednoduchost vyšetřujme případ, kdy je náboj q přemísťován ve směru elektrické siločáry (viz následující obr. 6.12).



Obr. 6.12 – práce elektrické síly v radiálním elektrickém poli bodového náboje Q

Náboj Q umístíme do počátku a přesun náboje q tak provádí elektrická síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{e}$ z bodu **A** určeného polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_\mathrm{A}$ do bodu **B**, jehož polohový vektor je $\boldsymbol{r}_\mathrm{B}$. V libovolném bodě mezi těmito dvěma místy, jehož polohový vektor je $\boldsymbol{r}$, bude na náboj q působit odpudivá elektrická síla o velikosti

$$F_\mathrm{e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\mathrm{o}} \cdot \frac{Q\,q}{r^2} \quad .$$

Při přesunu náboje q z bodu **A** do bodu **B** vykoná tato síla práci

$$W_\mathrm{e} = \int_{r_\mathrm{A}}^{r_\mathrm{B}} \boldsymbol{F}_\mathrm{e}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad .$$

Jelikož je skalární součin $\boldsymbol{F}_\mathrm{e}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ roven součinu velikostí těchto dvou vektorů $(\boldsymbol{F}_\mathrm{e}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = F_\mathrm{e}\,\mathrm{d}r)$, neboť oba vektory mají souhlasný směr, můžeme integrál snadno upravit a následně vypočítat:

$$W_\mathrm{e} = \int_{r_\mathrm{A}}^{r_\mathrm{B}} F_\mathrm{e}\,\mathrm{d}r = \int_{r_\mathrm{A}}^{r_\mathrm{B}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_\mathrm{o}} \cdot \frac{Q\,q}{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{Q\,q}{4\pi\varepsilon_\mathrm{o}} \cdot \int_{r_\mathrm{A}}^{r_\mathrm{B}} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q\,q}{4\pi\varepsilon_\mathrm{o}} \cdot \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_\mathrm{A}}^{r_\mathrm{B}} = \frac{Q\,q}{4\pi\varepsilon_\mathrm{o}} \cdot \left(\frac{1}{r_\mathrm{A}} - \frac{1}{r_\mathrm{B}}\right) \quad .$$

Elektrická práce vykonaná elektrickou silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{e}$ při přesunu bodového náboje q v radiálním poli jiného bodového náboje Q je tedy vyjádřena vztahem

$$\boxed{W_\mathrm{e} = \frac{Q\,q}{4\pi\varepsilon_\mathrm{o}} \cdot \left(\frac{1}{r_\mathrm{A}} - \frac{1}{r_\mathrm{B}}\right)} \quad . \qquad (6.19)$$

I když byl tento vzorec odvozen pouze pro případ posunu náboje q ve směru elektrické siločáry, lze dokázat, že naprosto stejný vztah bychom získali při jakémkoli posunu bodového náboje q po jakékoliv křivce mezi dvěma body **A** a **B** v prostoru (veličiny r_A a r_B pak udávají příslušné vzdálenosti – tj. velikosti polohových vektorů bodu **A** a bodu **B**).

Dva právě provedené výpočty elektrické práce W_e konané v elektrickém poli potvrzují dvě základní charakteristiky této fyzikální veličiny:

1) práce W_e konaná v elektrickém poli při přenášení náboje q je vždy přímo úměrná velikosti přenášeného náboje

$$W_e \sim q \quad ;$$

2) práce W_e konaná v elektrickém poli mezi dvěma body **A** a **B** naprosto nezávisí na tvaru trajektorie, po níž je danou elektrickou silou konána, ale pouze a jedině na poloze výchozího a koncového bodu v příslušném elektrickém poli.

Elektrická síla $\boldsymbol{F}_e$ je typickým příkladem **konzervativní síly** a **elektrické pole je polem konzervativním**.

Přímým důsledkem této skutečnosti je, že práce elektrické síly vykonaná **po jakékoliv uzavřené křivce** (t.j. z bodu **A** zpět do bodu **A**) musí být evidentně **nulová**

$$W_e = \oint_{(\ell)} \boldsymbol{F}_e \mathrm{d}\boldsymbol{r} = q \oint_{(\ell)} \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0\ \mathrm{J} \quad . \tag{6.20}$$

To, že je elektrické pole polem konzervativním má další důsledky. V takovém případě je možné nabitým objektům přítomným v tomto poli definovat (přiřadit) jednoznačně hodnotu jejich polohové (potenciální) energie E_{pe} a pro popis pole samotného pak lze zavést novou fyzikální veličinu potenciál φ_e elektrického pole v daném místě prostoru a dál i elektrické napětí U mezi dvěma body v elektrickém poli.

Jak je nám známo už z mechaniky hmotného bodu, práce konzervativní síly vykonaná na určitém objektu je vždy rovna změně jeho polohové energie. Tedy i práce W_e vykonaná konzervativní elektrickou silou $\boldsymbol{F}_e$ musí být rovna **změně potenciální (polohové) energie ΔE_{pe} přenášeného náboje q v elektrickém poli intenzity $\boldsymbol{E}$.**

Např.: Vraťme se ještě k předcházejícímu příkladu s polem bodového náboje Q, v němž je konána práce elektrickou silou při přenášení bodového náboje q. Formální úpravou zídskáváme

$$W_e = \frac{Q\,q}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right) = \frac{Q\,q}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{r_A} - \frac{Q\,q}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{r_B} = \Delta E_{pe} = E_{pe}(\mathrm{A}) - E_{pe}(\mathrm{B}) \quad ,$$

kde $E_{pe}(\mathrm{A})$ a $E_{pe}(\mathrm{B})$ jsou příslušné potenciální energie bodového náboje q v bodech **A** a **B** daného elektrostatického pole.

V libovolném bodě prostoru (v libovolném bodě elektrostatického pole bodového náboje Q), jenž je od náboje Q ve vzdálenosti r pak bude **potenciální energie bodového náboje q** dána výrazem

$$E_{pe} = \frac{Q\,q}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{r} \quad . \tag{6.21}$$

Jak je z tohoto vztahu patrné, hodnota potenciální energie E_{pe} se s rostoucí vzdáleností náboje q od náboje Q zmenšuje nepřímo úměrně (samozřejmě pouze v případě souhlasných znamének obou bodových nábojù!) a v nekonečnu nabývá nulové hodnoty.

Z výsledku (6.21) dále vyplývá, že polohová energie E_{pe} náboje q závisí přímo úměrně na jeho velikosti. Tento naprosto logický závěr ale platí obecně pro všechna elektrická pole.

Jestliže je potenciální energie E_{pe} určitého náboje q v jistém elektrickém poli na velikosti samotného náboje q přímo úměrně závislá, musí být poměr těchto dvou veličin

$$\frac{E_{pe}}{q}$$

už na náboji q naprosto nezávislý a musí nutně udávat (podobně jako tomu bylo v případě intenzity $\boldsymbol{E}$) jistou, a to zcela jednoznačnou charakteristiku příslušného elektrického pole v daném místě prostoru.

Tímto postupem zavedenou novou fyzikální veličinou je **potenciál elektrického pole** (elektrický potenciál) φ_e.

Potenciál elektrického pole je typická skalární fyzikální veličina. Jeho hodnota v obecném bodě prostoru M se značí φ_e (M) a je jednoduše dána výrazem

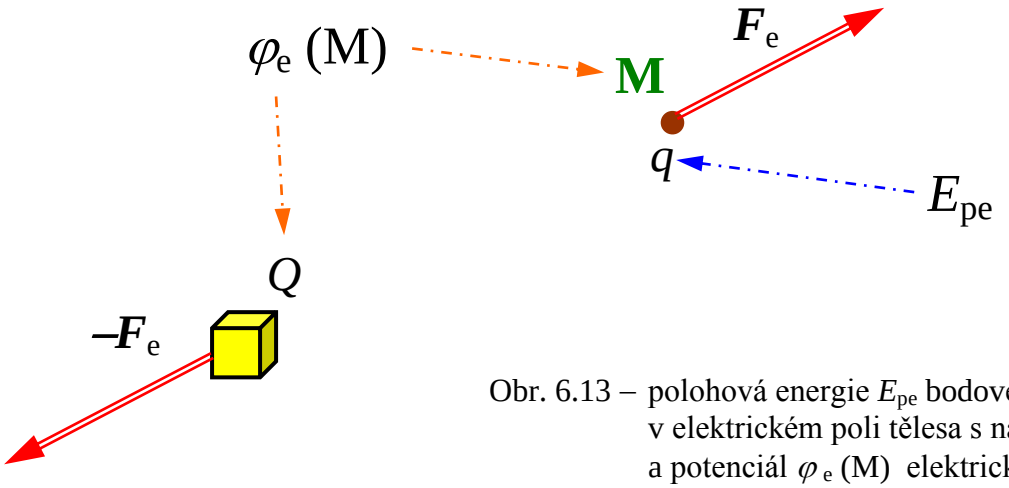
$$\varphi_e\,(\mathrm{M}) = \frac{E_{pe}}{q} \quad , \tag{6.22}$$

kde E_{pe} je polohová energie náboje q v bodě **M** v elektrickém poli.

V situaci schematicky naznačené na následujícím obr. 6.13 (stejně jako ve všech elektrických polích) platí:

→ **polohovou energii E_{pe}** má náboj q přítomný v poli náboje Q,

→ **potenciál φ_e (M)** je potenciálem elektrického pole náboje Q, ať se v jeho blízkosti nějaký náboj q nachází nebo ne.



Obr. 6.13 – polohová energie E_{pe} bodového náboje q v elektrickém poli tělesa s nábojem Q a potenciál φ_e (M) elektrického pole vytvářeného nábojem Q v bodě M

Fyzikální jednotkou elektrického potenciálu v soustavě SI je jeden **volt** (V). Ze vztahů mezi fyzikálními veličinami se dá dokázat, že platí: 1 V = 1 kg.m^2.s^{-3}.A^{-1}.

Na základě předchozího výkladu lze pak **potenciál elektrického pole vytvářeného bodovým nábojem** ***Q*** vyjádřit výrazem

$$\varphi_e(\mathrm{M}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{r_M} \quad , \tag{6.23}$$

kde r_M je vzdálenost bodu M od bodového náboje Q. Jak je z uvedeného vztahu patrné, elektrický potenciál závisí na této vzdálenosti nepřímo úměrně a navíc platí, že

$$\text{pro} \quad r_M \to \infty \quad \text{je} \quad \varphi_e(\mathrm{M}) = 0\ \mathrm{V} \quad .$$

To souvisí s tím, že v nehomogenních polích (a pole bodového náboje Q nehomogenní je) elektrické síly se vzdáleností „slábnou“, až v nekonečnu je jejich velikost nulová, a už se tam s nábojem q žádná práce nekoná. „V nekonečnu“ má v nehomogenním poli jakýkoli náboj polohovou energii nulovou.

To ale znamená, že lze potenciál každého nehomogenního elektrického pole v jakémkoli bodě prostoru **M** formálně vyjádřit (po dosazení a krátké úpravě vztahu (6.18) pro práci) také výrazem

$$\varphi_e(\mathrm{M}) = \int_{\mathrm{M}}^{\infty} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad . \tag{6.24}$$

Pozn.: V polích homogenních (např. pole rovnoměrně nabité dostatečně velké roviny) jejichž veličiny mají hodnoty nenulové teoreticky i v nekonečnu, volíme jiný postup. Potenciál takového pole klademe rovný nule na povrchu nabité roviny.

* * *

Závěrem se ještě jednou podívejme na práci elektrické síly. Práce nechť je konána v libovolném elektrickém poli z bodu **A** do bodu **B** při přenášení bodového náboje q. Vyjděme ze vztahu (6.18) a upravujme:

$$W_e = q\int_A^B \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = q\int_A^\infty \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} + q\int_\infty^B \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = q\int_A^\infty \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} - q\int_B^\infty \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = q\,.\,\varphi_e(\mathrm{A}) - q\,.\,\varphi_e(\mathrm{B})$$

$$\boxed{W_e = q\,.(\varphi_e(\mathrm{A}) - \varphi_e(\mathrm{B}))} \quad . \qquad (6.25)$$

Poslední vztah vyjadřuje tu skutečnost, že při přenosu bodového náboje q z bodu **A** do bodu **B** v elektrickém poli se vykoná práce, jež kromě velikosti přenášeného náboje závisí pouze na rozdílu elektrických potenciálů v těchto dvou bodech – tedy opět se potvrzuje skutečnost, že **naprosto nezávisí na tvaru trajektorie**.

Rozdíl potenciálů $\varphi_e(\mathrm{A}) - \varphi_e(\mathrm{B})$ (též se používá termínu potenciálový rozdíl) se nazývá **napětí U_{AB} mezi body A a B** v daném elektrickém poli. Jednotkou napětí je – stejně jako u veličiny potenciál – jeden **volt**. Platí

$$\boxed{W_e = q\,.\,U_{AB} \quad \text{, resp.} \quad U_{AB} = \frac{W_e}{q}} \quad , \qquad (6.26)$$

a dále

$$\boxed{U_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}} \quad . \qquad (6.27)$$

Budeme-li se ovšem nacházet v homogenním elektrickém poli intenzity $\boldsymbol{E}$ = ***konst.***, bude napětí mezi místy A a B podobně jako při výpočtu elektrické práce W_e (6.17) dáno jednodušším vztahem bez integrálu

$$\boxed{U_{AB} = E.d} \quad , \qquad (6.28)$$

kde d je vzdálenost mezi body A a B naměřená ve směru elektrické siločáry daného homogenního elektrického pole.

Z posledních uvedených vzorců (6.27) a (6.28) rovněž vyplývá vysvětlení, proč se jako fyzikální jednotka elektrické intenzity $\boldsymbol{E}$ též používá 1 $\mathrm{V.m^{-1}}$.

Vrátíme-li se k obecnému elektrickému poli a ke vztahu (6.27) pro výpočet napětí mezi dvěma body A a B, je na první pohled patrné, že budeme-li postupovat z bodu A do bodu B ***stále ve směru kolmém*** k intenzitě elektrického pole ($\mathrm{d}\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{E}$), bude napětí mezi těmito místy evidentně nulové, a tudíž potenciál φ_e stále stejný (φ_e = konst.).

Množina všech bodů v prostoru, v nichž je elektrický potenciál konstantní, vytváří obecně plochu, jež je v každém svém bodě kolmá na směr vektoru intenzity elektrického pole ***E*** (a tedy kolmá i na směr siločar). Tato plocha se nazývá **hladina potenciálu** nebo též **ekvipotenciální plocha**.

Je-li elektrické pole vytvářeno více náboji (Q_1, Q_2, ... , Q_n), lze při výpočtu potenciálu takového pole uplatnit **princip superpozice**. Úkol je v tomto případě početně mnohem jednodušší než při výpočtu intenzity, protože potenciál je ***skalární fyzikální veličinou***. V jakémkoli bodě M prostoru bude potenciál φ_e (M) výsledného elektrického pole dán prostým součtem potenciálů φ_{ei} (M) elektrických polí vyvolaných jednotlivými náboji v témž bodě prostoru (ovšem s ohledem na znaménka nábojů **!!!**), tedy

$$\varphi_e\,(\mathrm{M}) \;=\; \varphi_{e1}\,(\mathrm{M}) + \varphi_{e2}\,(\mathrm{M}) \;+ \varphi_{e3}\,(\mathrm{M}) \;+\; \ldots\ldots + \varphi_{en}\,(\mathrm{M}) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ei}\,(\mathrm{M}) \qquad . \qquad (6.29)$$

Příklad:
Na proton, jenž byl původně v klidu, začne působit síla homogenního elektrického pole tak, že na dráze dlouhé 22 cm získá rychlost 320 km.s^{-1}. Jaká je velikost intenzity E elektrického pole a jakým potenciálovým rozdílem proton na dané dráze prošel? Náboj protonu je elementární ($q = e$), hmotnost této částice je 1,66.10^{-27} kg.

V homogenním elektrickém poli působí na náboje síla stálé velikosti i směru $\Rightarrow$ částice nesoucí náboj se pohybuje s konstantním zrychlením ***a***. Jestliže navíc byla částice původně v klidu, musí být její pohyb v elektrickém poli **přímočarý a rovnoměrně zrychlený**.

Zrychlení protonu v našem případě má velikost

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{\left(320\ 000\ \mathrm{m.s^{-1}}\right)^2}{2\ .\ 0{,}22\ \mathrm{m}} \doteq 2{,}3.10^{11}\ \mathrm{m.s^{-2}} \quad .$$

Toto zrychlení mu udílí elektrická síla $\boldsymbol{F}_e$, jejíž velikost určíme z druhého Newtonova pohybového zákona (ze zákona síly):

$$F_e \;=\; m_p.a \;=\; 1{,}66.10^{-27}\ \mathrm{kg}\ .\ 2{,}3.10^{11}\ \mathrm{m.s^{-2}} \;\doteq\; 3{,}4.10^{-16}\ \mathrm{N} \quad .$$

Hledaná velikost intenzity elektrického pole pak bude

$$E \;=\; \frac{F_e}{q} = \frac{3{,}8.10^{-16}\ \mathrm{N}}{1{,}6.10^{-19}\ \mathrm{C}} \;\doteq\; 2\,400\ \mathrm{V.m^{-1}} = \;2{,}4\ \mathrm{kV.m^{-1}} \quad .$$

Jestliže proton získal uvedenou rychlost na dráze délky 0,22 m, pak přitom musel projít potenciálovým rozdílem přibližně

$$\Delta\varphi \;=\; U \;=\; E\ .\ d \;=\; 2\,400\ \mathrm{V.m^{-1}}\ .\ 0{,}22\ \mathrm{m} \;\doteq\; 530\ \mathrm{V} \quad .$$

Pozn.: Někdy se můžete (i v seriózních fyzikálních publikacích) setkat s tvrzením, že ***„částice s nábojem byla urychlena určitým napětím“*****.** To je jen taková mezi fyziky vžitá formulace – napětí samozřejmě samo o sobě „neurychluje“, pohybový stav hmotného objektu může měnit

pouze a jedině síla !!! ,

v tomto případě síla elektrická.

Náš příklad ale můžeme vyřešit ještě jiným postupem. Tím, že elektrická síla F_e vykonala na zmíněné dráze na nabité částici práci W_e , byl proton urychlen a změnil tedy svou pohybovou (kinetickou) energii E_k . Musí přitom platit:

$$W_e = \Delta E_k$$

$$q.U = \frac{1}{2} m v^2$$

$$U = \frac{mv^2}{2q} \quad .$$

Po dosazení číselných údajů dostáváme pochopitelně stejný výsledek jako při prvním postupu řešení

$$U = \frac{1{,}67.10^{-27}\ \text{kg} \cdot (3{,}2.10^{5}\ \text{m.s}^{-1})^2}{2\ .\ 1{,}6.10^{-19}\ \text{C}} \doteq 530\ \text{V} \quad .$$

6.3 Elektrické pole v látkách

6.3.1 Vodiče a nevodiče

V této kapitole se budeme zabývat studiem jevů, jež nastávají v látkách po jejich vložení do elektrického pole. Jak si ukážeme, nedochází však pouze k určitým změnám v látce samé, ale následně je ovlivněno i původní elektrické pole – jeho intenzita $\boldsymbol{E}$ v hmotném prostředí bude jiná, než jaká byla bez přítomnosti látky (tedy ve vakuu).

Tyto změny jsou dány tím, že v látkách je „ukryto“ skutečně obrovské množství elektrického náboje. Atomy se skládají z protonů a elektronů (a pochopitelně i z neutrálních neutronů), a i když je látka navenek elektricky neutrální, je v její mikrostruktuře „schován“ nepředstavitelně obrovský náboj, o jehož velikosti snad dá určitý obrázek následující **příklad**.

Určete, jak velký náboj je obsažen v 1 cm^3 mědi.

Jeden cm^3 představuje např. objem krychle o hraně 1 cm. Při známé hustotě mědi 8 960 $kg.m^{-3}$, je jasné, že máme necelých 9 gramů tohoto kovu, přesněji

$$m_{Cu} = 8{,}96\ \text{g} = 8{,}96 \,.\, 10^{-3}\ \text{kg} \quad .$$

Není ani problémem spočítat, jakou má hmotnost každý jednotlivý atom mědi . Z Mendělejevovy periodické tabulky prvků zjistíme, že měď má v jádře 29 protonů a podle zastoupení dvou v přírodě nejčastěji se vyskytujících izotopů v průměru 34,5 neutronů. Jádro tedy obsahuje v průměru 63,5 nukleonů. Jelikož je hmotnost protonu a neutronu prakticky stejná ($1{,}67 \,.\, 10^{-27}$ kg), bude hmotnost jádra atomu mědi

$$m_j = 63{,}5 \,.\, 1{,}67 \,.\, 10^{-27}\ \text{kg} \doteq 1{,}06 \,.\, 10^{-25}\ \text{kg} \quad .$$

K tomu by bylo třeba ještě připočítat hmotnost elektronového obalu, ale ta je o víc jak tři řády menší než hmotnost jádra

$$m_{ob} = 29 \,.\, 9{,}1 \,.\, 10^{-31}\ \text{kg} \doteq 2{,}6 \,.\, 10^{-29}\ \text{kg} \quad ,$$

tudíž ji můžeme zanedbat. Hmotnost jednoho atomu mědi je tedy

$$m_{at} = 1{,}06 \,.\, 10^{-25}\ \text{kg} \quad .$$

Jeden cm^3 mědi tedy musí obsahovat

$$N = \frac{m_{Cu}}{m_{at}} = \frac{8{,}96.10^{-3}}{1{,}06.10^{-25}}\ \text{atomů} \doteq 8{,}45 \,.\, 10^{22}\ \text{atomů} \quad .$$

Každý atom mědi má celkem 29 protonů a 29 elektronů, přitom každá z těchto částic je nositelem elementárního náboje $e = 1{,}602 \,.\, 10^{-19}$ C.

→ celkový kladný náboj v 1 cm^3 mědi ..... $Q_+ = N \,.\, 29 \,.\, e \doteq 390\,000$ C

→ celkový záporný náboj v 1 cm^3 mědi ..... $Q_- = -N \,.\, 29 \,.\, e \doteq -390\,000$ C

Jak velký je to náboj, nám snad osvětlí následující úvaha. Kdybychom tyto dva náboje oddálili do vzdálenosti $r = 6\,378$ km, tedy do vzdálenosti rovné poloměru naší Země, působila by mezi nimi přitažlivá Coulombovská síla (6.4) o velikosti

$$F_e = 9 \,.\, 10^9 \, \frac{390\,000 \cdot 390\,000}{6\,378\,000^2} \text{ N} \doteq 34 \text{ MN} \quad !!!$$

Tedy síla stejně velká jaká v důsledku zemské přitažlivosti působí na povrchu Země na těleso o hmotnosti 3,4 miliónu kilogramů (neboli 3 400 tun).

* * *

Jak je z uvedené modelové úlohy patrné, je elektrická interakce nesrovnatelně silnější než působení sil gravitačních (pochopitelně u nabitých objektů). Díky elektrickým silám „drží pohromadě“ atomy a molekuly látek kapalných a plynných, elektrické silové působení je i podstatou chemických vazeb ve strukturách látek pevných.

Každý materiál obsahuje ve své mikrostruktuře nabité částice. Většina z nich je v látce pevně vázána, ale jsou materiály obsahující i volně pohyblivé částice s nábojem. Na tom pak mimo jiné závisí i elektrické vlastnosti příslušného materiálu. Jak známo, z hlediska rozdílných elektrických vlastností dělíme látky na dvě základní skupiny – na **vodiče** a **nevodiče**.

Vodič je taková látka, jež obsahuje ***volně*** pohyblivé ***nabité*** částice (tyto materiály vedou mimo jiné dobře elektrický proud a zmíněné volně pohyblivé nabité částice jsou právě jeho nositeli). K typickým vodičům patří zejména:

→ ***kovy*** ..... obsahují volné valenční elektrony;

→ ***roztoky elektrolytů*** ..... obsahují volné kladné a záporné ionty;

→ ***ionizované plyny a plazma*** ..... obsahují volné elektrony a ionty.

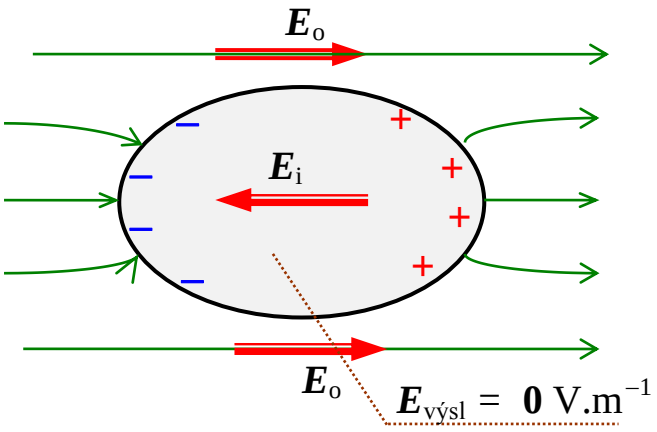
Naopak **nevodič** (též **izolant**, či **dielektrikum**) obsahuje ve své struktuře **pouze *vázané elektricky nabité*** částice, jejichž případný pohyb je umožněn jen na vzdálenosti řádově rovné rozměrům molekul (nebo atomů) dané látky; tyto částice nemohou být proto nositeli elektrického proudu – ale ani tyto látky nejsou k elektrickému poli netečné. Náboje se v nevodivé látce mohou ve vnějším elektrickém poli (byť nepatrně) posouvat nebo navzájem otáčet, jak si ukážeme v následujícím výkladu viz **článek 6.3.5.**; dochází tak k jejich určitému uspořádávání v nevodivé látce – říkáme, že se nevodivá látka působením sil vnějšího elektrického pole **polarizuje**.

6.3.2 Pevný kovový vodič ve vnějším elektrickém poli

Vložíme-li pevný kovový vodič do vnějšího elektrického pole intenzity $\boldsymbol{E}_o$ (viz obr. 6.14), začne na volně pohyblivé elektrony uvnitř vodiče působit elektrická síla

$$\boldsymbol{F}_e = -e.\boldsymbol{E}_o \quad .$$

Volné elektrony se pak vlivem tohoto vnějšího silového působení začnou přemísťovat proti směru vektoru intenzity E_o (neboť mají záporný náboj); na jedné straně vodiče – na obrázku „nalevo“ – tak bude tento záporný náboj převládat, na druhé straně – „napravo“ – se pak vodič nabíjí nábojem kladným. Je to ve skutečnosti nepohyblivý (tedy vázaný) náboj iontů kovové mřížky, kterým právě výše zmíněné elektrony „utekly“ na druhou stranu vodiče.



Obr. 6.14 – vodič ve vnějším elektrickém poli

Tyto náboje vytvoří následně uvnitř vodiče „svoje“ elektrické pole intenzity $\boldsymbol{E}_i$, jež bude mít opačný směr než pole původní. Přesun elektronů vodičem ustane právě v okamžiku, kdy se velikosti obou polí vyrovnají

$$\boldsymbol{E}_i = -\boldsymbol{E}_o \quad .$$

Nastane rovnovážný stav a výsledná intenzita elektrického pole uvnitř vodiče bude nulová

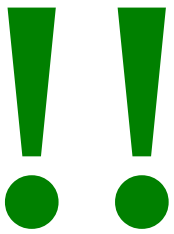
$$\boldsymbol{E}_{výsl} = \mathbf{0}\ \text{V.m}^{-1} \quad . \quad (6.30)$$

Důsledkem nulové intenzity uvnitř vodiče je mimo jiné i to, že elektrický potenciál je v celém objemu vodiče (včetně celého jeho povrchu) konstantní

$$\varphi_e = konst. \quad . \quad (6.31)$$

Povrch každého vodiče, jenž se nachází ve vnějším elektrostatickém poli, tedy tvoří **ekvipotenciální plochu**. Elektrické siločáry vnějšího pole musí být tedy kolmé k povrchu vodiče; přitom na záporně nabitém „konci“ vodiče jsou přerušeny, uvnitř vodiče neexistují (protože ve vodiči platí – viz (6.30) – $\boldsymbol{E}_{výsl} = \mathbf{0}$ V.m^{-1}) a pokračují zase až kolmo z kladně nabitého „konce“ vodiče. Výše popsaný jev se nazývá **polarizace vodiče** (dříve se též se používal termín ***elektrostatická indukce***); náboj, jenž se vytváří při tomto jevu na povrchu vodiče, je označován jako **indukovaný náboj**.

Poznámka: S termínem **„indukce“** se v nauce o elektromagnetickém poli setkáváme poměrně často, a to i u jevů a veličin, jež jsou svou podstatou kvalitativně naprosto odlišné (např. výše popsaný jev elektrostatické *indukce* v kovech, známe ale i fyzikální veličiny vektor elektrické *indukce* ***D*** a vektor magnetické *indukce* ***B***, je znám jev elektromagnetické *indukce* a je možné uvést i další případy, kdy se toto podstatné jméno v elektromagnetizmu objevuje). Tyto nešťastné „kolize“ ve fyzikální terminologii jsou hlavně zaviněny historickým vývojem fyziky



a je třeba si na ně dát dobrý pozor !!!

6.3.3 Elektrické pole v okolí nabitého kovového vodiče

Jak bylo ukázáno v předcházejícím článku, tvoří povrch vodiče, jenž se nachází ve vnějším elektrostatickém poli, ekvipotenciální plochu. K naprosto stejnému závěru dojdeme i v případě, když budeme původně neutrální vodič bez přítomnosti vnějšího elektrického pole nabíjet určitým nábojem Q. A to tak, že začneme z „venku“ přivádět na vodič nějaké nabité „cizí“ částice, např. elektrony. V takovém případě si bude ve svém okolí elektrostatické pole vytvářet nabitý vodič sám.

Předpokládejme, že na vodič přivedeme nějaký náboj Q. Vzhledem ke kvantovému charakteru elektrického náboje bude jeho nositelem určitě obrovský soubor elementárních částic (třeba právě zmíněných elektronů). I tyto přivedené elektrony budou pochopitelně naprosto volně pohyblivými částicemi uvnitř kovové látky a protože mají všechny souhlasný náboj, začnou se navzájem odpuzovat a ve vodiči se vzdálí až tam, kam to nejdále půjde, tedy na povrch vodiče.

Z vodiče ale zpět do prostoru uniknout za normálních podmínek nemohou, to by musely mít podle kvantové teorie energii alespoň rovnou (nebo větší) než je tzv. **výstupní práce elektronů z daného kovu**. Uvnitř vodiče tedy nakonec nezbude žádný nevykompenzovaný náboj a podle Gaussovy věty bude intenzita elektrického pole všude ve vodiči nulová (elektrické pole uvnitř vodiče nemá co vytvářet, když náboj sídlí pouze na jeho povrchu) a elektrický potenciál φ_e v celém objemu vodiče i na jeho povrchu bude **konstantní**.

Poznámka: To, že je povrch nabitého vodiče ekvipotenciální plochou, lze jednoduše dokázat i prostou logickou úvahou. Kdyby tomu totiž tak nebylo, existoval by na povrchu vodiče určitý rozdíl potenciálů (neboli napětí) a po povrchu vodiče by musel trvale procházet elektrický proud, což by bylo v rozporu se zákonem zachování energie a logikou vůbec.

Tvoří-li povrch nabitého vodiče ekvipotenciální plochu, musí být vektor intenzity elektrického pole ***E*** orientován k tomuto povrchu vždy kolmo. Pomocí Gaussovy věty lze pak dokázat, že hledaná intenzita elektrického pole v těsné blízkosti nad povrchem nabitého vodiče (s plošnou hustotou elektrického náboje σ) má velikost

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad . \tag{6.32}$$

Vztah (6.32) se nazývá **Coulombova věta**. Platí nejen pro pole nabitého vodiče, ale i pro předcházející případ polarizace vodiče (elektrostatické indukce), jež nastává u vodiče vloženého do vnějšího elektrostatického pole. V takovém případě je ovšem plošná hustota elektrického náboje σ hustotou náboje indukovaného na povrchu vodiče.

Obecně platí, že plošná hustota náboje σ (charakterizující vlastně rozložení náboje na povrchu vodiče) závisí jen na jeho geometrickém tvaru a je tím větší, čím větší je křivost plochy povrchu daného vodiče. Velká plošná hustota náboje σ je proto na hranách a zejména pak na hrotech a následkem toho je v okolí těchto míst i velká intenzita elektrického pole. Naopak nabitá vodivá kulová plocha vykazuje všude konstantní hustotu náboje a její elektrické pole má ideální středově symetrický charakter.

6.3.4 Kapacita vodiče, kondenzátory

Ukázali jsme si, že při nabíjení vodiče určitým nábojem Q se tento náboj rozmístí pouze na jeho povrchu. V okolí vodiče tak vzniká elektrické pole, jehož intenzita a potenciál v určitém bodě prostoru musí být ***přímo úměrné*** právě velikosti náboje Q na povrchu vodiče. Víme, že povrch vodiče je plochou s konstantním potenciálem φ_e (ekvipotenciální plochou). A zmíněná přímá úměrnost pochopitelně existuje i mezi velikostí náboje Q na povrchu vodiče a hodnotou potenciálu φ_e tamtéž → čím větší bude povrchový potenciál, tím větší náboj se bude na povrchu vodiče nalézat a naopak.

Každý vodič je „schopen“ shromažďovat na svém povrchu volný elektrický náboj. Míru této „schopnosti“ pak charakterizuje skalární fyzikální veličina **kapacita vodiče**. Označuje se písmenem C a je definována jednoduchým vztahem

$$C = \frac{Q}{\varphi_e} \quad , \tag{6.33}$$

kde Q je náboj na povrchu osamoceného vodiče a φ_e jeho potenciál (za předpokladu, že nulový potenciál volíme tak, jak je u nehomogenních polí obvyklé, v nekonečnu).

Fyzikální jednotkou kapacity vodiče je v soustavě SI jeden **farad** (F). Podle vztahu (6.33) přitom musí platit, že $1\ \mathrm{F} = 1\ \mathrm{C.V^{-1}}$. Na základě vztahů mezi fyzikálními veličinami lze odvodit (můžete si vyzkoušet sami), že $1\ \mathrm{F} = 1\ \mathrm{kg^{-1}.m^{-2}.s^4.A^2}$.

Jednotka jeden farad je však příliš velká, v praxi se tak obvykle setkáváme s kapacitami vyjádřenými v dílech této jednotky… v mikro–, nano–, či pikofaradech.

Příkladem osamoceného vodiče může být kulový vodič, na jehož povrch přivedeme náboj Q. Pro vyjádření potenciálu na povrchu takového vodiče lze použít vztah (6.24), jenž byl odvozen pro případ pole bodového náboje. Musí platit

$$\varphi_e = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{1}{R} \quad ,$$

kde R je poloměr nabité vodivé kulové plochy. S přihlédnutím ke definičnímu vztahu (6.33) pro kapacitu vodiče pak dostáváme, že tato veličina je u kulového vodiče dána výrazem

$$\boxed{C = 4\,\pi\,\varepsilon_o\,R} \quad . \qquad (6.34)$$

Vidíme, že kapacita kulového vodiče je dána pouze a jedině jeho geometrií (v tomto případě závisí jen na poloměru koule R). Tato skutečnost, že **kapacita vodičů je závislá jen na jejich tvaru a rozměrech**, ale platí naprosto obecně pro všechny vodiče nejrůznějších tvarů.

Získaný vztah (6.34) jen potvrzuje, že jednotka farad je jednotkou opravdu velkou. Podle tohoto vzorce je např. kapacita naší Země (R = 6 378 km) jen

$$C = 710\ \mu\text{F}$$

a poloměr koule, jež má kapacitu právě 1 F, by tak musel být

$$R = 8{,}984.10^{9}\ \text{m} \ .$$

Tento výsledek – téměř 9 miliónů kilometrů – představuje pro ilustraci vzdálenost víc jak 23 x větší, než je střední vzdálenost Měsíce od Země.

Ze vztahu (6.34) pak celkem názorně vyplývá i to, proč se jako jednotka permitivity ε běžně používá F.m^{-1}.

* * *

Jak je z předcházejícího výkladu a z příkladu kulové plochy patrné, má izolovaný vodič velmi malou kapacitu, a to i při jeho relativně velkých rozměrech. Tato situace se však podstatně změní, když do blízkosti jednoho vodiče umístíme vodič jiný – druhý.

Taková dvojice vodičů, navzájem ale od sebe izolovaných
(ať už vakuem nebo dielektrikem), vytváří **kondenzátor**.

Kondenzátor je vlastně zařízení, jež slouží k jímání (shromažďování) elektrického náboje. Konfigurace obou vodičů (též nazývaných **elektrody kondenzátoru**) je volena tak, aby se elektrické pole po jejich nabití vytvářelo jen v omezené části prostoru mezi nimi a jen minimálně se rozptylovalo do vnějšího prostoru. K tomuto rozptylu dochází obvykle jen na okrajích elektrod, odtud také plyne pro tento jev název **okrajový jev kondenzátoru**.

Samotné **nabíjení kondenzátoru** provádíme tak, že z jedné elektrody převádíme náboje (a sice záporné vodivostní elektrony) na elektrodu druhou – v reálném případě tuto „cestu“ náboji z jedné elektrody na druhou umožní nějaký nabíjecí zdroj. Tímto procesem se na jedné desce vytváří kladný náboj $+Q$, na druhé pak stejně velký záporný náboj $-Q$. „Schopnost“ kondenzátoru jímat (shromažďovat) tyto volné elektrické náboje na svých elektrodách charakterizuje skalární fyzikální veličina **kapacita kondenzátoru**, rovněž označovaná písmenem C a definovaná vztahem

$$C = \frac{Q}{U} \quad , \tag{6.35}$$

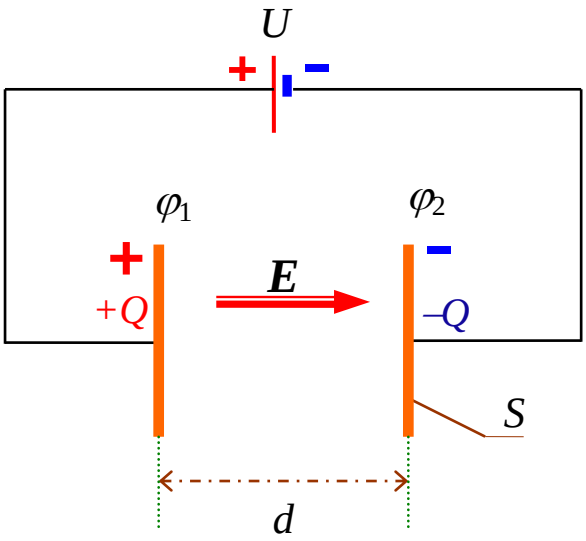
kde U je napětí mezi kladnou elektrodou o náboji $+Q$ a zápornou o náboji $-Q$. Jak je z této definice patrné, je jednotkou kapacity kondenzátoru v soustavě SI – stejně jako u kapacity vodiče – jeden **farad** (F).

Deskový kondenzátor

Je nejjednodušším typem kondenzátoru. Jeho elektrody jsou tvořeny dvěma rovnoběžnými dostatečně velkými deskami o plošném obsahu S a vzdálenosti d (viz obr. 6.15). Předpokládejme, že v prostoru mezi deskami je vakuum. Nabijeme-li kondenzátor, vytvoří se na desce s vyšším potenciálem φ_1 kladný náboj $+Q$, na desce s nižším potenciálem φ_2 pak stejně velký ale záporný náboj $-Q$. Mezi oběma deskami kondenzátoru pak vznikne homogenní elektrické pole, jehož intenzita $\boldsymbol{E}$ má velikost

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} = \frac{U}{d} \quad . \tag{6.36}$$

Vně kondenzátoru je pak elektrické pole nulové (přesněji řečeno zanedbatelně malé intenzity).



Obr. 6.15 – deskový kondenzátor

Velikost intenzity E elektrického pole mezi deskami kondenzátoru se však dá přímo odvodit pomocí Gaussovy věty - viz **článek 6.2.3**. Ukázali jsme si, že intenzita elektrického pole dvou nekonečně velkých (nebo alespoň dostatečně velkých) rovnoběžných rovin rovnoměrně nabitých opačnými náboji se stejnou plošnou hustotou σ bude mít v prostoru mezi rovinami velikost

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \quad . \tag{6.16}$$

Tedy i intenzita elektrického pole mezi deskami kondenzátoru musí mít velikost

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} = \frac{Q}{S\varepsilon_o} \quad . \tag{6.37}$$

Porovnáním obou vztahů pro velikost intenzity (6.36) a (6.37) pak dostaneme

$$\frac{U}{d} = \frac{Q}{S\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{S\,\varepsilon_o}{d} . U = C . U \quad .$$

Náboje Q na deskách kondenzátoru jsou přímo úměrné napětí U mezi deskami. Konstanta úměrnosti C je právě **kapacita deskového kondenzátoru** (mezi jehož deskami je vakuum) a je dána výrazem

$$\boxed{C = \frac{S\,\varepsilon_o}{d}} \quad . \tag{6.38}$$

Příklad:

Desky kondenzátoru bez dielektrika mají plošný obsah 200 cm^2 a vzdálenost 5 mm. Kondenzátor nabijeme na napětí l0 kV. Vypočítejte a) kapacitu kondenzátoru, b) náboj na deskách, c) intenzitu elektrického pole mezi deskami.

Kondenzátor neobsahuje dielektrikum, jeho kapacita bude proto dána

$$C = \frac{S.\varepsilon_o}{d} = \frac{0{,}02\ \text{m}^2 . 8{,}854.10^{-12}\ \text{F.m}^{-1}}{0{,}005\ \text{m}} \doteq 3{,}5.10^{-11}\ \text{F} = 35\ \text{pF} \quad .$$

Náboj Q na deskách (na jedné kladný $+Q$, na druhé stejně velký záporný $-Q$) je přitom přímo úměrný nabíjecímu napětí U

$$Q = C . U = 3{,}5.10^{-11}\ \text{F} . 10\,000\ \text{V} \doteq 3{,}5.10^{-7}\ \text{C} \quad .$$

Intenzita elektrického pole $\boldsymbol{E}$ mezi deskami kondenzátoru má velikost

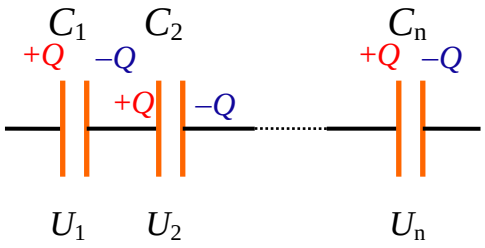
$$E = \frac{U}{d} = \frac{10\,000\ \text{V}}{0{,}005\ \text{m}} = 6.10^{6}\ \text{V.m}^{-1} \quad .$$

Sestavy kondenzátorů

Za účelem získání vhodné kapacity kondenzátoru nebo z důvodu rozdělení napětí na jednotlivých prvcích (vytvoření tzv. napěťového děliče) spojujeme často kondenzátory do různých sestav. Zde připomeneme alespoň dvě nejjednodušší z možných zapojení, a to čistě sériové zapojení a čistě paralelní zapojení kondenzátorů.

Sériové spojení kondenzátorů (obr. 6.16) – celková kapacita C soustavy n sériově zapojených kondenzátorů je v takovém případě dána vztahem

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} \quad . \tag{6.39}$$

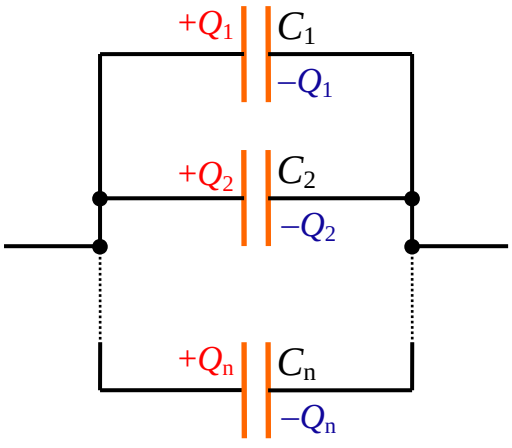


Obr. 6.16 – zapojení kondenzátorů do série

Každá sériová kombinace (a to platí nejen pro zapojení kondenzátorů) slouží vždy jako určitý **napěťový dělič** – napětí na jednotlivých prvcích (zde na kondenzátorech) bude totiž vždy menší než napětí na celé kombinaci. **Náboj Q je** ovšem v tomto zapojení **na všech prvcích stejný !!!**

Jednoduchým matematickým rozborem vztahu (6.39) lze dokázat, že sériovým zapojením kapacit získáme pokaždé výslednou kapacitu C menší, než je i ta nejmenší z kapacit C_i v daném zapojení.

Paralelní spojení kondenzátorů (obr. 6.17) – celková kapacita C soustavy n paralelně zapojených kondenzátorů je vždy rovna prostému součtu jednotlivých kapacit.



Obr. 6.17 – paralelní zapojení soustavy kondenzátorů

Platí

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i \quad . \tag{6.40}$$

Při paralelním zapojení je vždy na každém prvku **stejně velké napětí** (to ovšem platí opět pro jakékoli paralelní spojení, nejen pro kapacity !!!). Je zřejmé, že tímto typem zapojení se vždy získá výsledná kapacita C větší, než je libovolná z kapacit C_i v dané kombinaci.

6.3.5 Dielektrikum v elektrickém poli, polarizace dielektrika

Dielektrika na rozdíl od vodičů **neobsahují volně** pohyblivé nabité částice, a proto nemůže dojít po vložení dielektrika do vnějšího elektrického pole k přesunu nábojů na větší vzdálenosti.

Elektrické pole v nevodivé látce úplně nevymizí.

Dielektrikum sice také obsahuje ve své struktuře nabité částice, ale částice ***vázané***, jejichž případný pohyb je umožněn jen na vzdálenosti řádově rovné rozměrům molekul dané látky. Jak se tedy projeví vliv vnějšího elektrického pole na nevodivou látku a naopak vliv nevodivé látky na velikosti intenzity původního pole?

Vložíme-li dielektrikum do vnějšího elektrického pole, bude toto pole působit silovými účinky na vázané elektrické náboje v molekulách dielektrika. Toto silové působení se však projeví pouze v jistém posunutí nebo natočení vázaných nábojů na vzdálenosti, jež jsou (jak jsme se již zmínili) srovnatelné s rozměry příslušných molekul. Tento přírodní jev se nazývá **polarizace dielektrika**. Jak si dále ukážeme, v jeho důsledku se vnější elektrické pole s intenzitou $\boldsymbol{E}_o$ **pouze zeslabí** na hodnotu $\boldsymbol{E}$, přičemž pro velikosti těchto dvou intenzit platí, že

$$\frac{E_o}{E} = \varepsilon_r \quad , \tag{6.41}$$

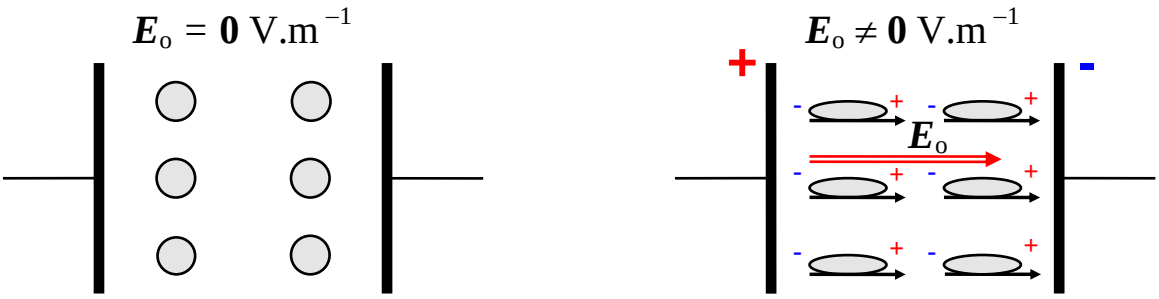
kde ε_r je **relativní permitivita** daného **dielektrika**, o níž jsme se prvně zmínili při výkladu Coulombova zákona.

Jev polarizace dielektrika probíhá v podstatě dvojím odlišným způsobem, a to v závislosti na struktuře molekul daného nevodiče. Z tohoto důvodu rozdělujeme dielektrika do dvou základních kategorií, a sice na dielektrika ***nepolární*** a ***polární***, a podle průběhu polarizace u těchto dvou skupin pak rozlišujeme ***polarizaci posuvnou*** a ***orientační***.

Bez přítomnosti vnějšího elektrického pole ($\boldsymbol{E}_o = \mathbf{0}$ V.m^{-1}) je **nepolární dielektrikum** (viz obr. 6.18 na následující straně) tvořeno molekulami, v nichž těžiště kladných nábojů tvořených protony v jádrech a těžiště záporných nábojů tvořených elektrony v obalu atomů v každé molekule splývá v jednom jediném bodě. Molekuly nepolárního dielektrika bez přítomnosti vnějšího elektrického pole nevytvářejí dipóly – chovají se jako naprosto neutrální útvary i při „nejbližším pohledu“ na každou takovou molekulu.

Vložíme-li však nepolární dielektrikum do vnějšího elektrického pole intenzity $\boldsymbol{E}_o$, začnou na kladné a záporné náboje působit opačně orientované elektrické síly a v důsledku toho se těžiště obou nábojů posunou od sebe (těžiště kladného ve směru vnějšího pole, těžiště záporného ve směru opačném).

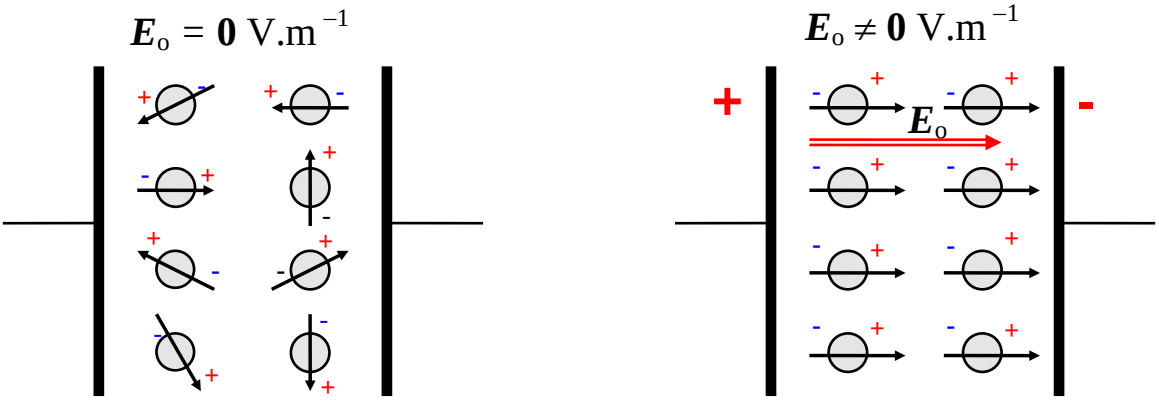
Molekula se tak stává **dipólem** → dochází k tzv. **posuvné polarizaci dielektrika**. Pro tento typ polarizace je charakteristické, že **není závislý** na teplotě materiálu. Mezi nepolární dielektrika patří např. inertní plyny nebo plyny s dvouatomovými molekulami (H_2, O_2, N_2, Cl_2, aj.).



Obr. 6.18 – posuvná polarizace nepolárního dielektrika

Polární dielektrikum (viz obr. 6.19) je tvořeno molekulami, jež tvoří elektrické dipóly i bez přítomnosti vnějšího elektrického pole (na jednom konci molekuly bývá „přebytek“ kladného a na druhém konci pak naopak záporného náboje). Typickými polárními dielektriky jsou iontové sloučeniny (např. NaCl), výrazné dipóly i bez přítomnosti vnějšího elektrického pole vytvářejí – jak možná známo – i molekuly destilované vody. Vlivem neuspořádaného tepelného pohybu je však orientace dipólových momentů natolik různá, že celkový dipólový moment takové látky je nulový a výsledný efekt je nakonec stejný jako u látek nepolárních.

Umístíme-li však polární dielektrikum do vnějšího elektrického pole o intenzitě $\boldsymbol{E}_o$, začnou se jeho molekuly natáčet do směru tohoto pole, neboť na ně působí moment dvojice elektrických sil. Naproti tomu se ovšem stále negativně projevuje tepelný pohyb molekul, jenž natáčející se dipóly ze směru intenzity $\boldsymbol{E}_o$ odchyluje. Výsledný dipólový moment látky však už nulový není → tímto způsobem dochází u polárních dielektrik k tzv. **orientační polarizaci dielektrika**. Tento typ polarizace, jak plyne z uvedeného výkladu, **je závislý** na teplotě.



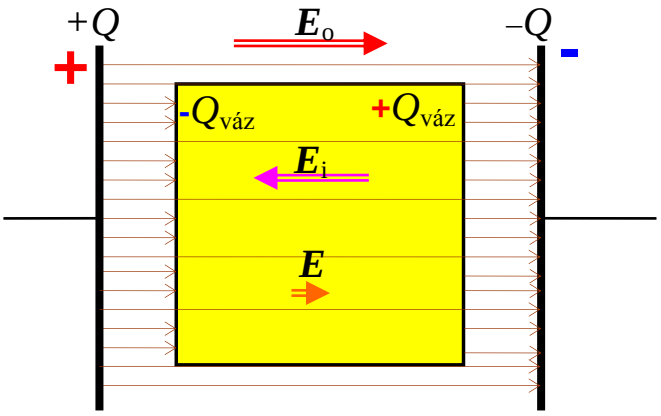
Obr. 6.19 – orientační polarizace polárního dielektrika

V obou výše uvedených případech (u obou typů polarizací dielektrik) pak platí, že uvnitř zpolarizovaného dielektrika se opačné náboje každých dvou sousedních dipólů navzájem ruší (jejich součet je nulový) a pouze na povrchu dielektrika – u posledních „krajních“ dipólů – zůstanou tyto náboje nevykompenzovány. Tak se při polarizaci dielektrika na jeho povrchu vytváří (neboli indukuje) vrstva **vázaného náboje** $Q_{váz}$. Tento náboj (na jedné straně dielektrika je přitom náboj záporný $-Q_{váz}$, na druhé pak stejně velký kladný $+Q_{váz}$ – viz obr. 6.20) je však vázán na dipóly a nelze jej proto z dielektrika odvést.

Svou přítomností však vytváří tyto povrchové indukované náboje v dielektriku vnitřní elektrické pole o intenzitě $\boldsymbol{E}_i$, jejíž velikost E_i je však menší než velikost intenzity vnějšího pole E_o. Vektor $\boldsymbol{E}_i$ je však vždy orientován **proti** vektoru intenzity $\boldsymbol{E}_o$ vnějšího pole, jež polarizaci dielektrika vyvolalo. Výsledná intenzita $\boldsymbol{E}$ elektrického pole uvnitř dielektrika má tedy směr stejný jako původní intenzita $\boldsymbol{E}_o$, její velikost E je ale menší. Platí, že

$$E = E_o - E_i = \frac{E_o}{\varepsilon_r} \quad . \tag{6.42}$$

Hustota elektrických siločar je tedy v dielektriku ε_r krát menší než ve vakuu (v daném elektrickém poli) – viz už zmíněný obr. 6.20, v němž je schématicky zachycen případ kdy $\varepsilon_r = 3$.



Obr. 6.20 – elektrické pole zpolarizovaného dielektrika

Vyjdeme-li z tohoto skutečně jednoduchého modelu rovnoměrně zpolarizovaného dielektrika, můžeme snadno odvodit i další vztahy mezi veličinami, jež proces polarizace charakterizují. Ukázali jsme, že výsledná intenzita $\boldsymbol{E}$ elektrického pole uvnitř dielektrika má velikost E

$$E = E_o - E_i = \frac{E_o}{\varepsilon_r} \quad . \tag{6.42}$$

Volný náboj ($+Q$ a $-Q$) na vnějších deskách vytváří elektrické pole intenzity $\boldsymbol{E}_o$, pro jejíž velikost platí

$$E_o = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \quad , \tag{viz 6.16}$$

kde σ je plošná hustota volného náboje na vodivých deskách.

Vázaný náboj na povrchu dielektrika vzniklý jeho polarizací (na jedné straně dielektrika záporný $-Q_{váz}$, na druhé pak stejně velký kladný $+Q_{váz}$) vytváří uvnitř dielektrika vlastní pole intenzity $\boldsymbol{E}_i$, jejíž velikost lze vyjádřit naprosto stejným vztahem jako velikost intenzity $\boldsymbol{E}_o$. Nutně musí platit

$$E_i = \frac{\sigma_{váz}}{\varepsilon_o} \quad , \tag{6.43}$$

kde $\sigma_{váz}$ je plošná hustota vázaného náboje na povrchu dielektrika.

Jelikož je podle vztahu pro relativní permitivitu dielektrika

$$\varepsilon_r = \frac{E_o}{E_o - E_i} = \frac{\sigma}{\sigma - \sigma_{váz}} \quad ,$$

dostaneme po jednoduché úpravě, že

$$\boxed{\sigma_{váz} = \sigma \,.\, \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}} \quad . \tag{6.44}$$

Závěrem se podívejme, jak se změní kapacita kondenzátoru, mezi jehož vodivé elektrody vložíme dielektrikum tak, že vyplňují celý prostor mezi nimi. Volný náboj na těchto elektrodách bude stejný, ale v důsledku procesu polarizace dielektrika se velikost intenzity elektrického pole E uvnitř dielektrika ε_r – krát zmenší. Následně se ale ve stejném poměru zmenší i napětí mezi oběma elektrodami. Jelikož platí

$Q = C_o \,.\, U_o$ pro kondenzátor **bez** dielektrika a

$Q = C \,.\, U = C \cdot \frac{U_o}{\varepsilon_r}$ pro kondenzátor **s** dielektrikem,

dostáváme pouhým porovnáním těchto dvou vztahů, že kapacita kondenzátoru, mezi jehož elektrodami je v celém objemu dielektrikum s relativní permitivitou ε_r, je právě ε_r - krát **větší** než kapacita téhož kondenzátoru bez přítomnosti dielektrika

$$\boxed{C = \varepsilon_r \,.\, C_o} \quad . \tag{6.45}$$

6.3.6 Energie elektrického pole

Elektrické pole je vytvářeno nabitými objekty. Abychom tyto nabité objekty umístili do určité konfigurace, musíme vynaložit práci spojenou s překonáváním elektrických sil mezi náboji působících. Tato práce vynaložená na vytvoření určitého elektrického pole, resp. práce, jež se uvolní při jeho zániku, se pak rovná **energii** E_{el} daného **elektrického pole**.

V případě vytváření elektrického pole nabitého vodiče bude energie E_{el} takového pole rovna práci, jež musí být vynaložena, aby toto pole vůbec vzniklo. Tedy práci, kterou je třeba vnějšími silami vykonat, aby původně nenabité (elektricky neutrální) těleso získalo určitý náboj Q.

Potenciál φ_e povrchu osamělého vodiče kapacity C nabitého nábojem q je podle (6.33) roven

$$\varphi_e = \frac{q}{C} \quad .$$

Jestliže už bude na povrchu vodiče nějaký náboj q a my budeme chtít na tento vodič přivést další náboj dq, musíme nutně vykonat práci (neboť překonáváme odpudivou elektrickou sílu mezi oběma náboji ... q a dq), a to

$$\mathrm{d}W = \varphi_e \mathrm{d}q = \frac{q}{C}\,\mathrm{d}q \quad .$$

Při nabíjení vodiče se tedy práce musí vykonat, při jeho vybíjení je možno tuto práci získat zpět (např. ve formě určitého proudového impulzu, apod.).

Celkovou práci potřebnou k přenesení určitého náboje Q na původně nenabitý vodič po nekonečně malých částech dq pak položíme rovnou elektrické energii E_{el} elektrického pole takto nabitého vodiče. Dostáváme

$$E_{el} = W = \int_0^Q \mathrm{d}W = \int_0^Q \frac{q}{C}\mathrm{d}q = \frac{1}{C}\int_0^Q q\ \mathrm{d}q \quad ,$$

z čehož vyplývá

$$\boxed{E_{el} = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C}} \quad . \qquad (6.46)$$

Vztah (6.46) však lze psát i v ekvivalentním zápisu

$$\boxed{E_{el} = \frac{1}{2}\cdot Q\cdot\varphi_e = \frac{1}{2}\cdot C\cdot{\varphi_e}^2} \quad . \qquad (6.47)$$

Při výpočtu elektrické energie E_{el} pole mezi deskami kondenzátoru se postupuje naprosto stejným způsobem jako u elektrického pole osamoceného vodiče. Práci, kterou konáme při nabíjení kondenzátoru, spočítáme jako práci potřebnou na postupné přenesení náboje konečné hodnoty Q po nekonečně malých částech dq tak, že tento náboj postupně odebíráme z jedné desky kondenzátoru a přivádíme na desku druhou. Integrací tak získáme výsledek

$$\boxed{E_{el} = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\cdot Q\cdot U = \frac{1}{2}\cdot C\cdot U^2} \quad , \qquad (6.48)$$

kde U je napětí mezi deskami kondenzátoru kapacity C nabitého nábojem Q.

Prostorové rozložení energie elektrostatického pole pak charakterizuje skalární fyzikální veličina **hustota energie elektrického pole** nebo též krátce nazývaná **hustota elektrické energie** w_{el}**.** Hustotu energie měříme v jednotkách J.m^{-3}. Při spojitém rozložení energie E_e v určité oblasti o objemu V je tato hustota definována vztahem

$$\boxed{w_{el} = \frac{\mathrm{d}E_e}{\mathrm{d}V}} \quad . \qquad (6.49)$$

Speciálně pro homogenní elektrické pole pak je

$$\boxed{w_{\mathrm{el}} = \frac{E_{\mathrm{e}}}{V}} \quad . \tag{6.50}$$

Takovým případem je např. homogenní elektrické pole mezi rovnoběžnými elektrodami deskového kondenzátoru. U tohoto kondenzátoru, jehož kapacita

$$C = \frac{S\,\varepsilon_{\mathrm{o}}\varepsilon_{\mathrm{r}}}{d} \quad ,$$

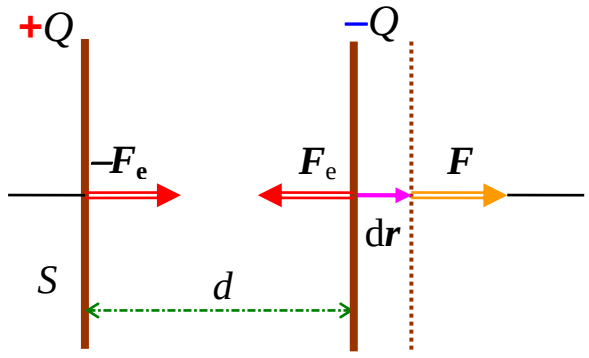
lze psát

$$w_{\mathrm{el}} = \frac{E_{\mathrm{e}}}{V} = \frac{\frac{1}{2}\cdot C\cdot U^2}{S\cdot d} = \frac{\frac{S\,\varepsilon_{\mathrm{o}}\varepsilon_{\mathrm{r}}}{d}\cdot E^2\cdot d^2}{2\cdot S\cdot d} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mathrm{o}}\varepsilon_{\mathrm{r}}E^2 \quad .$$

Hustota elektrické energie je tedy úměrná intenzitě elektrického pole **(její druhé mocnině)** v daném nevodivém prostředí **!!!**

$$\boxed{w_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mathrm{o}}\varepsilon_{\mathrm{r}}E^2} \quad . \tag{6.51}$$

Vztah (6.51) umožňuje - mimo jiné - též snadno vypočítat sílu, kterou na sebe působí dvě opačně nabité desky rovinného kondenzátoru. **Náboj na deskách není bodový**, a proto nelze tuto sílu jednoduše spočítat z Coulombova zákona **!!!**



Obr. 6.21 – síly mezi deskami nabitého kondenzátoru

Představme si následující modelovou situaci. Abychom oddálili dvě nesouhlasně nabité desky kondenzátoru, musíme překonat elektrickou sílu $\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}$, kterou se navzájem přitahují, silou stejně velkou ale opačně orientovanou $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}$. Oddálení o nějaké, byť nekonečně malé, posunutí $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ (viz obr. 6.21) znamená, že síla $\boldsymbol{F}$ vykoná práci

$$\mathrm{d}W = F\,\mathrm{d}r \quad .$$

O hodnotu této vykonané práce dW se ale současně zvýší energie elektrického pole mezi deskami kondenzátoru. Tento přírůstek dE_{el} je možno vyjádřit na základě (6.49) jako

$$\mathrm{d}E_{el} = w_{el}\,\mathrm{d}V \quad ,$$

kde $\mathrm{d}V = S\,\mathrm{d}r$ je přírůstek „objemu elektrického pole“ mezi deskami.

Jelikož ale nutně musí platit rovnost

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}E_{el} \quad ,$$

dostáváme po jednoduché úpravě:

$$F\,\mathrm{d}r = w_{el}\,\mathrm{d}V = w_{el}\,S\,\mathrm{d}r$$

$$F = w_{el}\,S = \frac{1}{2}\varepsilon_o\varepsilon_r E^2 S = \frac{1}{2}\varepsilon_o\varepsilon_r \frac{U^2}{d^2}\,S \quad .$$

Síla, kterou se přitahují desky kondenzátoru, má tedy velikost

$$\boxed{F = \frac{1}{2}\varepsilon_o\varepsilon_r \frac{U^2}{d^2}\,S} \quad . \qquad (6.52)$$

Jestliže nabijeme kondenzátor nábojem Q (a odpojíme od zdroje nabíjení) zůstane tento náboj na deskách beze změny, i když je budeme oddalovat nebo přibližovat. Rovněž velikost intenzity elektrického pole E mezi deskami zůstane při jejich oddalování stále stejná. Platí přece

$$E = \frac{Q}{S\varepsilon_o} \qquad \text{viz (6.37)}$$

a tento vztah – jak je na první pohled patrné – vůbec vzdálenost d neobsahuje **!!!**

To ale znamená, že přitažlivá síla (či přesněji přitažlivé síly akce a reakce) mezi deskami budou také stále stejné (pokud nedojde k porušení homogenity elektrického pole!). Při oddalování desek však poroste se zvětšujícím se objemem kondenzátoru současně i hodnota energie E_{el} elektrického pole. Přitom bude vzrůstat napětí mezi deskami, ale naopak bude klesat kapacita kondenzátoru. Práci, kterou budeme muset vynaložit na oddálení desek o určitou vzdálenost d, pak můžeme spočítat jako

$$\boxed{W = F\,.\,d = \frac{1}{2}\cdot C_2 \cdot {U_2}^2 - \frac{1}{2}\cdot C_1 \cdot {U_1}^2} \quad , \qquad (6.53)$$

kde U_1 je původní napětí na kondenzátoru kapacity C_1 , U_2 změněné konečné napětí a C_2 nová kapacita, jejíž změnu způsobila jiná geometrie kondenzátoru.

7. USTÁLENÝ ELEKTRICKÝ PROUD

7.1 Základní pojmy

Pod pojmem **elektrický proud** chápeme takový **fyzikální jev**, při němž dochází z určitých příčin k uspořádanému pohybu nosičů elektrického náboje. Těmito nosiči elektrického proudu mohou být např. volné vodivostní elektrony v kovech, volné elektrony nebo díry v polovodičích, volné ionty v elektrolytech, volné elektrony a ionty v plynech, atd. Jejich pohyb je ***obvykle*** způsoben vlivem připojeného vnějšího elektrického pole.

Tento přírodní jev pak charakterizuje **fyzikální veličina** nazývaná naprosto stejně, tedy **elektrický proud** nebo též stručně **proud**. Je označována písmenem I a její jednotkou je jedna ze sedmi základních jednotek soustavy SI ... ***ampér*** - 1 A . Je typickou skalární fyzikální veličinou, jež je definována velikostí náboje dQ , jenž projde jistou plochou S za dobu dt vztahem

$$I = \frac{\mathrm{d}\,Q}{\mathrm{d}\,t} \quad . \tag{7.1}$$

Přitom náboj dQ je třeba chápat jako **součet hodnot nábojů všech nositelů proudu** prošlých danou plochou S (např. průřezem vodiče) za čas dt. Nesmíme zapomínat na to, že v tomto součtu musíme respektovat odlišná znaménka nábojů (např. u polovodičů nebo elektrolytů) !!!

Proud se obecně může s časem měnit, v tom případě je určitou funkcí času a jeho **okamžitá hodnota** se pak značí zpravidla malým písmenem i (např. u střídavých proudů). Pro elektrický proud I, jenž je ***konstantní v čase***, pak platí

$$I = \frac{Q}{t} \quad , \tag{7.2}$$

kde Q je celkový náboj částic, jež projdou plochou S (obvykle průřezem vodiče) za čas t.

Směr elektrického proudu je definován jako směr pohybu **kladně** nabitých nositelů proudu; v případě, že těmito nositeli budou záporně nabité částice (typické to je např. pro vodivostní elektrony v kovech), je podle této definice stanovený směr proudu vlastně opačný, než je skutečný směr pohybu nositelů proudu.

Stejnosměrným elektrickým proudem rozumíme takový proud, jehož směr se s časem nemění. **Konstantní stejnosměrný proud** nebo též **ustálený proud** je potom takový stejnosměrný proud, jehož velikost zůstává navíc stále stejná $\rightarrow I = konst.$ v libovolném čase t.

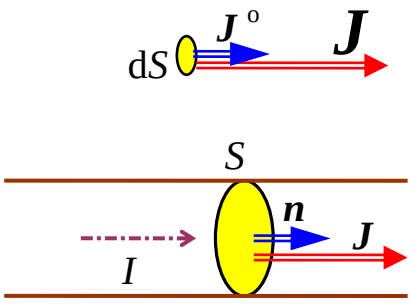
Důležitou fyzikální veličinou je pak **hustota proudu** $\boldsymbol{J}$, (též se používá termín **proudová hustota**). Je to naopak typická vektorová fyzikální veličina, jež charakterizuje příslušný elektrický proud v jednotlivých bodech dané plochy dS kolmo orientované na směr proudu. Tato veličina je definovaná vztahem

$$\boldsymbol{J} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}\,\boldsymbol{J}^{\,o} \quad , \qquad (7.3)$$

kde $\boldsymbol{J}^{\,o}$ je jednotkový vektor ve směru proudu (viz vedlejší obr. 7.1).

V případě, že je proudová hustota $\boldsymbol{J}$ konstantní v celé ploše S ($\boldsymbol{J}$ = ***konst.***) a má směr její normály $\boldsymbol{n}$, platí

$$\boxed{\boldsymbol{J} = \frac{I}{S}\,\boldsymbol{n}} \quad . \qquad (7.4)$$



Obr. 7.1 – k definici hustoty proudu $\boldsymbol{J}$

Pro proud I, jenž prochází určitou orientovanou plochou S, tedy musí naopak platit vztah

$$\boxed{I = \int_S \boldsymbol{J}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}} \quad . \qquad (7.5)$$

Jestliže ovšem nastane takový případ, že proudová hustota $\boldsymbol{J}$ má v každém bodě plochy S směr i orientaci její normály $\boldsymbol{n}$ a navíc konstantní velikost $J = konst.$, lze proud snadno vyjádřit jako

$$\boxed{I = J\,.\,S} \quad . \qquad (7.6)$$

Látky, jež dobře vedou elektrický proud, se nazývají **vodiče elektrického proudu**, či stručně **vodiče**. K takovým materiálům, jež obsahují volně pohyblivé nositele elektrického proudu, patří zejména:

- *kovy,*
- *roztoky elektrolytů,*
- *ionizované plyny,*
- *plazma.*

Naproti tomu **nevodiče** tyto volné nositele neobsahují a elektrický proud proto vést nemohou.

Zvláštní skupinu materiálů pak tvoří tzv. **polovodiče**, látky, jejichž elektrická vodivost se značně mění (silně zvyšuje) s rostoucí teplotou. Navíc elektrické vlastnosti polovodičových materiálů lze také velmi citelně ovlivnit i nepatrným množstvím vhodných příměsí.

My se v následujícím výkladu zaměříme nejprve na nejběžnější případ – na vznik a vedení ustáleného elektrického proudu v pevných kovových vodičích.

7.2 Elektrický proud v kovech

7.2.1 Vznik elektrického proudu v pevném kovovém vodiči

Nositeli elektrického proudu v kovech jsou volné elektrony, jež se pohybují v krystalické mřížce tvořené kladnými ionty kovu. Existenci **kovové vazby** v těchto materiálech lze vysvětlit pouze na základě kvantově-mechanického modelu řešením tzv. Schrödingerovy rovnice.

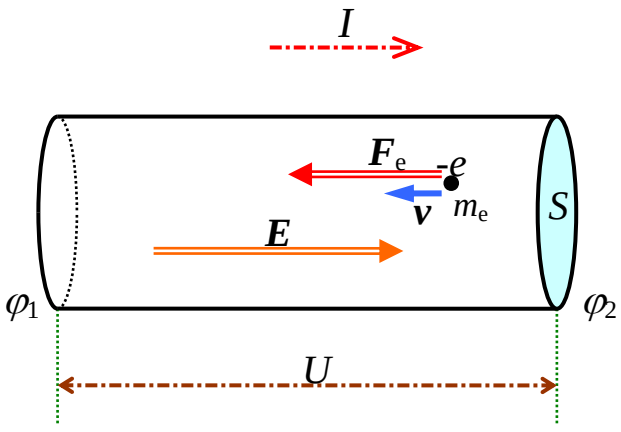
Kovy obsahují obvykle v osamělých atomech v krajní slupce jeden valenční elektron, jenž se při tvorbě vazby mezi atomy v pevné látce neuplatní a stává se ve struktuře materiálu relativně volnou částicí – navíc elektricky nabitou.. Tyto elektrony – označované také jako **vodivostní elektrony** – se pak působením (byť malých) vnějších sil mohou snadno uvádět do pohybu. Pokud je vnější působení vyvoláno elektrickými silami po připojení nějakého zdroje elektrického napětí, začnou se elektrony jako záporně nabité částice pohybovat proti směru vektoru intenzity $\boldsymbol{E}$ vytvořeného elektrického pole a vzniká tím elektrický proud.

Při svém pohybu v látce pak vodivostní elektrony anulují („ztrácejí") svou energii a hybnost při srážkách s ionty tvořícími krystalickou mřížku kovu, ale i s nepravidelnostmi a různými nečistotami (příměsemi) v kovovém krystalu. Protože pohyb vodivostních elektronů v kovovém krystalu připomíná pohyb molekul tekutin v proudové trubici, používá se pro ně někdy označení „elektronový plyn".

Aby mohla kovová vodivá látka vést elektrický proud, je nutné ji připojit k vnějšímu zdroji elektrického napětí. Bude-li zdroj napětí trvale připojen, vytvoří se v kovovém materiálu stálé elektrické pole určité intenzity $\boldsymbol{E}$ a na koncích vodiče bude trvalý rozdíl potenciálů $\varphi_1 - \varphi_2$ (neboli napětí U) . Na volné náboje vodivostních elektronů pak bude působit elektrická síla

$$\boldsymbol{F}_e = Q.\boldsymbol{E} \quad (\text{kde } Q = -e) \quad ,$$

jejíž orientace je opačná, než je orientace vektoru intenzity $\boldsymbol{E}$, a vodičem začne procházet elektrický proud (viz následující obr. 7.2).



Obr. 7.2 – k vedení elektrického proudu v kovech

Jestliže budeme na koncích vodiče udržovat **konstantní** rozdíl potenciálů (napětí) $\varphi_1 - \varphi_2 = U$, vznikne v celém objemu vodiče **homogenní** elektrické pole s intenzitou $\boldsymbol{E}$ = ***konst.*** Na volné vodivostní elektrony ve vodiči pak bude působit stálá elektrická síla $\boldsymbol{F}_e$ (**konstantní** co do velikosti i co do směru) a pohyb elektronů bude zákonitě **rovnoměrně zrychlený**.

Navíc bude jejich pohyb uspořádaný, a to ve směru opačném, než je směr vektoru intenzity ***E*** vnějšího elektrického pole.

Toto je veškerá podstata vzniku elektrického proudu v kovech.

Rychlost elektronů však nemůže narůstat do nekonečna, při jejich pohybu dochází neustále ke srážkám (neboli interakcím) s atomy tvořícími mřížku příslušného kovu, ale i s různými nečistotami a nepravidelnostmi v daném materiálu. Elektrony se při těchto srážkách zastaví (uvědomte si, že jejich hmotnost je o několik řádů menší než hmotnost jim „překážejících" atomů !!!), jejich kinetická energie tak klesne na nulu a o stejnou hodnotu se musí zvýšit vnitřní energie vodivého materiálu. Materiál se začne zahřívat – zvyšuje se jeho teplota – a dochází tak vlastně k „předávání" pohybové energie elektronů danému materiálu ve formě tepla.

Po srážce je elektron elektrickým polem znovu urychlován, při další srážce opět zastaven, a tak se tento proces stále opakuje stále dál a dál, pokud elektrický proud vodičem prochází. Těmito neustálými interakcemi elektronů s látkou lze jednak vysvětlit **elektrický odpor látky**, jednak vznik **Joulova tepla** ve vodiči průchodem elektrického proudu.

Při svém usměrněném pohybu nabývá elektron nejrůznějších rychlostí, přesto lze najít jistou střední (tedy průměrnou) hodnotu rychlosti jejich neuspořádaného pohybu. Tato střední rychlost se nazývá **driftová (unášivá) rychlost** v_d pohybu elektronů (obecně ji lze ale zavést pro každého nositele elektrického proudu). Jak si ukážeme dále, je její velikost přímo úměrná velikosti intenzity E připojeného vnějšího elektrického pole.

Pozn.: Velikost této unášivé rychlosti v kovech je poměrně velmi malá – řádově dosahuje hodnot 10^{-4} m.s^{-1}. Elektrony však kromě toho konají navíc chaotický neuspořádaný tepelný pohyb všemi směry. Ten samozřejmě není usměrněný, a tudíž nemůže být podstatou elektrického proudu (pomineme-li ovšem termoelektrické jevy !!!). Velikost rychlosti tohoto tepelného neuspořádaného pohybu je ale mnohonásobně větší, dosahuje až řádu zhruba 10^6 m.s^{-1}. Tím pádem je výsledný pohyb elektronů značně složitý, ale elektrický proud jako celek vodičem „teče" (či spíše postupuje) právě unášivou rychlostí v_d.

Vraťme se ještě k obr. 7.2 a podívejme se podrobněji na pohyb elektronů vlivem elektrického pole. Jak jsme si ukázali, homogenní elektrické pole intenzity ***E* = *konst.*** ve vodiči způsobí, že pohyb elektronů je **rovnoměrně zrychlený**. Označíme-li průměrnou (střední) dobu pohybu elektronu mezi dvěma po sobě následujícími srážkami (interakcemi) $\bar{t}$, musí podle vztahu mezi přírůstkem hybnosti elektronu a impulzem působící elektrické síly $\boldsymbol{F}_e$ platit

$$m_e v = E \,.\, e \,.\, \bar{t} \quad . \tag{7.7}$$

Je třeba si uvědomit, že tato střední doba $\bar{t}$ mezi dvěma srážkami je dána právě rychlostí tepelného pohybu elektronů, a proto je na velikosti intenzity E elektrického pole nezávislá!

Elektron tak po každém zastavení při srážce s kovovou mřížkou získá v průměru rychlost v danou vztahem (7.7). Pro driftovou rychlost v_d , jež je nutně střední hodnotou mezi nulovou počáteční rychlostí elektronu a touto rychlostí, pak musí platit

$$v_d = \frac{v}{2} \quad .$$

Po jejím dosazení do rovnice (7.7) skutečně dostáváme, že tato rychlost je přímo úměrná velikosti E intenzity vnějšího elektrického pole

$$\boxed{v_d = \frac{1}{2} \cdot \frac{e.\bar{t}}{m_e} \cdot E} \quad . \tag{7.8}$$

Zlomek $\frac{1}{2} \cdot \frac{e.\bar{t}}{m_e}$, jenž je vlastně konstantou úměrnosti mezi velikostí intenzity a driftovou rychlostí, **číselně udává**, jakou průměrnou rychlost získá elektron v elektrickém poli jednotkové intenzity $E = 1$ V.m^{-1}. Tato veličina se nazývá **pohyblivost nositelů proudu** μ (v případě kovů pak pohyblivost elektronů μ_e) a je dána poměrem driftové (unášivé) rychlosti v_d nositelů elektrického proudu v elektrickém poli a velikosti intenzity E tohoto pole

$$\boxed{\mu = \frac{v_d}{E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e.\bar{t}}{m_e}} \quad . \tag{7.9}$$

Pohyblivost nositelů proudu μ je důležitým materiálovým parametrem každého vodiče, její velikost bezprostředně určuje vodivost daného materiálu. Není však konstantou v pravém slova smyslu, protože závisí na střední době $\bar{t}$ mezi dvěma srážkami, a tento parametr rozhodně konstantou není. Obecně lze říci, že pohyblivost je funkcí teploty vodiče ($\mu = f(T)$).

U kovů se **pohyblivost elektronů** μ_e pohybuje v řádu 10^{-3} m^2.V^{-1}.s^{-1} (např. u mědi je při pokojové teplotě $\mu_e = 0{,}003\ 5$ m^2.V^{-1}.s^{-1}). S rostoucí teplotou, jak se zvětšuje amplituda kmitů kladných iontů kovové mřížky, dochází ke srážkám elektronů s atomy častěji a pohyblivost elektronů μ_e klesá (a odpor materiálu, jak si ukážeme dále, postupně vzrůstá).

7.2.2 Elektrický odpor látky, Ohmův zákon

Vraťme se ještě jednou k situaci znázorněné na obr. 7.2 a vypočítejme proud, jenž v našem modelu protéká průřezem vodiče o plošném obsahu S. Je-li střední rychlost pohybu elektronů v_d , pak plochou o obsahu S projde za čas t celkový objem elektronů (jenž si můžeme představit jako objem „elektronového plynu“ – viz dobře známá rovnice spojitosti toku z mechaniky tekutin)

$$V = S \,.\, v_d \,.\, t \quad . \tag{7.10}$$

Jestliže označíme koncentraci elektronů ve vodiči n (toto číslo vlastně představuje jejich počet v objemu 1m^8 příslušného materiálu), pak celkový náboj Q , jenž přísluší objemu V ve vztahu (7.10) bude roven

$$Q = n \,.\, e.\, V = n \,.\, e.\, S \,.\, v_d \,.\, t \quad ,$$

kde e je elementární náboj, jenž nese každý vodivostní elektron.

V souladu s definicí elektrického proudu (7.2) pak dostáváme

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{n.e.S.v_d.t}{t} = n\,.\,e.\,S\,.\,v_d \qquad (7.11)$$

a pro velikost tomu odpovídající proudové hustoty

$$J = \frac{I}{S} = \frac{n.e.S.v_d}{S} = n\,.\,e.\,v_d \quad . \qquad (7.12)$$

Poslední vztah (7.12) pro proudovou hustotu J platí obecně i pro takové proudy, jejichž hustota není v celé ploše S konstantní. Dosadíme-li do této rovnice za driftovou rychlost v_d podle vztahu (7.9) $v_d = \mu\,.\,E$, dostaneme

$$J = n\,.e.\,\mu\,.\,E = \frac{n.e^2.\bar{t}}{2.m_e}\cdot E \quad . \qquad (7.13)$$

Tuto rovnici lze psát též ve vektorovém tvaru. Označíme-li konstantu úměrnosti $n\,.\,e.\,\mu = \gamma$, bude mezi vektorem proudové hustoty $\boldsymbol{J}$ a vektorem intenzity $\boldsymbol{E}$ elektrického pole platit jednoduchá závislost

$$\boxed{\boldsymbol{J} = \gamma\,.\,\boldsymbol{E}} \quad . \qquad (7.14)$$

Vztah (7.14) je vyjádřením **Ohmova zákona v** tzv.**diferenciálním tvaru** (byl objeven Georgem Simonem Ohmem v roce 1826). Jedná se o základní zákon všech lineárních vodičů, t.j. vodičů, u nichž konstanta γ nezávisí ani na intenzitě $\boldsymbol{E}$ elektrického pole, ani na proudové hustotě $\boldsymbol{J}$.

Konstanta úměrnosti γ v Ohmově zákoně se nazývá **konduktivita** (dříve se používal termín **měrná elektrická vodivost**). Je to skalární fyzikální veličina charakterizující elektrickou vodivost každé látky. Jak je patrné ze vztahu (7.13), je dána pohyblivostí μ nositelů elektrického proudu, jejich koncentrací n a nábojem každého nositele proudu. Pro kovové vodiče pak platí

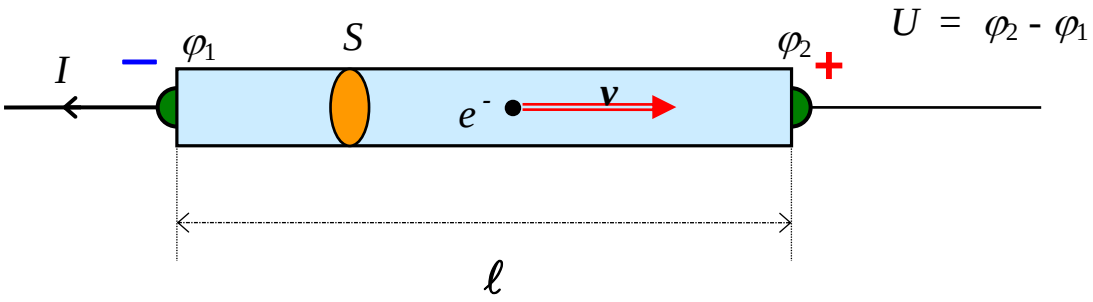
$$\boxed{\gamma = n\,.\,e.\,\mu_e = \frac{n.e^2.\bar{t}}{2.m_e}} \quad . \qquad (7.15)$$

kde μ_e je pohyblivost elektronů v daném kovu. Hodnoty konduktivit pro různé materiály jsou tabelovány. Jednotkou konduktivity v soustavě SI je 1 $\Omega^{-1}.m^{-1}$.

Např.: Pro měď je dosahuje koncentrace volných vodivostních elektronů řádu $n \sim 10^{28}$ m^{-3}, což při výše uvedené pohyblivosti $\mu_e = 0{,}003\ 5$ $m^2.V^{-1}.s^{-1}$ dává hodnotu měrné elektrické vodivosti tohoto kovu $\gamma = 6{,}43.10^7$ $\Omega^{-1}.m^{-1}$.

Ze vztahu (7.15) rovněž vyplývá, proč konduktivita kovových vodičů s rostoucí teplotou postupně klesá. Jak již bylo řečeno, při vyšších teplotách dochází k častějším interakcím mezi elektrony a mřížkou kovu, čehož bezprostředním důsledkem je pokles pohyblivosti μ_e těchto nositelů proudu. S rostoucí teplotou se ale prakticky nemění koncentrace vodivostních elektronů n, takže právě pokles pohyblivosti se projeví i na snížení konduktivity γ příslušného kovu.

Kromě Ohmova zákona v diferenciálním tvaru (7.14) je též známo (už ze základní školy) vyjádření **Ohmova zákona v** tzv. **integrálním tvaru**, jež charakterizuje přímou úměrnost mezi proudem I procházejícím částí vodiče vymezené dvěma ekvipotenciálními průřezy a napětím U na části vodiče právě mezi těmito dvěma průřezy (viz následující obr. 7.3).



Obr. 7.3 – k Ohmovu zákonu v integrálním tvaru

Jelikož v případě uvedeném na obr. 7.3 platí pro velikosti intenzity E připojeného elektrického pole a hustoty proudu J, že

$$E = \frac{U}{\ell} \quad \text{a} \quad J = \frac{I}{S} \quad ,$$

kde S je plocha průřezu vodiče, lze snadno po dosazení do zákona (7.14) odvodit závislost proudu I na vnějším připojeném napětí ve známém tvaru

$$\boxed{I = \frac{U}{R}} \quad , \tag{7.16}$$

v němž R je skalární fyzikální veličina nazývaná **elektrický odpor**. Tato veličina vyjadřuje „vlastnost“ dané látky bránit průchodu elektrického proudu a její jednotkou v soustavě SI je jeden ***ohm*** (Ω). Platí $1\ \Omega = 1\ \mathrm{kg.m^2.s^{-3}.A^{-2}}$.

Převrácenou hodnotou elektrického odporu je **elektrická vodivost** $G = \frac{1}{R}$.

Elektrický odpor vodiče o délce ℓ a plošném průřezu S lze z předcházejících vztahů snadno odvodit jako

$$\boxed{R = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\ell}{S} = \rho \frac{\ell}{S}} \quad . \tag{7.17}$$

Veličina označená řeckým písmenem ρ je **rezistivita** (dříve též nazývaná **měrný elektrický odpor**). Tato veličina charakterizuje elektrický odpor každé látky. Je definována jako převrácená hodnota konduktivity

$$\rho = \frac{1}{\gamma}$$

a bývá tabelována; její jednotkou v soustavě SI je 1 Ω.m. Vzhledem k tomu, že konduktivita vodičů γ s rostoucí teplotou klesá, vzrůstá naopak jejich rezistivita ρ, a tím i elektrický odpor R.

Pro kovové vodiče je závislost jejich elektrického odporu R na teplotě v „běžném“ rozsahu teplot (t.j. zhruba do 100°C) přibližně lineární. Platí, že se odpor zvyšuje podle vztahu

$$R = R_o\,(1 + a.t) \quad , \tag{7.18}$$

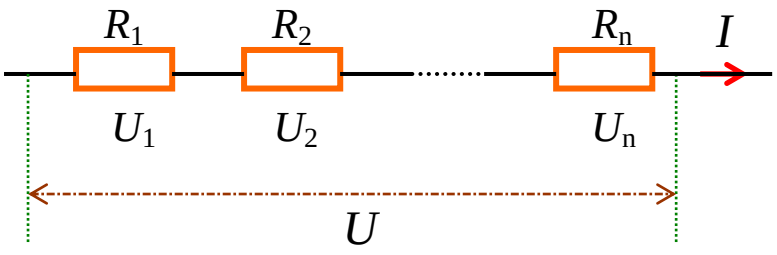
kde R je odpor látky při teplotě t, R_o její odpor při vztažné teplotě t_o = 0 °C a α tzv. **teplotní součinitel odporu**. Tato veličina, jejíž fyzikální jednotkou je K^{-1}, bývá pro každý vodič tabelována; pro kovy se její hodnoty pohybují řádově $\alpha \sim 10^{-3}\ K^{-1}$.

Pozn.: V širším teplotním intervalu, kde se již projevují výrazněji odchylky od lineárního průběhu závislosti odporu na teplotě kovu (7.18), je třeba tuto závislost vyjádřit kvadratickou funkcí, či dokonce mocninnou funkcí ještě vyšších řádů.

7.2.3 Spojování odporů

Pod pojmem **rezistor** nebo též **odporový prvek obvodu** rozumíme určitý prvek elektrického obvodu, jehož „schopnost“ bránit průchodu elektrického proudu je charakterizována fyzikální veličinou **odpor** označovanou písmenem R a měřenou v ohmech – $[R] = \Omega$.

Soustava rezistorů vzniká spojením více rezistorů, obvykle za účelem získání určitého výsledného odporu. Celkový odpor soustavy je pak roven odporu takového rezistoru, jenž má ekvivalentní **elektrické** vlastnosti jako daná soustava jako celek.



Obr. 8.4 – sériové zapojení rezistorů

Sériové zapojení rezistorů (zapojení za sebou) slouží vždy jako **napěťový dělič.** Pro napětí $U_1, U_2, \ldots\ldots, U_n$ na jednotlivých rezistorech a pro napětí na celé soustavě U totiž vždy musí platit prostý součet

$$U = U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n \quad .$$

Přitom ale všemi rezistory zapojenými do série musí nutně protékat stejný proud I. Budeme-li aplikovat Ohmův zákon v integrálním tvaru na každý z takto zapojených rezistorů i na celou soustavu jako celek, lze z rovnosti pro napětí snadno odvodit, že

$$R\,.\,I = R_1\,.\,I + R_2\,.\,I + \ldots\ldots + R_n\,.\,I \quad / : I\,.$$

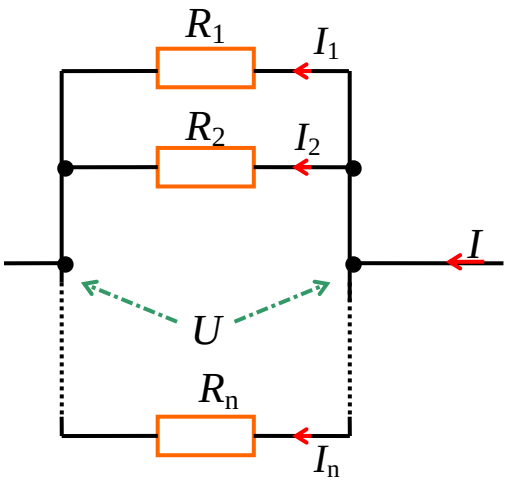
Odtud už bezprostředně vyplývá, že celkový odpor R soustavy n sériově zapojených rezistorů je roven součtu jednotlivých odporů

$$R = R_1 + R_2 + \ldots\ldots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i \quad . \tag{7.19}$$

Jak je na první pohled patrné, při sériovém zapojení rezistorů vždy dosáhneme toho, že výsledný odpor takto zapojené soustavy bude větší, než je hodnota odporu každého jednotlivého rezistoru v kombinaci.

Paralelní zapojení rezistorů (zapojení vedle sebe) je jako každé paralelní zapojení jakýchkoli prvků typické tím, že na všech rezistorech bude stejně velké napětí U. Celkový proud I, jenž přitéká ke kombinaci, se ale rozdělí (rozvětví) na menší proudy I_1, I_2, ... , I_n tekoucí jednotlivými rezistory. Přitom ale musí platit, že

$$I = I_1 + I_2 + ... + I_n \quad .$$



Obr. 7.5 – paralelní zapojení rezistorů

Stejně jako u sériového zapojení lze i zde vyjít při výpočtu celkového odporu z Ohmova zákona v integrálním tvaru. Dosadíme-li za jednotlivé proudy do uvedené rovnosti, dostáváme

$$\frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + ... + \frac{U}{R_n} \quad / : U \quad .$$

Odtud už opět ihned vyplývá, že pro výsledný odpor R soustavy n paralelně zapojených rezistorů platí vztah

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}} \quad . \qquad (7.20)$$

Tím pádem je pak výsledný odpor každého paralelního zapojení vždy menší, než je odpor jakéhokoli z n rezistorů spojených do příslušné kombinace.

7.2.4 Práce a výkon elektrického proudu

Na přenesení náboje q při průchodu proudu vodičem mezi místy, kde je rozdíl potenciálů (napětí) U, musí elektrické síly vykonat práci $W_e = q.U$. Bude-li vodičem procházet konstantní proud I, bude celkový přenesený náboj Q roven $Q = I \,.\, t$, a příslušná **energie elektrického proudu** tak bude

$$\boxed{E_{el} = U \,.\, I \,.\, t} \quad . \qquad (7.21)$$

Je-li R odpor vodiče, dostáváme pak s použitím Ohmova zákona pro energii elektrického proudu dva další ekvivalentní vztahy

$$\boxed{E_{el} = R \,.\, I^2 . \, t = \frac{U^2}{R} . t} \quad . \qquad (7.21)$$

Jestliže proud procházející vodičem bude měnit s časem svou velikost (podle Ohmova zákona bude tím pádem i napětí na koncích vodiče časově proměnné), bude výpočet energie elektrického proudu nutné provést obecně integrací. V takovém případě pak platí

$$E_{\mathrm{el}} = \int_0^t u\ i\ \mathrm{d}t = \int_0^t R\ i^2\ \mathrm{d}t = \int_0^t \frac{u^2}{R}\mathrm{d}t \quad . \tag{7.22}$$

Jak již bylo vysvětleno dříve, dochází při průchodu elektrického proudu vodivým materiálem neustále k interakcím elektronů s mřížkou kovu, při nichž se elektrony vždy zastaví. Přitom úbytek jejich kinetické energie se musí rovnat přírůstku energie kmitavého pohybu kladných iontů mřížky, což se navenek projeví zvýšením teploty materiálu. Tímto způsobem vlastně dochází k „přeměně“ energie elektrického proudu ve vodiči na teplo.

Toto teplo nazývané **Joulovo teplo** Q_{J} musí být podle zákona zachování energie rovno energii elektrického proudu, jenž prochází vodičem a platí pro něj i stejné vztahy. Pro případ, že vodičem prochází časově stálý proud I

$$Q_{\mathrm{J}} = U\,.\,I\,.\,t = R\,.\,I^2.\,t = \frac{U^2}{R}.t \quad , \tag{7.23}$$

v případě, že se proud i ve vodiči s časem mění, pak

$$Q_{\mathrm{J}} = \int_0^t u\ i\ \mathrm{d}t = \int_0^t R\ i^2\ \mathrm{d}t = \int_0^t \frac{u^2}{R}\mathrm{d}t \quad . \tag{7.24}$$

Závislost vyjadřující vztah mezi Joulovým teplem Q_{J} a proudem I (resp. i) ve vodiči o odporu R se nazývá **Joulův-Lenzův zákon**.

Výkon elektrického proudu je potom dán prací elektrických sil, jež je vykonána za jednotku času. V případě, že bude vodičem procházet konstantní proud I, platí pro jeho výkon vztahy

$$P = \frac{W_{\mathrm{e}}}{t} = U\,.\,I = R\,.\,I^2 = \frac{U^2}{R} \quad . \tag{7.25}$$

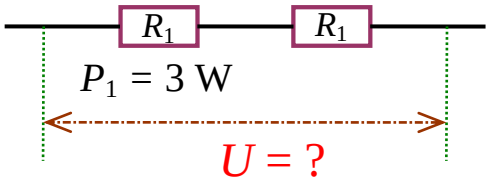
Bude-li však proud i procházející vodičem časově proměnný (např. střídavý proud), platí pro jeho **okamžitý** výkon v daném čase t

$$P\,(t) = \frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t} = u\,.\,i = R\,.\,i^2 = \frac{u^2}{R} \quad , \tag{7.26}$$

kde u je příslušná okamžitá hodnota napětí v čase t.

Příklad:

K neznámému napětí U připojíme sériově dva rezistory s odpory $R_1 = 32\ \Omega$ a $R_2 = 16\ \Omega$. Určete toto napětí U, jestliže je výkon elektrického proudu v prvním rezistoru $P_1 = 3$ W.



Jelikož se jedná o sériové zapojení dvou prvků, bude jimi protékat stejný proud I . Jeho velikost určíme z výkonu v prvním rezistoru

$$P_1 = R_1 . I^2 \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{P_1}{R_1}} = \sqrt{\frac{3\ \text{W}}{32\ \Omega}} \doteq 0{,}31\ \text{A}$$

Celkový odpor sériové kombinace obou rezistorů má hodnotu $R = R_1 + R_2 = 32\ \Omega + 16\ \Omega = 48\ \Omega$

Podle Ohmova zákona je hledané napětí

$U = R . I = 48\ \Omega . 0{,}31\ \text{A} \doteq 14{,}9\ \text{V}$

Podle stejného zákona lze spočítat i napětí na jednotlivých rezistorech

$U_1 \doteq 9{,}9\ \text{V}$; $U_2 \doteq 5{,}0\ \text{V}$

Samozřejmě musí platit rovnost $U = U_1 + U_2$.

7.2.5 Uzavřený elektrický obvod

Aby vodičem trvale procházel elektrický proud, je třeba jej připojit k nějakému zdroji elektrického napětí, a tak vlastně vytvořit uzavřený elektrický obvod. Zdroj potom „dodává" do obvodu elektrickou energii E_{el} , a to obvykle tak, že v něm dochází k „přeměnám" jiných forem energie (mechanické, chemické, apod..) právě na energii elektrickou. Veličina charakterizující „schopnost“ zdroje konat elektrickou práci vytvářením elektrického proudu v obvodu se nazývá **elektromotorické napětí zdroje** a označuje se U_e .

Tato veličina vlastně představuje výšku určité bariéry, kterou musí proud **ve zdroji** překonat, aby ve zbytku obvodu mohl téci (tak, jak bylo vysvětleno výše) již jen působením elektrických sil. Je třeba si uvědomit, že v uzavřeném elektrickém obvodu musí proud probíhat i uvnitř zdroje, kde se však jeho nositelé nutně pohybují ***proti*** působícím elektrickým silám. To ale znamená, že uvnitř zdroje nutně působí síly jiného než elektrického původu, jež tento pohyb náboje (obrazně řečeno „proti srsti“) vůbec umožní. Práce těchto neelektrických sil – jejíž mírou je i zmíněné elektromotorické napětí U_e zdroje – je potom rovna energii elektrického proudu v uzavřeném obvodu. Takto je tedy třeba chápat onu „přeměnu" různých forem energie ve zdrojích elektrického proudu.

!!

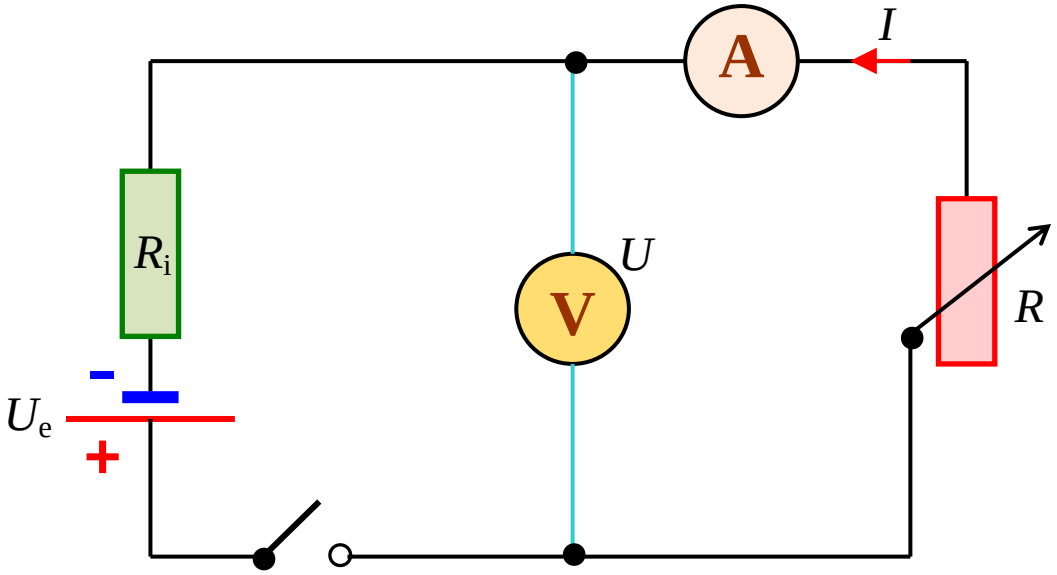
Samotný průchod elektrického proudu zdrojem však není bez překážek, proudu je kladen určitý odpor; tento odpor pak charakterizuje veličina R_i – tzv. **vnitřní odpor zdroje**.

Energie elektrického proudu, jež je rovna práci neelektrických sil zdroje za nějaký čas t, je potom dána výrazem

$$E_{el} = U_e \,.\, I \,.\, t \qquad (7.27)$$

a příslušný výkon zdroje P_z bude roven

$$P_z = U_e \,.\, I \quad . \qquad (7.28)$$



Obr. 7.6 – jednoduchý elektrický obvod

Jednoduchý uzavřený obvod si tedy můžeme schematicky znázornit jako obvod tvořený zdrojem proudu s elektromotorickým napětím U_e a vnitřním odporem R_i ; k tomuto zdroji je pak připojen jistý rezistor (spotřebič) o definovaném odporu R (viz předcházející obr. 7.6). Jeho velikost se může měnit a podle toho se pak mění i velikost proudu I v obvodu.

Při průchodu proudu I obvodem naměříme na svorkách zdroje (ale současně i na spotřebiči R) napětí $U = R.I$, jež je však vždy menší než napětí elektromotorické o úbytek napětí $U_i = R_i \,.I$ na vnitřním odporu zdroje. Toto napětí U se nazývá **svorkové napětí zdroje** a platí pro něj vztah

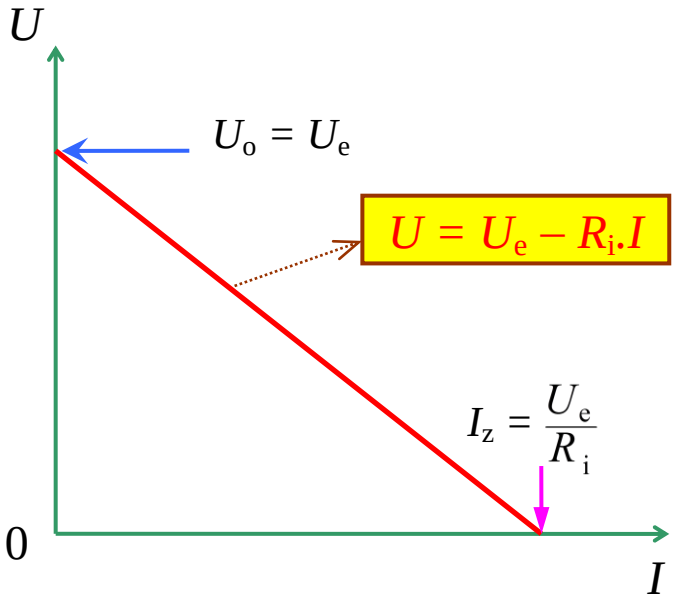
$$\boxed{U = U_e - R_i \,.\, I} \quad . \qquad (7.29)$$

Proud protékající obvodem přitom bude

$$\boxed{I = \frac{U_e}{R + R_i}} \quad . \qquad (7.30)$$

Závislost hodnoty svorkového napětí U na odebíraném proudu I vyjadřuje **zatěžovací charakteristika** daného **zdroje** (viz obr. 7.7 na následující straně).

V souladu s rovnicí (7.29) je touto charakteristikou klesající přímka, jež protíná osy prvního kvadrantu ve dvou významných bodech.



Obr. 7.7 – zatěžovací charakteristika zdroje

1) První je průsečík se svislou (napěťovou) osou. Představuje situaci, kdy zdroj není zatížen odběrem proudu (např. když je obvod rozpojen. Pouze v tomto případě je svorkové napětí (tzv. **napětí naprázdno** U_o) stejně velké jako elektromotorické napětí.

2) Druhý průsečík s vodorovnou (proudovou) osou odpovídá stavu, kdy je zdroj naopak nejvíce zatížen odběrem proudu při tzv. **zkratu** (k němu dochází v takových případech, kdy vnější odpor obvodu $R = 0\ \Omega$). Tehdy klesá hodnota svorkového napětí U až na nulu. Z rovnice (7.29) pak snadno určíme, že velikost zkratového proudu I_z je pak rovna

$$I_z = \frac{U_e}{R_i} \quad . \tag{7.31}$$

V případě zkratu v obvodu je tedy proud limitován pouze vnitřním odporem R_i zdroje. Velikost vnitřního odporu pak rozděluje zdroje na tzv.

→ **tvrdé**, jež mají malý vnitřní odpor R_i , poskytují velký zkratový proud I_z , a přitom jejich svorkové napětí U při malých změnách proudu zůstává téměř konstantní a

→ **měkké** mající naopak velký vnitřní odpor R_i ; tyto zdroje poskytují malý zkratový proud I_z a jejich svorkové napětí U dosti kolísá i při menších změnách odebíraného proudu.

Příklad:

Určete svorkové napětí zdroje, jehož elektromotorické napětí je 6 V a vnitřní odpor 0,8 Ω, jestliže je při provozu zatížen rezistorem o odporu 1,2 Ω. Jaký je výkon elektrického proudu ve vnitřním odporu R_i a jaký ve vnějším odporu R ? Jaký proud by obvodem protékal při zkratu?

Bude-li ke zdroji připojen vnější odpor $R = 1{,}2\ \Omega$, bude celkový odpor obvodu $R_{celk} = R + R_i = 2\ \Omega$ a obvodem tedy bude protékat proud

$$I = \frac{U_e}{R_{celk}} = \frac{6\ \mathrm{V}}{2\ \Omega} = 3\ \mathrm{A} \quad .$$

Při tomto odběru proudu bude příslušná hodnota svorkového napětí zdroje

$$U = U_e - R_i . I = 6\ \text{V} - 0{,}8\ \Omega\ . 3\ \text{A} = 6\ \text{V} - 2{,}4\ \text{V} = 3{,}6\ \text{V} \quad .$$

Známe-li odběr proudu, lze snadno spočítat i jeho výkony v jednotlivých odporech:

výkon na vnitřním odporu $\rightarrow$ $P_i = R_i . I^2 = 0{,}8\ \Omega\ . (3\ \text{A})^2 = 7{,}2\ \text{W}$,

výkon na vnějším odporu $\rightarrow$ $P = R . I^2 = 1{,}2\ \Omega\ . (3\ \text{A})^2 = 10{,}8\ \text{W}$.

Vidíme, že 40 % výkonu (a tudíž i elektrické energie) se spotřebuje ve vnitřním odporu zdroje a jen 60 % je pak „využito“ ve vnějším odporu.

Při zkratu nastává situace, kdy vlastně ke zdroji připojíme vnější odpor nulové hodnoty ($R = 0\ \Omega$). Proud procházející obvodem má v cestě jen jedinou překážku - vnitřní odpor zdroje R_i. Proto jeho velikost bude

$$I_{\text{zkrat}} = \frac{U_e}{R_i} = \frac{6\ \text{V}}{0{,}8\ \Omega} = 7{,}5\ \text{A} \quad .$$

Svorkové napětí zdroje při zkratu je samozřejmě nulové.

* * *

Elektrická energie „dodávaná“ do obvodu zdrojem elektrického napětí (7.27) se z části spotřebuje už ve vnitřním odporu R_i zdroje a zbytek pak ve vnějším odporu R . Nutně musí platit rovnost

$$U_e . I . t = R_i . I^2 . t + U . I . t \ ,$$

jež je ekvivalentní se vztahem (7.29). Poměr spotřebované elektrické energie ve vnějším odporu R ku energii, kterou do obvodu dodává zdroj pak udává **účinnost elektrického obvodu**

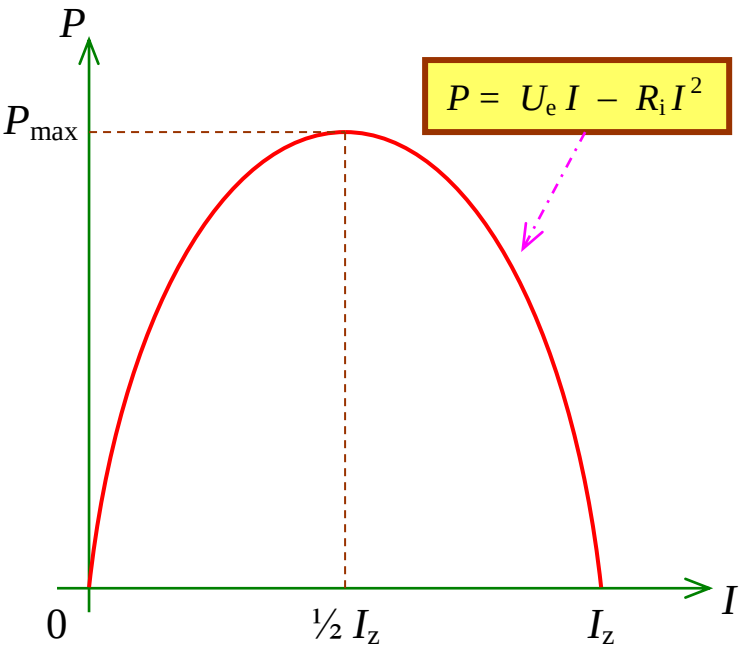
$$\eta = \frac{U.I.t}{U_e.I.t} = \frac{U}{U_e} \quad . \qquad (7.32)$$

S pomocí Ohmova zákona lze pak účinnost η elektrického obvodu vyjádřit též ekvivalentním výrazem jako

$$\eta = \frac{R}{R + R_i} \quad . \qquad (7.33)$$

Účinnost η elektrického obvodu je tím větší, čím větší je odpor vnějšího spotřebiče R ve srovnání s vnitřním odporem R_i zdroje. Budeme-li vnější odpor R zmenšovat, proud I v obvodu poroste a výkon proudu v tomto odporu se bude měnit podle vztahu

$$P = U . I = (U_e - R_i . I) . I = U_e . I - R_i . I^2 \quad .$$



Obr. 7.8 – výkon elektrického proudu ve spotřebiči v závislosti na odběru proudu

Výkon ve vnějším spotřebiči tedy závisí na odběru proudu nelineárně. Tuto závislost charakterizuje kvadratická funkce (viz vedlejší obr. 7.8), jež nutně musí nabývat maximální hodnoty. Výkon je totiž nulový v případě nezatíženého zdroje (I = 0 A) a rovněž v okamžiku zkratu (kdy svorkové napětí U klesá na nulu), pro všechny ostatní proudy z intervalu $< 0 ; I_z >$ pak výkon nabývá vždy kladných hodnot.

Svého maxima tento výkon dosáhne právě v okamžiku, kdy obvodem bude protékat proud

$$I = \frac{I_z}{2} = \frac{U_e}{2.R_i} \quad .$$

V tom případě musí ale evidentně platit, že vnější a vnitřní odpor jsou si rovny ($R = R_i$) a účinnost obvodu je právě poloviční (η = 50 %). A už si můžete snadno dopočítat sami, že příslušný maximální výkon ve vnějším odporu R musí být dán vztahem

$$P_{max} = \frac{U_e^2}{4.R_i} \quad . \qquad (7.34)$$

7.2.6 Kirchhoffovy zákony

Aplikace Kirchhoffových zákonů (byly objeveny r. 1841) je pouze jednou z celé řady možností, jak řešit úlohy ve složitějších elektrických obvodech, jež nazýváme **elektrické sítě**. V takových rozvětvených obvodech obvykle známe elektromotorická napětí a vnitřní odpory jednotlivých zdrojů elektrického proudu i odpory všech zapojených rezistorů a naším úkolem tak nejčastěji bývá nalézt velikosti a směry proudů, jež jednotlivými částmi příslušného obvodu procházejí.

Pro jednodušší orientaci se používá následující terminologie.

Uzel → místo v elektrické síti, kde se stýkají nejméně tři vodiče.

Větev → část elektrického obvodu mezi dvěma sousedními uzly.

Orientovaná smyčka → libovolně vybraná, ale vždy **uzavřená** smyčka v dané síti s jednoznačně stanoveným smyslem oběhu (buď ve směru chodu hodinových ručiček nebo proti směru jejich chodu).

Stacionární elektrický obvod → takový obvod, v němž jsou elektromotorická napětí U_e všech zdrojů stejnosměrná a konstantní, takže v ustáleném stavu jsou i proudy ve všech větvích tohoto obvodu stejnosměrné a konstantní.

1. Kirchhoffův zákon pro stacionární elektrický obvod

Tento zákon se týká *uzlů* elektrické sítě. Z fyzikálního hlediska je vlastně jen přímým důsledkem obecně platného zákona zachování elektrického náboje. Částice s nábojem, jež jsou nositeli elektrického proudu, nemohou v žádném uzlu ani vznikat ani zanikat. Jinými slovy, to, co do uzlu „přiteče“, musí zase z uzlu „odtéci“ dál.

Součet proudů do libovolného uzlu přitékajících je roven součtu proudů z téhož uzlu vytékajících.

Toto vyjádření 1. Kirchhoffova zákona lze pak zapsat jednoduchou matematickou formulí

$$\sum_{\text{do}} I_j = \sum_{\text{ven}} I_k \quad . \tag{7.35}$$

2. Kirchhoffův zákon pro stacionární elektrický obvod

Platí *pro jednoduché smyčky* v elektrické síti a je přímým důsledkem zákona zachování energie. Elektrická energie dodávaná zdroji elektromotorických napětí je „spotřebována“ v jednotlivých odporech dané smyčky. Tuto skutečnost lze také vysvětlit tak, že po „proběhnutí“ celou smyčkou se musíme dostat opět do místa o stejném potenciálu; napěťová bilance ve smyčce (na jedné straně elektromotorická napětí zdrojů, na straně druhé pak úbytky napětí na jednotlivých rezistorech) musí být tedy vyrovnaná.

Součet elektromotorických napětí zdrojů je v libovolné uzavřené orientované smyčce vždy roven součtu úbytků napětí na jednotlivých rezistorech v této smyčce.

I tuto formulaci je možno vyjádřit matematickým vztahem, a sice ve tvaru

$$\sum_{n} U_e = \sum_{j,k} R_j . I_k \quad , \tag{7.36}$$

v němž n označuje počet elektromotorických napětí (a tedy počet zdrojů) v dané uzavřené smyčce a j počet různých proudů protékajících postupně k rezistory této smyčky. Je pochopitelné, že tyto počty mohou být obecně různé ($n \neq j \neq k \neq n$).

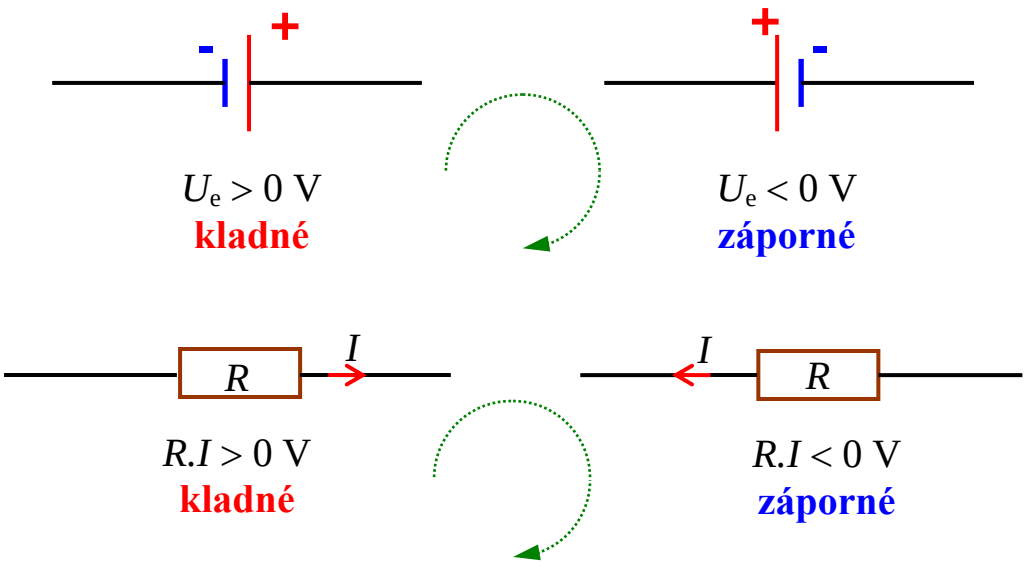
Matematická pravidla a postup při řešení obvodů pomocí Kirchhoffových zákonů:

Při aplikaci Kirchhoffových zákonů musíme dodržovat jistá matematická pravidla, jež ovšem vycházejí z fyzikální podstaty věci a jen ji formálně (a hlavně jednoznačně) vystihují.

1) Naprosto libovolně si zvolíme směry proudů v jednotlivých větvích sítě a smysl oběhu ve vybraných orientovaných smyčkách (bez ohledu na to, že skutečnou orientaci proudů obvykle neznáme).

2) Sestavíme rovnice podle 1. Kirchhoffova zákona pro vybrané uzly, přičemž důsledně dodržujeme při dosazování do rovnice (7.35) námi zvolené směry proudů.

3) Při sestavování rovnic podle 2. Kirchhoffova zákona musíme brát ohled na to, že elektromotorická napětí mohou mít dvojí polaritu (**+ −** nebo **− +**) a rovněž elektrický proud může protékat větví dvojím směrem (buď → , nebo ←). Navíc je v tomto případě nezbytně nutné respektovat i zvolený smysl oběhu danou smyčkou. Proto následujícím veličinám **přiřazujeme tato znaménka** (viz následující obr. 7.9):



Obr. 7.9 – znaménková pravidla při aplikaci Kirchhoffových zákonů

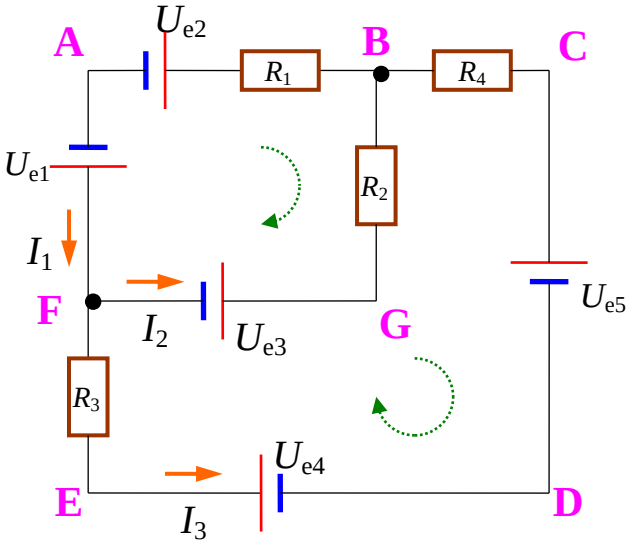
4) Řešením soustavy rovnic (pozor, abychom při jejím sestavování nedostali rovnice navzájem lineárně závislé !!!) pak dostaneme hledané parametry sítě (nejčastěji to jsou právě proudy).

→ je-li řešení daného proudu kladné, byl původně libovolně zvolený směr proudu **správný**;

→ je-li řešení daného proudu záporné, je skutečný směr proudu v dané větvi **opačný**, než jak byl původně námi v bodu **1)** zvolen; absolutní hodnota našeho řešení pak udává velikost řešeného proudu v ampérech.

Příklad: Vypočítejte proudy v jednotlivých větvích sítě na obrázku, je-li dáno:

$U_{e1} = 8$ V	$R_1 = 2\ \Omega$
$U_{e2} = 4$ V	$R_2 = 3\ \Omega$
$U_{e3} = 15$ V	$R_3 = 1\ \Omega$
$U_{e4} = 17$ V	$R_4 = 4\ \Omega$
$U_{e5} = 2$ V	



Zvolíme si směr proudů i smysl oběhů ve smyčkách tak, jak je naznačeno ve schématu a této volby se už „držme“ po celou dobu řešení této sítě.

Z **1. Kirchhoffova zákona** pro proudy v uzlu **F** dostaneme rovnici

$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad [1]$$

(je evidentní, že aplikací téhož zákona pro uzel **B** bychom dostali rovnici identicky stejnou !!!)

2. Kirchhoffův zákon aplikujeme pak na dvě ze tří možných smyček v síti (v obou volíme smysl oběhu v souladu s chodem hodinových ručiček)

$U_{e2} - U_{e3} - U_{e1} = -R_1 I_1 - R_2 I_2$ [2] (pro smyčku **ABGFA**)

$U_{e3} - U_{e5} + U_{e1} = -R_4 I_3 - R_3 I_3 + R_2 I_2$ [3] (pro smyčku **FGBCDEF**)

Snadno si ověříte, že sestavením rovnice pro poslední smyčku (**ABCDEFA**) dostaneme rovnici lineárně závislou na posledních dvou.

Po dosazení číselných hodnot známých veličin řešíme soustavu rovnic pro tři neznámé $I_{1,2,3}$. Při naší volbě směru proudů a smyslu oběhů dostaneme řešení (výpočet si proveďte sami !!!)

$$I_1 = 2\ \text{A}\ ;\ I_2 = 5\ \text{A}\ ;\ I_3 = -3\ \text{A}\ .$$

To tedy znamená, že proudy I_1 a I_2 mají vypočítané velikosti 2 A a 5 A a že jsme na začátku úlohy správně zvolili i jejich směr. Záporné znaménko u proudu I_3 pak říká, že skutečný směr proudu I_3 je opačný, než jak byl ve schématu zvolen. Proud I_3 má tedy velikost 3 A a protéká obvodem (sítí) od uzlu **B** přes body **C**, **D** a **E** do uzlu **F**.

!!

7.3 Elektrický proud v polovodičích

7.3.1 Charakteristika vlastních polovodičů

Polovodiče jsou látky, jejichž rezistivita ρ je mezi rezistivitou kovových vodičů a izolantů, nabývá tedy hodnot v poměrně širokém řádovém rozmezí $\rho \sim 10^{-5}\ \Omega.\mathrm{m} \div 10^{+6}\ \Omega.\mathrm{m}$; přitom hodnota této fyzikální veličiny výrazně klesá s rostoucí teplotou polovodiče a navíc lze elektrické vlastnosti polovodivých materiálů podstatně ovlivnit už nepatrným množstvím vhodných příměsí.

Nositeli elektrického proudu v polovodičích jsou jednak záporné volné ***elektrony***, jež se uvolnily z kovalentních vazeb mezi atomy daného polovodivého materiálu a jednak tzv. kladné ***díry***, jež představují určitý kvantový stav → jedná se ve skutečnosti o prázdné místo neobsazené elektronem a pohybující se v polovodiči nespojitě (díra vlastně přeskakuje z místa na místo tak, jak je postupně zaplňována jinými elektrony).

Pozn.: podle koncentrace nositelů v polovodiči rozlišujeme **nositele majoritní** (většinové) a **nositele minoritní** (menšinové).

Z hlediska struktury látky je pro polovodivé materiály typická tzv. **kovalentní vazba** mezi jednotlivými atomy látky. Existenci této právě této vazby v polovodičích lze vysvětlit pouze kvantově–mechanickým přístupem (řešením Schrödingerovy rovnice a pomocí tzv. pásové teorie). To ale značně přesahuje hranice tohoto našeho výkladu.

V případě vlastních polovodičů (mezi prvky jsou jimi např. čistý křemík či germanium) je každý atom příslušné látky vázán se čtyřmi sousedními atomy pomocí čtyř dvojic valenčních elektronů. Při nízkých teplotách se tvorby vazeb účastní všechny valenční elektrony (všechny jsou tak vázanými částicemi) a polovodič se chová jako izolant. Zvyšujeme-li ale teplotu materiálu, začne postupně v důsledku rostoucích kmitů mřížky docházet k narušování těchto kovalentních vazeb → elektron se tak z vazby uvolní a na jeho místě zůstává jakoby nevykompenzovaný kladný elementární náboj – díra. Jak uvolněné elektrony, tak i díry pak mohou vést elektrický proud. S rostoucí teplotou pak počet párů elektron – díra vzrůstá a tím pádem nutně vzrůstá i konduktivita a celková vodivost dané látky (rezistivita a celkový odpor naopak klesají).

Není-li polovodič připojen ke zdroji napětí, zůstává pohyb elektronů a děr v materiálu neuspořádaný. K vedení elektrického proudu v polovodiči dojde (stejně jako ve vodiči kovovém) až po připojení určitého vnějšího napětí. V polovodivé látce pak vzniká elektrický proud, přičemž směr pohybu záporných elektronů je opačný, než je směr pohybu kladných děr. Elektrony se pohybují proti směru intenzity elektrického pole, díry souhlasně s tímto vektorem. Přitom pohyb díry je umožněn tím, že její místo zaplní některý ze sousedních valenčních elektronů a díra se tak skokem přesune na jeho pozici. Protože se však v případě elektronů a děr jedná o nositele náboje opačných znamének pohybujících se opačnými směry, bude výsledný elektrický proud v polovodiči roven **součtu proudu elektronového a děrového**

$$I = I_e + I_d \quad . \tag{7.37}$$

Konduktivita polovodiče γ je dána součtem elektronové a děrové konduktivity

$$\gamma = n_e.e.\mu_e + n_d.e.\mu_d \quad , \tag{7.38}$$

kde n_e je koncentrace elektronů, n_d koncentrace děr v polovodiči, μ_e pak pohyblivost elektronů a μ_d pohyblivost děr v daném materiálu.

Zatímco pohyblivosti elektronů i děr se stejně jako u kovových materiálů s rostoucí teplotou mírně snižují, lze koncentrace obou typů nositelů výrazně (a to řádově) zvýšit právě „dodáním" energie (nejčastěji ve formě tepelné, či světelné – tzv. vnitřní fotoelektrický jev) a tím tak podstatně zvýšit vodivost (resp. snížit odpor) daného polovodiče.

Pozn. (na okraj): Hodnota pohyblivosti u polovodičů (ať už se jedná o pohyblivost děr či elektronů) je podstatně vyšší než u kovů; např. u křemíku je μ_e = 0,15 $m^2.V^{-1}.s^{-1}$, μ_d = 0,06 $m^2.V^{-1}.s^{-1}$. To je dáno tím, že atomy polovodiče jsou většinou neutrální útvary, zatímco v kovu se záporný elektron pohybuje mezi kladně nabitými ionty kovové mřížky a snáze tak dochází k jeho zachycení takovým kladným iontem kovu.

Pro **čistý vlastní polovodič** musí nutně platit, že koncentrace volných elektronů n_e je stejně velká jako koncentrace děr n_d, tedy

$$n_e = n_d \quad .$$

!!

7.3.2 Příměsová vodivost polovodičů

Vlastní vodivost polovodiče, o níž jsme až dosud hovořili, se však uplatňuje jen v dostatečně čistých látkách. Kromě vlastní vodivosti se u polovodičů uplatňuje **vodivost příměsová**. Tato vodivost je vyvolaná v polovodiči elektrony nebo dírami, jež vznikají v důsledku ionizace vhodných příměsí v původní látce. Koncentrace elektronů n_e se v tomto případě liší od koncentrace děr n_d.

Je jasné, že vodivost příměsová se vždy bude sčítat (překrývat) s vlastní vodivostí daného materiálu. Ovšem už i při velmi malé koncentraci příměsí je možné zvýšit vodivost polovodiče o několik řádů a příměsová vodivost tak bude dominující. Z hlediska typu rozdělujeme příměsi na dvě základní skupiny – donory a akceptory.

→ **Donor** je taková příměs, jež snadno uvolňuje elektrony; vodivost vyvolaná těmito elektrony se nazývá **elektronová** nebo též **vodivost typu N** a daný polovodič pak **polovodič typu N**. Majoritními nositeli jsou elektrony, minoritními pak díry a pro koncentrace nositelů platí

$$n_e > n_d \quad .$$

→ **Akceptor** je zase taková příměs, jež snadno zachycuje elektrony od sousedních atomů a vytváří tak na jejich původním místě kladné díry; vodivost vyvolaná takto vzniklými dírami se nazývá **děrová** nebo též **vodivost typu P** a daný polovodič pak **polovodič typu P**. Majoritními nositeli jsou díry, minoritními naopak elektrony a pro koncentrace nositelů platí

$$n_d > n_e \quad .$$

7.3.3 Teplotní závislost vodivosti polovodičů

Jak již bylo řečeno, typickým rysem polovodičů je to, že lze jejich konduktivitu

$$\gamma = n_e.e.\mu_e + n_d.e.\mu_d \tag{7.38}$$

výrazně změnit (zvýšit) „dodáním“ energie nejčastěji ve formě tepla při zahřívání polovodivé látky nebo ve formě energie světelné dopadem fotonů vhodné frekvence. Podívejme se podrobněji na teplotní závislost.

Budeme-li měnit teplotu polovodiče, bude se měnit jeho konduktivita v důsledku změny koncentrace nositelů proudu n_e a n_d elektronů a děr. Teplotní závislosti pohyblivostí (μ_e a μ_d) jsou totiž nesrovnatelně méně výrazné a nebudeme je tedy uvažovat.

Výraznou změnu konduktivity vlastních polovodičů γ s rostoucí teplotou vyjadřuje exponenciální funkce; závislost této fyzikální veličiny **(POZOR !!!)** **na absolutní teplotě** T je pro tento typ vodivosti příslušného polovodiče dána vztahem

$$\boxed{\gamma = A.e^{-\frac{E_g}{2kT}}} \quad , \tag{7.39}$$

kde $k \doteq 1{,}381.10^{-23}$ J.K^{-1} je tzv. **Boltzmannova konstanta** a E_g **aktivační energie** (je též používán termín vyplývající z pásové teorie pevných látek – **šířka zakázaného pásu**) daného polovodiče. A je konstanta, jež charakterizuje konduktivitu polovodiče při určité teplotě T_o.

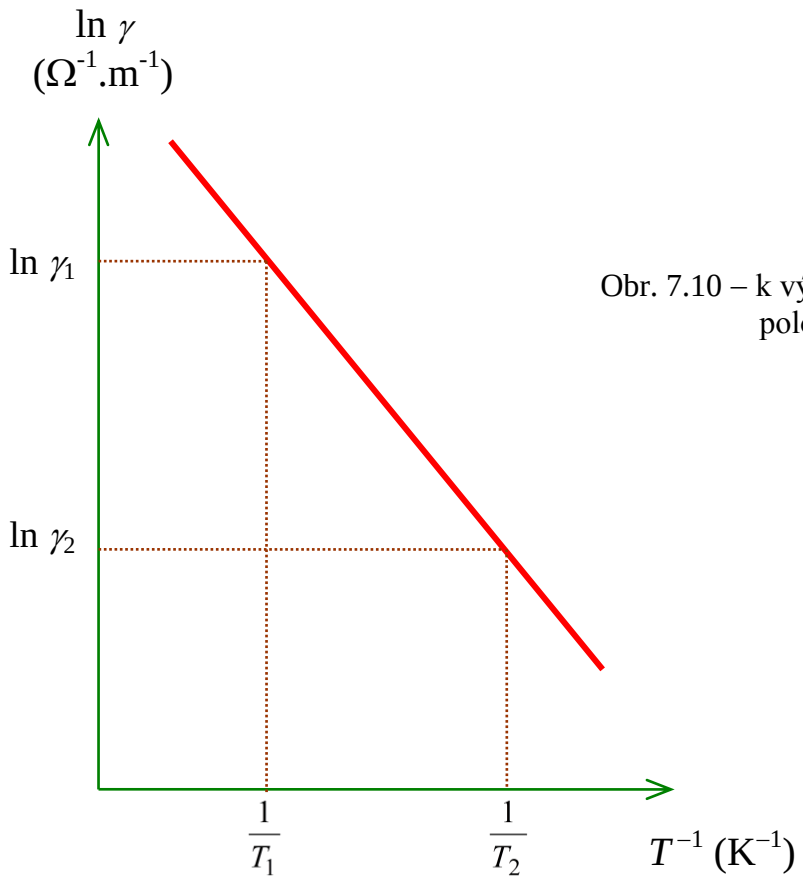
V grafu, kde na vodorovnou osu x nanášíme reciprokou (t.j. převrácenou) hodnotu absolutní teploty T^{-1} a na svislou osu y přirozený logaritmus konduktivity γ, bude závislost (7.39) znázorněna klesající přímkou

$$\ln \gamma = \ln \gamma_o - \frac{E_g}{2.k} \cdot T^{-1} \quad . \tag{7.40}$$

Přitom směrnice této přímky

$$-\frac{E_g}{2.k}$$

je dána právě hodnotou aktivační energie E_g. Této skutečnosti lze velmi jednoduše využít při experimentálním stanovení tohoto základního parametru každého polovodiče (viz obr. 7.10 na následující straně).



Obr. 7.10 – k výpočtu aktivační energie polovodiče

Předpokládejme, že γ_1 a γ_2 jsou konduktivity vlastního polovodiče naměřené při dvou různých jim odpovídajících absolutních teplotách T_1 a T_2.

Po dosazení příslušných dvojic hodnot – $[T_1; \gamma_1]$, resp. $[T_2; \gamma_2]$ – do rovnice (7.40) a po krátké úpravě (tu si ostatně můžete provést sami) dostáváme konečný vztah pro výpočet aktivační energie daného polovodiče ve tvaru

$$E_g = \frac{2k \cdot \ln \frac{\gamma_1}{\gamma_2}}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \quad . \qquad (7.41)$$

Chceme-li vyjádřit hodnotu aktivační energie E_g polovodiče pomocí názornější jednotky elektronvolt, musíme použít převodního vztahu mezi touto jednotkou a joulem

$$1\ \mathrm{J} \doteq 6{,}242.10^{18}\ \mathrm{eV} \quad .$$

Po dosazení číselné hodnoty Boltzmannovy konstanty k tak upravíme rovnici (7.41) do konečného tvaru

$$E_g = 1{,}724.10^{-4} \frac{\ln \frac{\gamma_1}{\gamma_2}}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \ (\mathrm{eV}) \quad . \qquad (7.42)$$

Ale i závislost konduktivity příměsových polovodičů na absolutní teplotě T je vyjádřena formálně naprosto stejnou exponenciální funkcí. Pro polovodič typu N totiž platí

$$\gamma = B.e^{-\frac{E_D}{2kT}} \tag{7.43}$$

a pro polovodič typu P pak obdobný vztah

$$\gamma = C.e^{-\frac{E_A}{2kT}} \tag{7.44}$$

kde E_D a E_A jsou aktivační energie příslušného donoru, resp. akceptoru. Konstanty B a C pak vyjadřují konduktivitu polovodiče při určité teplotě T_o.

Příměsová (nevlastní) vodivost polovodičů závisí zejména na koncentraci příměsí v daném polovodiči. Tyto příměsi jako cizí elementy v látce mívají obvykle podstatně menší aktivační energii, než je hodnota aktivační energie E_g – šířka zakázaného pásu daného polovodiče. Tím pádem se ale nevlastní vodivost projeví už při velmi malých absolutních teplotách, kdy je vlastní vodivost příslušné látky prakticky téměř zanedbatelná. Zvýšení vodivosti příměsového polovodiče díky jeho vodivosti vlastní se proto projeví až při vyšších teplotách, kdy už jsou všechny příměsi (donory či akceptory) ionizovány a další nárůst koncentrací elektronů a děr je možný právě jen generací těchto párů v důsledky vlastní vodivosti.

* * *

Změna vodivosti polovodičů však nemusí být nutně jen důsledkem zvýšení absolutní teploty polovodivé látky. Energii potřebnou na generaci elektronů a děr může polovodič „přijímat“ i jinými cestami. Vodivost polovodivé látky lze ovlivnit např. i osvětlením „vhodným“ světelným zářením. Energii v takovém případě přijímá látka od fotonů dopadajícího záření majících energii

$$E = h.\nu ,$$

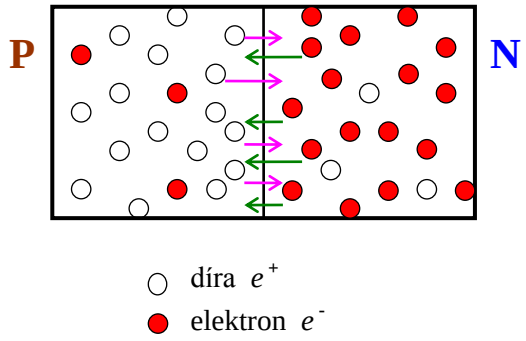
kde ν je frekvence fotonu a h tzv. **Planckova konstanta** …. $h \doteq 6{,}626.10^{-34}$ J.s .

Aby došlo k excitaci nositelů elektrického proudu po dopadu fotonu, musí elektron z kovalentní vazby vlastního polovodiče přijmout energii alespoň rovnou aktivační energii E_g. U příměsové vodivosti typu N je pak nutné dodat energii nejméně takovou, jako je hodnota aktivační energie příslušného donoru E_D, u příměsové vodivosti typu P pak zase energii alespoň rovnou aktivační energii akceptoru E_A. Nárůst vodivosti látky po jejím osvětlení (odtud též vyplývá název fotovodivost) se nazývá **vnitřní fotoelektrický jev**.

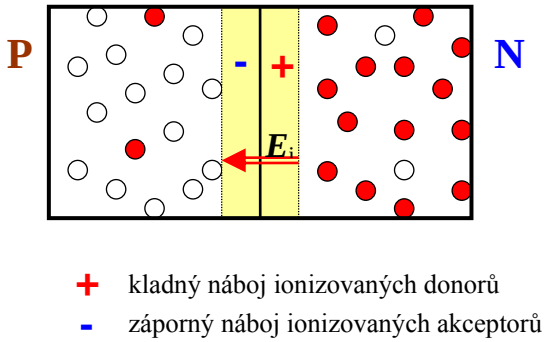
7.3.4 Přechod P–N

Přechod P-N představuje jistou oblast v polovodiči, v níž se vodivost typu P mění ve vodivost typu N; tím pádem se mění i odpovídající koncentrace donorů n_e a akceptorů n_d. Přechod P–N je výrazně nelineární prvek, závislost proudu procházejícího přechodem na vloženém napětí má přibližně exponenciální průběh. Navíc vodivost této polovodičové struktury závisí nejen na velikosti, ale i na orientaci (na polaritě) vnějšího připojeného napětí → takový prvek pak může fungovat např. jako usměrňovač.

Funkci přechodu P–N si přiblížíme na následujících obrázcích 7.11 a–d. Vyjděme z modelu, že tento přechod vznikne spojením polovodiče typu P, v němž jsou majoritními nositeli elektrického proudu díry a minoritními elektrony s polovodičem typu N, v němž naopak převládá vysoce koncentrace elektronů nad koncentrací děr. Po spojení obou polovodičů dojde k difúzi většinových nositelů do druhého polovodiče (viz obr. 7.11 a)) a k jejich následné rekombinaci s nositeli opačného znaménka. Volní nositelé elektrického náboje zanikají a na přechodu vzniká slabá tzv. **hradlová vrstva**, v níž převládá elektrické působení nepohyblivých iontů příslušných příměsí (viz obr. 7.11 b)).



Obr. 7.11 a) – difúze většinových nositelů po vytvoření přechodu P–N

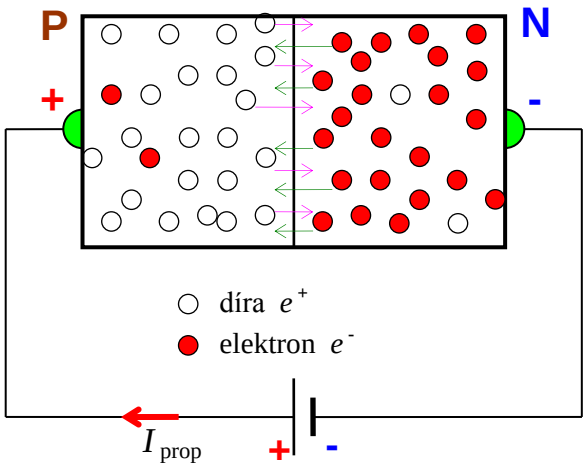


Obr. 7.11 b) – vznik hradlové vrstvy na přechodu P–N

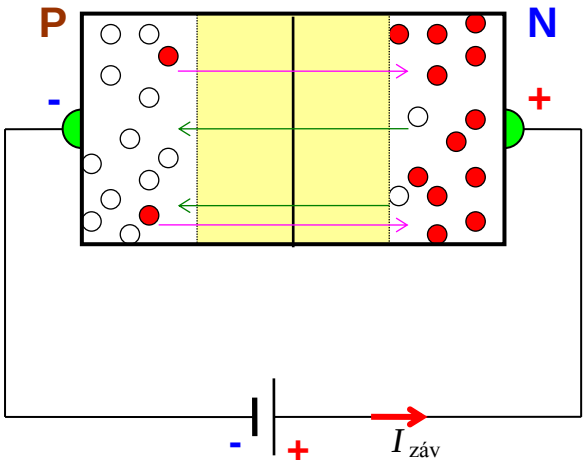
V P typu jsou to záporně nabité ionty akceptorů a v N typu kladně nabité ionty donorů. Tyto nepohyblivé náboje samozřejmě nemohou vést elektrický proud, oblast P–N přechodu je ochuzena o volné nositele a má velký odpor. Vektor elektrické intenzity $\boldsymbol{E}_i$ v hradlové vrstvě je orientován z oblasti typu N do oblasti typu P a toto elektrické pole pak brání dalšímu pronikání elektronů a děr do oblasti přechodu.

Situace se ale podstatně změní, když k přechodu P–N připojíme zdroj vnějšího napětí. Zapojíme-li oblast s vodivostí typu P ke kladné svorce vnějšího zdroje a oblast N ke svorce záporné, bude intenzita elektrického pole $\boldsymbol{E}$ vytvořeného v polovodičové struktuře působením vnějšího zdroje orientována opačně než intenzita $\boldsymbol{E}_i$ elektrického pole hradlové vrstvy a dojde k potlačení této vrstvy.

V takovém případě říkáme, že přechod P–N je zapojen v **propustném směru**. Další díry z P typu a elektrony z N typu se začnou dostávat (budou vypuzovány) do oblasti přechodu P–N a budou jím snadno procházet (viz obr. 7.11 c)). Koncentrace volných nositelů (elektronů a děr) na přechodu je vysoká, a proto při zapojení v propustném směru má přechod P–N velmi malý odpor. Elektrický proud I_{prop} je veden v tomto případě **majoritními** nositeli → dírami z P typu do N typu a elektrony z N typu do P typu.



Obr. 7.11 c) – zapojení přechodu P–N v propustném směru



Obr. 7.11 d) – zapojení přechodu P–N v závěrném směru

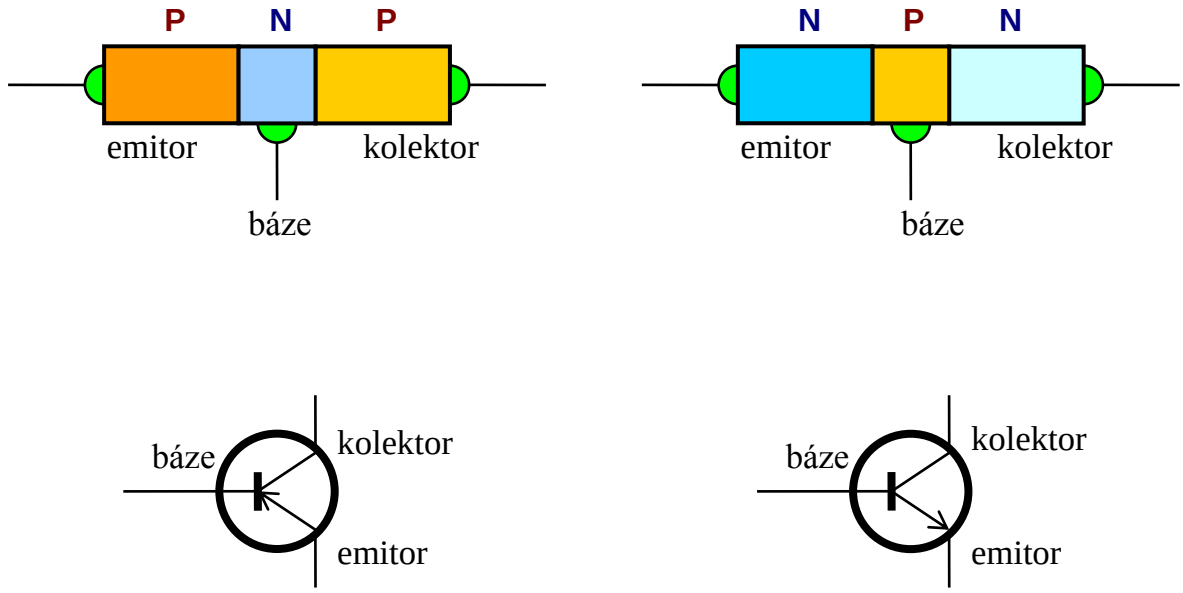
Jestliže zvolíme opačnou polaritu napětí vnějšího zdroje, t.j. oblast s vodivostí typu P připojíme k záporné svorce vnějšího zdroje a oblast N ke svorce kladné, bude intenzita elektrického pole ***E***, jež v polovodičové struktuře tento zdroj vytvořil, orientována souhlasně s intenzitou elektrického pole $\boldsymbol{E}_i$ hradlové vrstvy. Důsledkem toho se hradlová vrstva ještě zvětší (přesněji rozšíří) a přechod P–N tak bude prakticky nevodivý.

Tomuto zapojení přechodu P–N říkáme zapojení v **závěrném** (též **nepropustném**) **směru**. Díry v P typu jsou ještě více oddáleny od přechodu a totéž platí i pro elektrony v N typu. Větší šířka oblasti ochuzené o tyto volně pohyblivé nositele způsobí vysoký odpor přechodu P–N v závěrném směru.

Přechod je v tomto případě průchozí pouze pro **minoritní** nositele → elektrony z P typu mohou procházet přes závěrně polarizovaný přechod P–N do N typu a naopak je možný průchod děr z N typu do P typu (viz obr. 7.11 d)). Vzhledem k velmi nízké koncentraci těchto minoritních nositelů je však elektrický proud $I_{záv}$ v závěrném směru (ve srovnání s proudem I_{prop} v propustném směru) velmi malý.

7.3.5 Fyzikální princip tranzistoru

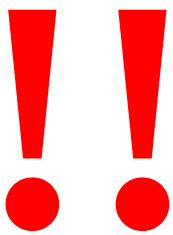
Tranzistor je polovodičový prvek, v němž jsou vhodnou technologií vytvořeny tři vrstvy mající odlišnou vodivost a to tak, že sousedí vždy spolu dvě oblasti s různým typem vodivosti. Podle toho mluvíme o tranzistoru typu PNP nebo NPN (viz obr. 7.12). Každý tranzistor tedy obsahuje dva přechody P–N, navíc umístěné v takové blízkosti, aby proud procházející jedním přechodem (jenž je zapojen v propustném směru) mohl podstatně ovlivňovat proud procházející druhým přechodem (jenž naopak bývá zapojen ve směru závěrném).



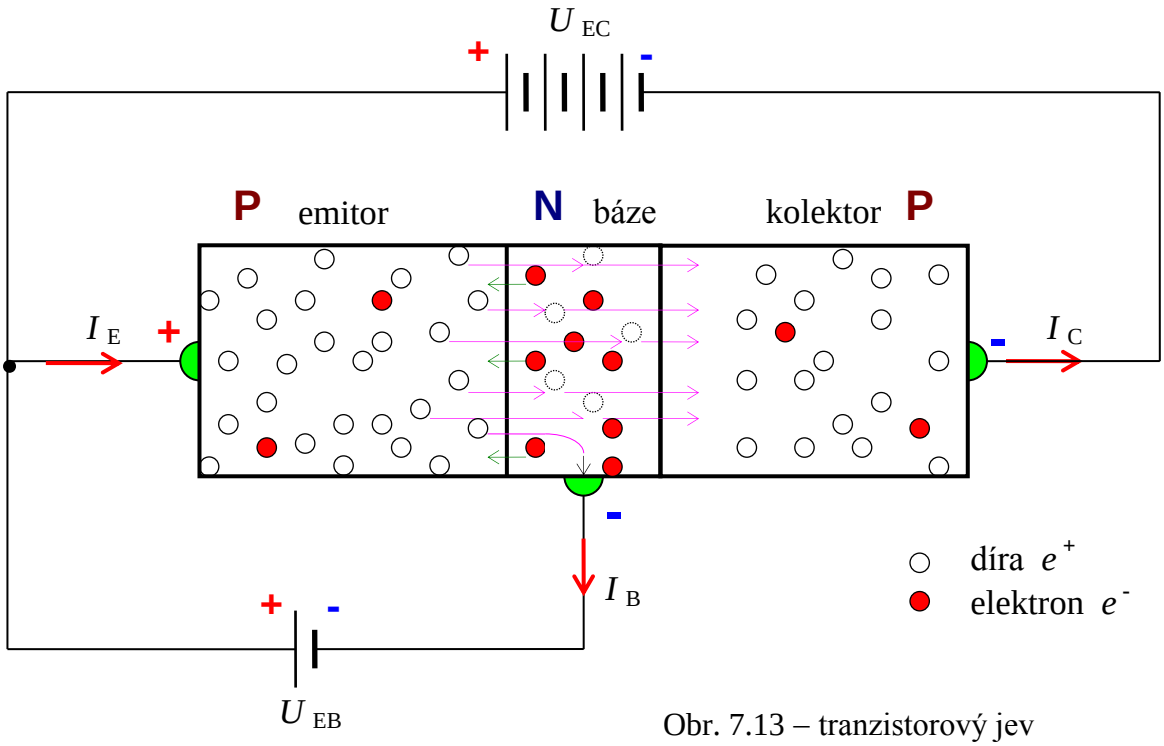
Obr. 7.12 – tranzistory typu PNP a NPN a jejich schématické značky

Střední oblast tranzistoru mezi oběma přechody P–N se nazývá báze **B**, další dvě krajní oblasti pak kolektor **K** a emitor **E**. Báze je ale ve skutečnosti velice tenká (řádově to obvykle bývají jen desetiny milimetru). Základní funkci tranzistoru si ukažme na zapojení, jež je označováno jako zapojení se společným emitorem (viz obr. 7.13 na následující straně). Tento typ zapojení bývá nejběžnější v různých elektrických zařízeních, jako jsou např. zesilovače apod.

Zapojení se společným emitorem obsahuje jednak kolektorový obvod, a jednak obvod báze. Přitom zdroje napětí jsou připojeny do těchto obvodů tak, že **přechod P–N mezi emitorem a bází je zapojen vždy v propustném směru**, zatímco **přechod mezi bází a kolektorem naopak ve směru závěrném**. Právě díky této kombinaci zapojení přechodů P–N nastává tzv. **tranzistorový jev** a uvedenou polaritu přechodů P–N je nutno dodržet i při jiných možných zapojeních tranzistorů (např. se společnou bází).



Na již zmíněném obr. 7.13 je schematicky znázorněn **tranzistorový jev** u tranzistoru typu PNP.



Obr. 7.13 – tranzistorový jev

Závěrně polarizovaným přechodem P–N mezi bází a kolektorem by za normálních okolností mohl procházet jen velice nepatrný (prakticky zanedbatelný) proud minoritních nositelů (z báze **B** do kolektoru **K** by to byl v tomto případě proud děrový). Avšak díky propustnému zapojení přechodu P–N mezi emitorem a bází přichází (je emitován) z emitoru typu P do báze typu N vysoký počet děr. Jelikož je prostřední elektroda – báze – velmi tenká, většina těchto děr pronikne až do oblasti závěrně polarizovaného přechodu P–N mezi bází a kolektorem.

Pro díry je ale tento závěrně polarizovaný přechod P–N (báze **+** , kolektor **-**) průchozí. Za běžných okolností celkem nepatrná koncentrace děr v bázi typu N je u tranzistoru mnohonásobně zvýšena právě díky jejich vstřikování (emitování) z emitoru **E** do báze **B**. Proto pak může (a také bude) i závěrným přechodem P–N mezi bází a kolektorem procházet značný proud I_C.

I když je báze velmi tenká, všechny díry se z emitoru přes ni až do kolektoru nedostanou. Některé v bázi rekombinují a přispívají tak k proudu procházejícímu přívodem báze I_B (tzv. bázový proud). Jelikož musí i v případě tranzistoru platit **1.Kirchhoffův zákon** pro proudy v uzlech rozvětveného obvodu (a tranzistor vlastně takový uzel rovněž tvoří), dostáváme pro jednotlivé proudy v obvodech tranzistoru jednoduchý vztah

$$I_E = I_C + I_B \quad , \tag{7.45}$$

přičemž kolektorový proud I_C je jen nepatrně menší než emitorový proud I_E ; proud bází I_B je pak podstatně menší než oba tyto proudy.

Jelikož na závěrně polarizovaném kolektorovém přechodu P–N je vyšší napětí než na propustném přechodu emitorovém (oba přechody mají podstatně rozdílný odpor !!!), jsou následně různé i výkony elektrického proudu na těchto přechodech.

Tranzistorů lze tak využít v různých zapojeních právě jako zesilovačů proudu, napětí či výkonu, a to na úkor elektrické energie zdrojů zapojených v jednotlivých obvodech. Právě v zapojení se společným emitorem se dá tranzistoru využít jako proudového zesilovače, kdy malým bázovým proudem I_B ovládáme mnohem větší kolektorový proud I_C . Důležitým technickým parametrem tranzistoru je jeho **proudový zesilovací činitel** β_E definovaný vztahem

$$\beta_E = \left(\frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} \right)_{U_{CE}=konst.} , \qquad (7.46)$$

kde ΔI_C je změna kolektorového proudu a ΔI_C odpovídající změna proudu bázového (jenž změnu kolektorového proudu vyvolal).